SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JACQUES AZÉMA
MARC YOR

Une solution simple au problème de Skorokhod

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 13 (1979), p. 90-115
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1979__13__90_0>

UNE SOLUTION SIMPLE AU PROBLEME DE SKOROKHOD

par Jacques AZEMA et Marc YOR

1. Introduction :

Soient (X_t) un mouvement brownien à une dimension issu de l'origine et μ une loi de probabilité sur $\mathbb{R}$, centrée et admettant un moment du second ordre.

On appelle $\Psi_\mu(x)$ le barycentre de la restriction de μ à $[x,\infty[$, et on pose $S_t = \sup_{s \leqslant t} X_s$. L'objet principal de cet article est de montrer que le temps d'arrêt

$T = \inf\{t \,;\, S_t \geqslant \Psi_\mu(X_t)\}$ résout le problème de Skorokhod relatif à μ, c'est à dire satisfait aux conditions suivantes :

a/ La loi de X_T est μ.

b/ $E[T] = \int_{\mathbb{R}} x^2 \, d\mu(x)$.

Par rapport aux constructions antérieures (Skorokhod [11], Dubins [2], Root [10], Chacon - Walsh [1]), le procédé proposé ici présente l'avantage de ne pas être obtenu par un passage à la limite à partir de lois discrètes ; la solution est donc plus explicite. D'autre part on peut calculer, là encore explicitement, la loi des variables aléatoires S_T et T en fonction de μ.

Ce travail a été inspiré par la lecture (1) des articles de H.M. Taylor [12], D. Kennedy [4], J. Lehoczky [7], D. Williams [13], dont l'objectif était inverse : étant donnée une fonction Ψ continue et $T = \inf\{t \,;\, S_t \geqslant \Psi(X_t)\}$, quelle est la loi du couple (S_T, T) ?

En ce qui concerne les méthodes, nous avons usé de manière intensive du résultat suivant : Si f est de classe C^1, le processus $f(S_t) + (X_t - S_t) \, f'(S_t)$ est une martingale locale.

Ces martingales locales paraissent un peu simplettes mais suffisent dans de nombreux cas à obtenir des résultats d'accès difficile. Introduites en [18] de manière compliquée, elles ont déjà été utilisées par les auteurs en [19].

(1) Nous remercions vivement M. Basseville qui nous a fait connaître les travaux de Kennedy et Lehoczky.

Comme deuxième exemple d'application de ces méthodes, nous donnons une nouvelle démonstration d'un célèbre théorème dû à D. Ray [9] et F. Knight [5] sur le temps local du mouvement brownien.

Enfin, nous consacrons un appendice au théorème de Paul Lévy sur l'équivalence en loi des processus $(S - X, S)$ et $(|X|, L^\circ)$, où L° désigne le temps local en 0 du mouvement brownien X.

2. Quelques martingales simples associées au mouvement brownien

$(\Omega, \underline{\underline{F}}, (\underline{\underline{F}}_t), P)$ est un espace filtré vérifiant les conditions habituelles ; $X = (X_t)$ est une martingale locale continue (par rapport à la filtration $(\underline{\underline{F}}_t)$) de processus croissant $(\langle X, X\rangle_t)$. On désigne par (L_t) le temps local en 0 de (X_t) : c'est le processus croissant continu tel que $|X_t| - L_t$ soit une martingale locale. Le temps local en a, (L_t^a), est (défini comme étant) le temps local en zéro de la martingale locale $(M_t - a)$. On pose enfin $S_t = \sup_{s \leq t} (X_s)$, et l'on a le résultat suivant

2.1. Proposition <u>Soit f</u> : $(x,y,t) \longrightarrow f(x,y,t)$ <u>une fonction réelle de classe C^∞, définie sur $\mathbb{R}^3$, qui satisfait aux conditions</u> :

$$\frac{1}{2} f''_{x^2} + f'_t = 0 \quad ; \quad f'_x(0,y,t) + f'_y(0,y,t) = 0$$

<u>Les processus</u> $f(S_t - X_t, S_t, \langle X,X\rangle_t)$ <u>et</u> $f(|X|_t, L_t, \langle X,X\rangle_t)$ <u>sont des martingales locales</u>.

<u>Démonstration</u> Appelons (Z_t) le processus $f(S_t - X_t, S_t, \langle X,X\rangle_t)$ et appliquons la formule d'Ito ; il vient

$$Z_t = Z_0 - \int_0^t f'_x(S_s - X_s, S_s, \langle X,X\rangle_s)\, dX_s + \int_0^t (f'_x + f'_y)(S_s - X_s, S_s, \langle X,X\rangle_s)\, dS_s$$

Dans la deuxième intégrale, on peut remplacer $S_s - X_s$ par 0 puisque dS_s est porté par $\{s \mid X_s = S_s\}$. Cette intégrale est donc nulle ; le résultat relatif au temps local se montre de la même façon.

2.2. <u>Corollaires</u> 1/ <u>Le processus</u> $(S_t - X_t)^2 - \langle X,X\rangle_t$ <u>est une martingale locale</u>

2/ <u>Si f est une fonction de classe C^1, les processus</u>

$f(S_t) - (S_t - X_t)f'(S_t)$ et $f(L_t) - |X_t|f'(L_t)$ sont des martingales locales.

3/ Pour tout couple (p,q) de $\mathbb{R}^2$, les processus

$Z_t^{p,q} = [q \operatorname{ch} q\ (S_t - X_t) + p \operatorname{sh} q\ (S_t - X_t)] \exp\{-p S_t - \frac{q^2}{2} < X,X >_t\}$,

$\tilde{Z}_t^{p,q} = [q \operatorname{ch} q\ |X_t| + p \operatorname{sh} q\ |X_t|] \exp\{-p L_t - \frac{q^2}{2} < X,X >_t\}$ sont des martingales locales.

Nous aurons besoin d'une légère extension de 2/ qui s'obtient grace à un argument de classe monotone :

2'/ Soit g une fonction borélienne bornée ; posons

$G(x) = \int_0^x g(u)\, du$; le processus

(1) $G(S_t) - (S_t - X_t)\, g(S_t)$ est une martingale locale.

(on remarquera que, contrairement aux apparences, le processus $((S_t - X_t)\, g(S_t))$ est à trajectoires continues.)

3. Le problème de Skorokhod

a/ Préliminaires analytiques Soit μ une probabilité sur $\mathbb{R}$ admettant un moment d'ordre 1, et centrée ; on pose

$$\Psi_\mu(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mu[x,\infty[} \displaystyle\int_{[x,\infty[} t\, d\mu(t) & \text{si } \mu[x,\infty[> 0 \\ x & \text{si } \mu[x,\infty[= 0 \end{cases}$$

$\Psi_\mu(x)$ est le barycentre de la restriction de μ à $[x,\infty[$;

La fonction Ψ_μ possède les propriétés suivantes :

(2) Ψ_μ est une fonction croissante, continue à gauche, vérifiant : $\forall x, \Psi_\mu(x) \geq x$, et $\lim\limits_{x \to -\infty} \Psi_\mu(x) = 0$. De plus, $\Psi_\mu(y) = y \Rightarrow \Psi_\mu(x) = x \quad \forall x \geq y$.

On remarque que l'on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \mu[x,\infty[\ \Psi_\mu(x) = 0$. On pose dans la suite $\bar{\mu}(x) = \mu[x,\infty[$; quand aucune confusion n'en résulte, on écrit Ψ pour Ψ_μ. La proposition suivante montre que Ψ_μ détermine μ.

3.1. Proposition On a la relation

$$(3)\quad \bar{\mu}(x) = \exp\left(-\int_{-\infty}^{x} \frac{d\Psi^c(s)}{\Psi(s)-s}\right) \times \prod_{s<x} \frac{\Psi(s)-s}{\Psi(s_+)-s} ,$$

où l'on convient que $\frac{0}{0} = 1$ et où Ψ^c désigne, comme d'habitude, la partie continue de Ψ.

Démonstration Posons $a = \inf\{x \,;\, \bar{\mu}(x) = 0\}$; la formule (3) est évidente lorsque $x > a$; il suffit de la montrer pour $x < a$ après avoir remarqué que les deux membres définissent des fonctions continues à gauche.

Or, pour $x \in \,]-\infty,a[$, on a : $\Psi(x)\ \bar{\mu}(x) = \int_{[x,\infty[} t\ d\mu(t)$

D'où : $\Psi(x+)\ d\bar{\mu} + \bar{\mu} d\Psi = -x\, d\mu = x\, d\bar{\mu}$, sur $]-\infty,a[$.

Puisque la fonction $[\Psi(x+)-x]$ ne s'annule pas sur $]-\infty,a[$, il vient, sur cette demi-droite : $d\bar{\mu} = -\dfrac{\bar{\mu}}{\Psi(x+)-x}\, d\Psi$.

Cette "équation différentielle" (sur $]-\infty,a[$) est plus que classique ; connaissant la condition initiale $\bar{\mu}(-\infty) = 1$, elle se résoud par la formule

$$\bar{\mu}(x) = \exp\left\{-\int_{-\infty}^{x} \frac{d\Psi^c(s)}{[\Psi(s)-s]}\right\} \prod_{s<x} \left(1 - \frac{\Delta\Psi(s)}{\Psi_+(s)-s}\right),$$

dont découle la formule (3).

Le résultat précédent admet une réciproque :

3.2. Proposition Soit Ψ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant les conditions (2)

On pose $\bar{\mu}(x) = \exp\left[-\int_{-\infty}^{x} \frac{d\Psi^c(s)}{\Psi(s)-s}\right] \prod_{s<x} \frac{\Psi(s)-s}{\Psi(s_+)-s}$, (toujours avec la convention $\frac{0}{0} = 1$), et on suppose que

$$(*)\qquad \lim_{x\to+\infty} \Psi(x)\ \bar{\mu}(x) = 0.$$

$\bar{\mu}$ est alors une fonction décroissante continue à gauche vérifiant $\lim_{x\to-\infty} \bar{\mu}(x) = 1$ et $\lim_{x\to+\infty} \bar{\mu}(x) = 0$. Elle définit donc une probabilité μ sur $\mathbb{R}$, caractérisée par :

$\forall x,\ \bar{\mu}(x) = \mu([x,\infty))$.
<u>μ admet un moment d'ordre 1, est centrée et $\Psi = \Psi_\mu$.</u>

<u>Démonstration</u> Posons $a = \inf\{x\ ;\ \Psi(x) = x\}$. Sur l'intervalle $]-\infty,a[$, on a :

$$d\bar{\mu}(x) = -\bar{\mu}(x)\ \frac{d\Psi(x)}{\Psi(x_+) - x}\ ,\quad \text{soit encore : } [\Psi(x_+) - x]\ d\bar{\mu}(x) = -\bar{\mu}(x)\ d\Psi(x).$$

Le membre de gauche est nul sur $[a,\infty[$. Quant au membre de droite, il ne charge pas $\{a\}$, car Ψ est continue en a, ni $]a,\infty[$, car sur cet intervalle $\bar{\mu}(x) = 0$

L'égalité $[\Psi(x_+) - x]\ d\bar{\mu}(x) = -\bar{\mu}(x)\ d\Psi(x)$ a donc lieu sur tout $\mathbb{R}$.

Ceci s'écrit encore $d[\Psi\bar{\mu}] = t\, d\bar{\mu}$

- $\bar{\mu}$ étant décroissante, on en déduit, en particulier, pour $x > 0$, que :

$\Psi(x)\ \bar{\mu}(x) \leqslant \Psi(0)\ \bar{\mu}(0)$, et donc : $\bar{\mu}(x) \leqslant \dfrac{\Psi(0)\ \bar{\mu}(0)}{x}$, puisque $\Psi(x) \geqslant x$.

De là, on tire : $\lim\limits_{x\to+\infty} \bar{\mu}(x) = 0$.

D'autre part, d'après la convergence (pour $x < a$) de l'intégrale qui figure dans la définition de $\bar{\mu}$, on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} \bar{\mu}(x) = 1$. Ces deux résultats entraînent l'existence de la probabilité μ telle que : $\forall x,\ \bar{\mu}(x) = \mu([x,\infty))$.

- De l'égalité $d(\Psi\bar{\mu}) = t\, d\bar{\mu}$, on déduit facilement que μ admet un moment d'ordre 1, et l'hypothèse $\lim\limits_{x\to+\infty} \Psi(x)\ \bar{\mu}(x) = 0$ entraîne alors l'égalité

$$\Psi(x)\ \bar{\mu}(x) = \int_{[x,\infty[} t\, d\mu(t)\ ,$$ pour tout x, d'où le résultat.

<u>Remarques</u> : 1/ Dans l'énoncé précédent, si l'on supprime l'hypothèse (*), la limite, ℓ, de $\Psi(x)\ \bar{\mu}(x)$, quand $x\to\infty$ existe toujours, et est positive ou nulle. μ admet un moment d'ordre 1, égal à $-\ell$, et on a : $\Psi(x) = -\dfrac{1}{\bar{\mu}(x)} \displaystyle\int_{]-\infty,x[} t\, d\mu(t)$, pour tout x tel que $\bar{\mu}(x) > 0$.

2/ La condition (*) peut paraître difficile à vérifier. Toutefois, une condition suffisante pour qu'elle soit vérifiée est que $\limsup\limits_{x\to\infty} \dfrac{\Psi(x)}{x} < +\infty$.
Ceci découle de la majoration : si $x > 0$, $\Psi(x)\ \bar{\mu}(x) \leqslant \left(\dfrac{\Psi(x)}{x}\right) \displaystyle\int_{[x,\infty)} t\, d\mu(t)$.

Enonçons enfin un résultat relatif au second moment de μ :

3.3. <u>Proposition</u> <u>On a l'égalité</u> : $(\Psi_\mu(x) - x)\ \bar{\mu}(x)\ d\Psi_\mu(x) = x^2 d\mu(x) + d(\Psi_\mu^2\ \bar{\mu})$.

En conséquence, on a :

(4) $$\int_{\mathbb{R}} x^2 \, d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} (\Psi_\mu(x) - x) \, \bar{\mu}(x) \, d\Psi_\mu(x)$$

Démonstration Pour simplifier l'écriture, notons $\Psi = \Psi_\mu$.

On a : $(\Psi(x) - x) \, \bar{\mu} d\Psi = -(\Psi(x) - x)(\Psi(x_+) - x) \, d\bar{\mu}$

$$= x^2 \, d\mu + [\Psi(x) + \Psi(x_+)] \, x d\bar{\mu} - \Psi(x) \, \Psi(x_+) \, d\bar{\mu}$$

D'autre part, on a : $d\{\Psi^2 \bar{\mu}\} = \bar{\mu}(x) \, d(\Psi^2) + \Psi^2(x_+) \, d\bar{\mu}$

$$= \bar{\mu}(x)\{\Psi(x) + \Psi(x_+)\} \, d\Psi + \Psi^2(x_+) \, d\bar{\mu}$$

$$= (x - \Psi(x_+)) \, (\Psi(x) + \Psi(x_+)) \, d\bar{\mu} + \Psi^2(x_+) \, d\bar{\mu}$$

$$= [\Psi(x) + \Psi(x_+)] \, x d\bar{\mu} - \Psi(x) \, \Psi(x_+) \, d\bar{\mu},$$

d'où le premier résultat annoncé.

Le second en découle lorsque l'on remarque que $\Psi(-\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} t d\mu(t) = 0$.

Note : Dans le cas où μ n'est pas centrée, il faut remplacer (4) par (4') :

(4') $$\int_{\mathbb{R}} x^2 \, d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} (\Psi_\mu(x) - x) \, \bar{\mu}(x) \, d\Psi_\mu(x) + \left(\int_{\mathbb{R}} t \, d\mu(t)\right)^2$$

b/ Une solution au problème de Skorokhod : Soit (X_t) une martingale locale issue de 0 telle que $\liminf_{t \to \infty} X_t = -\infty$, $\limsup_{t \to \infty} X_t = +\infty$ p s

Note On sait que les conditions ci-dessus sont équivalentes à $\langle X, X \rangle_\infty = \infty$ p s. Cela résulte d'un théorème classique selon lequel toute martingale locale continue est un mouvement brownien changé de temps au moyen de $\langle X, X \rangle_t$. On notera que, compte tenu de ce théorème, on aurait pu, sans perte de généralité, traiter uniquement dans ce qui suit le cas du mouvement brownien.

Mais, puisque les méthodes employées faisaient qu'il n'était pas plus coûteux de traiter le cas des martingales locales, on a préféré éviter de recourir à ce résultat.

3.4. Théorème Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$, admettant un moment d'ordre 2, et centrée.

<u>On pose</u> $T = \inf\{t\,;\,S_t \geq \Psi_\mu(X_t)\}$.

X_T <u>a pour loi</u> μ <u>et</u> $E[<X\,,X>_T] = \int_{\mathbb{R}} x^2\,d\mu(x)$.

<u>Démonstration</u> Remarquons tout d'abord que T est presque sûrement fini ; soit en effet b un nombre réel, $a = \Psi(b)$; on a $T \leq \inf\{t > T_a\,;\,X_t = b\}$, où T_a désigne le temps d'entrée de (X_t) dans $\{a\}$. Montrons maintenant que X_T a pour loi μ ; pour cela nous prouverons l'égalité

$$P[X_T \geq x] = \exp\left[-\int_{-\infty}^{x} \frac{d\Psi^c(s)}{\Psi(s)-s}\right] \prod_{s<x} \frac{\Psi(s)-s}{\Psi(s_+)-s}$$

ce qui, avec la proposition 3.1., nous donnera le résultat.

Désignons par $[\![\Psi]\!]$ le graphe de Ψ dans $\mathbb{R}^2$ et par γ le fermé $[\![\Psi]\!] \cup \left(\bigcup_{x\in\mathbb{R}} \{x\} \times [\Psi(x)\,,\Psi(x_+)]\right)$. Il est facile de trouver un paramétrage de γ, c'est à dire un homéomorphisme $h = (\alpha,\beta)$ de $\mathbb{R}$ sur γ, ayant les propriétés suivantes : α et β sont croissantes continues, $\lim_{x\to-\infty} \alpha(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} \alpha(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} \beta(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} \beta(x) = +\infty$. On a alors $T = \inf\{t\,;\,(X_t\,,S_t) \in \gamma\}$; on pose $Z = h^{-1}(X_T\,,S_T)$ et, dans une première étape, nous allons chercher la loi de Z. Nous aurons besoin pour cela d'introduire les fonctions $\alpha'(u) = \inf\{v\,;\,\alpha(v) \geq u\}$ et $\beta'(u) = \inf\{v\,;\,\beta(v) \geq u\}$ (qui sont continues à gauche). Soit Φ une fonction continue à support compact K contenu dans $]0\,,\infty[$; appliquons le corollaire 2.2.2'. à la fonction $g = \Phi \circ \beta'$; reprenant les notations de ce corollaire on sait que $M_t = G(S_t) + (X_t - S_t)\,g(S_t)$ est une martingale locale continue ; en fait, il est facile de voir que M^T est une martingale bornée : en effet, d'une part, G est bornée, et d'autre part, on a l'inégalité

$$(X_{t\wedge T} - S_{t\wedge T})\,g(S_{t\wedge T}) \leq \|g\| \sup_{\substack{(x,y)\in\gamma \\ y\in\beta(K)}} (y-x))$$

On a donc l'égalité $EM_T = EM_0$, qui s'écrit

$$E[G(\beta(Z)) + [\alpha(Z) - \beta(Z)]\,g(\beta(Z))] = 0$$

On remarque alors que $G \circ \beta(x) = \int_{-\infty}^{x} \Phi(v)\,d\beta(v)$ et que, si S_β désigne le support de $d\beta$, $g\circ\beta(x) = \Phi(\ell(x))$ où $\ell(x) = \sup\{s\,;\, s<x \quad s\in S_\beta\}$, de sorte que l'égalité précédente peut s'écrire $\int_{\mathbb{R}} \nu(dz)\int_{-\infty}^{z} \Phi(v)\, d\beta(v) + \int_{\mathbb{R}} \nu(dz)(\alpha(z) - \beta(z))\Phi(\ell(z)) = 0$, si ν désigne la loi de Z. Mais un instant d'attention montre que ν est porté par S_β ; on a donc, en posant $\bar{\nu}(z) = \nu[z,\infty[$

$$\int_{\mathbb{R}} \Phi(v)\ \bar{\nu}(v)\ d\beta(v) = \int_{\mathbb{R}} \nu(dz)(\beta(z)-\alpha(z))\ \Phi(z).$$

La fonction $\bar{\nu}$ vérifie donc "l'équation différentielle" $\bar{\nu}(x)\ d\beta(x) = -\ d\bar{\nu}(x)(\beta(x)-\alpha(x))$, qui se résoud comme précédemment par l'égalité

$$(5) \qquad \bar{\nu}(x) = \exp\Big(-\int_{-\infty}^{x} \frac{d\beta(u)}{\beta(u)-\alpha(u)}\Big)$$

Il est alors facile d'obtenir l'expression de la loi m de X_T. On a en effet

$$\bar{m}(x) = m[x,\infty[= P[\alpha(Z)\geqslant x] = P[Z\geqslant\alpha'(x)] = \exp\Big[-\int_{-\infty}^{\alpha'(x)} \frac{d\beta(u)}{\beta(u)-\alpha(u)}\Big]$$

On remarque maintenant

- que $\Psi = \beta\circ\alpha'$ et que l'image de $d\beta$ par α est $d\Psi$
- que, si S_α désigne le support de $d\alpha$, l'image de $d\beta/_{S_\alpha}$ par α est $d\Psi^c$.

On peut alors écrire, si $S_\alpha^c = \sum_n\,]a_n, b_n[$ et $\alpha(a_n) = x_n$

$$\int_{-\infty}^{\alpha'(x)} \frac{d\beta(u)}{\beta(u)-\alpha(u)} = \int_{(-\infty,\alpha'(x))\cap S_\alpha} \frac{d\beta(u)}{\beta(u)-\alpha(u)} + \int_{(-\infty,\alpha'(x))\cap S_\alpha^c} \frac{d\beta(u)}{\beta(u)-\alpha(u)}$$

$$= \int_{-\infty}^{x} \frac{d\Psi^c(u)}{\Psi(u)-u} + \sum_{b_n<\alpha'(x)} \int_{a_n}^{b_n} \frac{d\beta(u)}{\beta(u)-x_n}$$

$$= \int_{-\infty}^{x} \frac{d\Psi^c(u)}{\Psi(u)-u} + \sum_{u<x} \operatorname{Log} \frac{\Psi(u_+)-u}{\Psi(u)-u}$$

On a donc $\bar{m}(x) = \exp\Big[-\int_{-\infty}^{x} \frac{d\Psi^c(u)}{\Psi(u)-u}\Big] \prod_{u<x} \frac{\Psi(u)-u}{\Psi(u_+)-u}$ C.Q.F.D.

Il nous reste à montrer que $E[\langle X, X\rangle_T] = \int_{\mathbb{R}} x^2\ d\mu(x)$.

Supposons tout d'abord μ à support compact ; le processus $|X_{t\wedge T}|$ est alors borné.

Considérons la martingale locale $Z_t = X_t^2 - <X\,,X>_t$ et une suite $(T_p)_{p\geq 1}$ de temps d'arrêt réduisant (Z_t) ; on peut écrire $E[X^2_{T\wedge T_p}] = E[<X\,,X>_{T\wedge T_p}]$; si p tend vers l'infini, on a alors en appliquant le théorème de Lebesgue :

(6) $\quad E[X_T^2] = E[<X\,,X>_T] = \int_{\mathbb{R}} x^2\, d\mu(x).$

Supposons maintenant μ quelconque, et introduisons les fonctions $(\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies de la manière suivante

$$\begin{array}{lll} \Psi_n(x) = 0 & \text{si} & x \leqslant -n \\ \Psi_n(x) = \Psi_\mu(x) & \text{si} & -n < x \leqslant n \\ \Psi_n(x) = \Psi_\mu(n) & \text{si} & n < x \leqslant \Psi_\mu(n) \\ \Psi_n(x) = x & \text{si} & x > \Psi_\mu(n) \end{array}$$

A l'aide de la proposition 3.2. on peut associer à Ψ_n une probabilité μ_n à support compact. On considère d'autre part le temps d'arrêt $T_n = \inf\{t\,;\,S_t \geqslant \Psi_n(X_t)\}$; la suite T_n tend en croissant vers T et X_{T_n} a pour loi μ_n. En vertu de la formule (6), on peut écrire $E[<X\,,X>_{T_n}] = \int_{\mathbb{R}} x^2\, d\mu_n(x)$, si bien que l'on est ramené à montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} x^2\, d\mu_n(x) = \int x^2\, d\mu(x)$. Mais d'après la définition de $\bar{\mu}_n$, on voit immédiatement que l'on a

$$\bar{\mu}_n(x) = \frac{\bar{\mu}(x)}{\bar{\mu}(-n)} \times \frac{n}{\Psi(-n)+n} \qquad \text{si} \quad -n < x \leqslant n$$

de sorte que l'on peut écrire, compte tenu de la formule (4)

$$\begin{aligned} \int x^2\, d\mu_n(x) &= n\,\Psi(-n) + \int_{]-n,n]} \bar{\mu}_n(x)\,[\Psi(x)-x]\, d\Psi(x) \\ &= n\,\Psi(-n) + \frac{n}{\bar{\mu}(-n)\,[\Psi(-n)+n]} \int_{]-n,n]} \bar{\mu}(x)\,[\Psi(x)-x]\, d\Psi(x) \end{aligned}$$

Le deuxième terme de cette somme tend vers $\int_{\mathbb{R}} x^2\, d\mu(x)$ en vertu de (4).

Il reste donc à montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} n\Psi(-n) = 0$, ce qui est une conséquence des majorations suivantes :

$$|n \int_{-n}^{\infty} t\, d\mu(t)| = |n \int_{-\infty}^{-n} t\, d\mu(t)| \leqslant n\, E[|X_T| \,;\, |X_T| \geqslant n] \leqslant \| |X_T|\, 1_{\{|X_T| \geqslant n\}} \|_2^2$$

de sorte que $\lim_n n\, \Psi(-n) = \lim_n n\, \bar{\mu}(-n)\, \Psi(-n) = 0$.

3.5. Remarque sur l'unicité Un peu plus de soin dans la rédaction des résultats 3.2. et 3.4. aurait permis de montrer le résultat d'unicité suivant

Proposition Soit μ une probabilité sur $\mathbb{R}$ admettant un moment d'ordre 1 et g une fonction réelle vérifiant les conditions (2) ; on pose $T = \inf\{t \,;\, S_t \geqslant g(X_t)\}$ et on suppose que X_T a pour loi μ. On a alors $g(x) = -\frac{1}{\bar{\mu}(x)} \int_{-\infty}^{x} t\, d\mu(t)$; en particulier si μ est centrée, $g = \Psi_\mu$.

Démonstration. Reprenant la démonstration du théorème 3.4., on voit que l'on a nécessairement $\bar{\mu}(x) = \exp\left(-\int_{-\infty}^{x} \frac{dg^c(s)}{g(s)-s}\right) \prod_{s<x} \frac{g(s)-s}{g(s_+)-s}$.

On se reporte maintenant à la démonstration de 3.2. ; l'égalité précédente entraîne $d[g\bar{\mu}] = x\, d\bar{\mu}(x)$, ce qui, compte tenu de la condition initiale : $\lim_{x \to -\infty} g(x)\, \bar{\mu}(x) = 0$, montre que $g(x) = -\frac{1}{\bar{\mu}(x)} \int_{]-\infty,x[} t\, d\mu(t)$.

Faisons une dernière remarque : l'égalité (5) permet d'obtenir, non seulement la loi de (X_T) mais aussi celle de S_T.

Reprenons les notations du théorème 3.4. et appelons Φ la fonction définie de $\mathbb{R}_+ - \{0\}$ dans $\mathbb{R}$ par $\Phi_\mu(x) = \inf\{y \,;\, \Psi_\mu(y) \geqslant x\}$; on a le résultat suivant

3.6. Proposition (7) $P[S_T \geqslant x] = \exp\left(-\int_0^x \frac{ds}{s - \Phi_\mu(s)}\right)$.

En particulier, si $\Phi_\mu(x) = x - a$, on retrouve un résultat bien connu : S_T a une loi exponentielle.

4. Le cas des diffusions sur $\mathbb{R}$

a/ Le problème de Skorokhod

Supposons maintenant que (X_t) soit un processus à valeurs réelles, fortement markovien, homogène, nul à l'origine et continu. On suppose toujours (X_t) récurrent ; on sait alors qu'il existe une fonction u strictement croissante et continue, unique à une affinité près, telle que $X'_t = u(X_t)$ soit une martingale locale. Puisque (X_t) est récurrent, on a $\lim_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} u(x) = -\infty$; on choisira u de façon que $u(0) = 0$.

Donnons nous alors une probabilité μ sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\int_{\mathbb{R}} u(s)\,\mu(ds) = 0 \quad ; \qquad \int_{\mathbb{R}} [u(s)]^2\,\mu(ds) < +\infty ,$$

et définissons les fonctions h et θ de la manière quivante

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mu[x,\infty[} \displaystyle\int_{[x,\infty[} u(t)\,d\mu(t) & \text{si } \mu[x,\infty[> 0 \\ u(x) & \text{si } \mu[x,\infty[= 0 \end{cases}$$

$\theta = u^{-1} \circ h$. On a le résultat suivant

4.1. Proposition Posons $T = \inf\{t\,; S_t \geqslant \theta(X_t)\}$; X_T a pour loi μ et $E[<X', X'>_T] = \int_{\mathbb{R}} [u(s)]^2\,d\mu(s)$.

Démonstration : Désignons par μ' l'image de μ par u, et posons $S'_t = \sup_{s\leqslant t} X'_s = u(S_t)$. On remarque alors que $\theta = u^{-1} \circ \Psi_{\mu'} \circ u$ de sorte que l'on a $T = \inf\{t\,; S'_t \geqslant \Psi_{\mu'}(X'_t)\}$. On applique alors le théorème 3.4. à la martingale locale (X'_t) et à la mesure μ' : il en résulte que X'_T a pour loi μ' ; X_T a donc pour loi μ, C.Q.F.D..

b/ Le problème de Lehoczky [7].

Nous terminerons ce paragraphe en donnant explicitement les formules résolvant le problème inverse : étant donnée une fonction θ satisfaisant aux conditions (2), et $T = \inf\{t\,; S_t \geqslant \theta(X_t)\}$, quelles sont les lois de X_T et de S_T ? Dans la proposition suivante nous avons appelé $\sigma(x) = \inf\{y\,; \theta(y) \geqslant x\}$. Les données de θ ou de σ sont équivalentes, et l'on a

4.2. Proposition

(8) $$P[X_T \geqslant x] = \exp\Big[-\int_{-\infty}^{x} \frac{d(u\circ\theta)^c(s)}{(u\circ\theta)(s)-u(s)}\Big] \times \prod_{s<x} \frac{(u\circ\theta)(s)-u(s)}{(u\circ\theta)(s_+)-u(s)}$$

(9) $$P[S_T \geqslant x] = \exp\Big[-\int_0^x \frac{du(s)}{u(s)-(u\circ\sigma)(s)}\Big]$$

Démonstration On se ramène au cas des martingales locales en remarquant que $T = \inf\{t\,;\,S'_t \geqslant u\circ\theta(X_t)\} = \inf\{t\,;\,S'_t \geqslant u\circ\theta\circ u^{-1}(X'_t)\}$. Posons $\Psi = u\circ\theta\circ u^{-1}$; on peut écrire $P[X_T \geqslant x] = P[X'_T \geqslant u(x)] = \exp\big(-\int_{-\infty}^{u(x)} \frac{d\Psi^c(s)}{\Psi(s)-s}\big) \prod_{s<u(x)} \frac{\Psi(s)-s}{\Psi(s_+)-s}$.

On fait ensuite le changement de variable $s = u(t)$ et l'on remarque que $\Psi\circ u = u\circ\theta$; on obtient alors la formule (8). Pour obtenir la formule (9), on pose $\Phi(x) = \inf\{y\,;\,\Psi(y) \geqslant x\}$ de sorte que $\Phi = u\circ\sigma\circ u^{-1}$; on écrit ensuite

$$P[S_T \geqslant x] = P[S'_T \geqslant u(x)] = \exp\Big(-\int_0^{u(x)} \frac{ds}{s-\Phi(s)}\Big)$$ en vertu de (7). On a donc

$$P[S_T \geqslant x] = \exp\Big(-\int_0^x \frac{du(s)}{u(s)-\Phi\circ u(s)}\Big),$$ d'où la formule (9), puisque $\Phi\circ u = u\circ\sigma$.

Remarque : Supposons que la diffusion (X_t) admette pour générateur infinitésimal un opérateur différentiel L de la forme

$$L f(x) = \frac{1}{2}\,[a(x)]^2\, f''(x) + b(x)\, f'(x)$$

avec des hypothèses sur les coefficients a et b assurant la récurrence de la diffusion. Il est alors facile d'obtenir u, puisque

$$u'(x) = \exp\Big(-\int_0^x 2\,\frac{b(y)}{[a(y)]^2}\,dy\Big)$$

En remplaçant u par sa valeur dans la formule (9), on obtient la loi de S_T

en fonction des coefficients de la diffusion. On retrouve alors une formule découverte par Lehoczky[7] en utilisant d'autres méthodes, et qui est pour une part, à l'origine de ce travail. En fait, Lehoczky ne s'est pas arrêté là ; généralisant une formule donnée par Taylor [12] dans le cas du mouvement brownien, il s'est intéressé au cas où $\sigma(x) = x - a$ et il a donné dans ce cas, non seulement la loi de S_T, mais celle du couple (S_T, T).

C'est en nous inspirant de ces travaux que nous allons donner maintenant la loi du couple (S_T, T) dans le cas du mouvement brownien.

5. La loi du couple (S_T, T) Nous supposons dans ce paragraphe que (X_t) est un mouvement brownien. Rappelons (cf.2.2.) la définition du processus

$$Z_t^{p,q} = [q \operatorname{ch} q(S_t - X_t) + p \operatorname{sh} q(S_t - X_t)] \exp\{-p S_t - \frac{q^2}{2} t\}$$

Quels que soient les réels p, q, $(Z_t^{p,q})$ est une martingale locale ; ce résultat a été obtenu par Kennedy [4] en utilisant d'autres méthodes. Revenons aux notations du § 3, où la donnée est une mesure μ sur $\mathbb{R}$, centrée, admettant un moment d'ordre 2, et soit T le temps d'arrêt associé à μ.

Rappelons que l'on a posé $\Phi_\mu(x) = \inf\{y ; \Psi_\mu(y) \geqslant x\}$; dans l'énoncé qui suit on posera $\varphi(x) = x - \Phi_\mu(x)$ et $a = \inf\{x ; \mu([x,\infty[) = 0\}$; on a le résultat suivant

5.1. Théorème On a, quels que soient p et q positifs

$$(10) \quad E[\exp(-p S_T - \frac{q^2}{2} T)] =$$

$$q \int_0^a \frac{dx}{\operatorname{sh} q\varphi(x)} \exp(-\int_0^x (q \coth q\varphi(s) + p)\, ds) + \exp(-\int_0^a (q \coth q\varphi(s) + p)\, ds)$$

En particulier

$$(11) \quad E[\exp(-\frac{q^2}{2} T)] = q \int_0^a \frac{dx}{\operatorname{sh} q\varphi(x)} \exp(-\int_0^x q \coth q\varphi(s)\, ds) + \exp(-\int_0^a q \coth q\varphi(s)\, ds)$$

On dispose donc, au moins en principe, de la loi de T.

Démonstration

a/ On suppose tout d'abord μ à support compact. Le processus $(S_{t\wedge T} - X_{t\wedge T})_t$ est alors borné, de sorte que $(Z^{p,q}_{t\wedge T})$ est une martingale bornée ; on a donc, en reprenant les notations de la démonstration du théorème 3.4. :

$$q = E\left[(q \operatorname{ch} q(S_T - X_T) + p \operatorname{sh} q(S_T - X_T)) \exp(-p S_T - \frac{q^2}{2} T)\right], \text{ ou encore}$$

$$(12) \quad q = E\left[(\operatorname{ch} q(\beta(Z) - \alpha(Z)) + p \operatorname{sh} q(\beta(Z) - \alpha(Z))) \exp(-p \beta(Z) - \frac{q^2}{2} T)\right]$$

Mais on dispose de la loi P_Z de Z ; on a en effet d'après (5)

$$(13) \quad P_Z(dx) = \frac{d\beta(x)}{\beta(x) - \alpha(x)} \bar{\nu}(x)\, 1_{]-\infty,b[}(x) + \varepsilon_b\, \bar{\nu}(b)$$

quand on a posé $b = \inf\{x ; \alpha(x) = \beta(x)\}$

Appelons alors F_q une fonction borélienne bornée telle que

$$F_q(Z) = E[e^{-\frac{q^2}{2} T} \mid Z]$$

D'après (12) et (13), F_q vérifie l'équation intégrale suivante, quelque soit p

$$(14) \quad q = \int_{-\infty}^{b} \frac{d\beta(x)}{\beta(x) - \alpha(x)} \bar{\nu}(x)(q \operatorname{ch} q(\beta(x) - \alpha(x)) + p \operatorname{sh} q(\beta(x) - \alpha(x))\ e^{-p\beta(x)} F_q(x)$$
$$+ q\, \bar{\nu}(b)\, e^{-p\beta(b)} F_q(b)$$

Nous allons en déduire F_q ; on va en effet montrer le lemme suivant

5.2. Lemme Posons

$$F^\circ_q(x) = \frac{q(\beta(x) - \alpha(x))}{\operatorname{sh} q(\beta(x) - \alpha(x))} \exp \int_{-\infty}^{x} d\beta(s) \left[\frac{1}{\beta(s) - \alpha(s)} - q \coth q(\beta(s) - \alpha(s))\right]$$

si $x < b$

et $$F^\circ_q(b) = \lim_{x \uparrow b} F^\circ_q(x) = \exp\left(\int_{-\infty}^{b} d\beta(s) \left[\frac{1}{\beta(s) - \alpha(s)} - q \coth q(\beta(s) - \alpha(s))\right]\right)$$

Alors F°_q est, à une P_Z équivalence près, la seule fonction vérifiant (14) quel que soit $p > 0$

(Rappelons que P_Z est portée par $(-\infty, b)$)

Démonstration du Lemme Soit F une solution de (14) ; on pose $F = F_q^\circ G$ et l'on cherche l'équation intégrale vérifiée par G ; après simplifications, on trouve que G vérifie :

$$(15) \quad -\int_{-\infty}^{b} G(x)\, d(e^{-p\beta}\, \gamma) + G(b)\, e^{-p\beta(b)}\, \gamma(b) = 1$$

où l'on a posé $\gamma(x) = \exp(-\int_{-\infty}^{x} q \coth q(\beta(s) - \alpha(s))\, d\beta(s))$

Il est clair alors que $G = 1$ est une solution de (15). Montrons que c'est la seule.

On remarque que $\gamma = g \circ \beta$, avec $g = \exp(-\int_{0}^{\cdot} q \coth q\, \varphi(s)\, ds)$, de sorte que (15) s'écrit encore

$$(16) \quad -\int_{0}^{a} G \circ \beta'(x)\, d(e^{-p\cdot}\, g) + G \circ \beta'(a)\, e^{-pa}\, g(a) = 1 \qquad (1)$$

Des arguments de densité et de classe monotone montrent alors que, si f est une fonction de classe C^1, à support compact contenu dans $]0,a[$, on a

$\int_{0}^{a} G \circ \beta'(x) (\frac{d}{dx} f(x))\, dx = 0$; il en résulte que $H = G \circ \beta'$ est égale

presque partout (pour la mesure de Lebesgue sur $[0,a[$) à une constante λ. Revenant à (16), on voit que

$$(17) \quad \lambda(1 - e^{-pa}\, g(a)) = 1 - H(a)\, e^{-pa}\, g(a)$$

Faisant tendre p vers l'infini, on constate que $\lambda = 1$; d'autre part si $P[S_T = a] > 0$, $g(a)$ est strictement positif et $H(a) = 1$. On vient donc de démontrer que $H = 1$ P_{S_T} p.s . Après avoir remarqué que l'image de P_{S_T} par β' est égale à P_Z, on en déduit que $G = 1$ P_Z p.s, ce qui termine la démonstration du lemme.

Suite de la démonstration du théorème 5.1. On a, pour toute fonction borélienne positive f :

$$E[f(Z)\, e^{-\frac{q^2}{2} T}] = \int_{-\infty}^{b-} f(x)\, F_q^\circ(x)\, P_Z(dx) + F_q^\circ(b)\, \bar{\nu}(b)\, f(b),$$

(1) attention : β' n'est pas la dérivée de β !

ce qui s'écrit encore, compte tenu de (13) :

$$(18)\quad E\left[f(Z)\, e^{-\frac{q^2}{2}T}\right] = q\int_{-\infty}^{b} \frac{d\beta(x)\ f(x)}{\mathrm{sh}q(\beta(x)-\alpha(x))}\ \exp\left(-\int_{-\infty}^{x} d\beta(s)\, q\coth q(\beta(s)-\alpha(s))\right)$$

$$+\ f(b)\exp -\int_{-\infty}^{b} d\beta(s)\, q\coth q(\beta(s)-\alpha(s))$$

(Noter que l'intervalle d'intégration est compact, compte-tenu des hypothèses faites sur μ) : en particulier, pour $f = e^{-p\beta}$, on obtient :

$$(19)\quad E\left[e^{-pS_T-\frac{q^2}{2}T}\right] = q\int_{-\infty}^{b} \frac{d\beta(x)}{\mathrm{sh}q(\beta(x)-\alpha(x))}\ \exp -\int_{-\infty}^{x} \left[q\coth q(\beta(s)-\alpha(s))+p\right] d\beta(s)$$

$$+\ \exp -\int_{-\infty}^{b} d\beta(s)\ \left[q\coth(\beta(s)-\alpha(s))+p\right]$$

d'où le résultat, par changement de variable.

b/ Supposons maintenant μ quelconque. Reprenons les fonctions Ψ_n introduites dans la démonstration du théorème 3.4., et associées à des mesures μ_n à support compact ; considérons également la suite de temps d'arrêt $(T_n) = (T_{\mu_n})$. On peut écrire

$$(20)\quad E\left[\exp\left(-pS_{T_n} - \frac{q^2}{2}T_n\right)\right] = q\int_0^{a_n} \frac{dx}{\mathrm{sh}\, q\varphi_n(x)}\ \exp -\int_0^{x} (q\coth q\,\varphi_n(s)+p)\ ds$$

$$+\ \exp -\int_0^{a_n} (q\coth q\,\varphi_n(s)+p)\, ds$$

Sous cette forme il est malaisé de passer à la limite dans le membre de droite ; nous allons transformer cette égalité de la manière suivante : si f est de classe C^1 à support compact, on peut écrire

$$E\left[f(S_{T_n})\, e^{-\frac{q^2}{2}T_n}\right] = q\int_0^{a_n} \frac{f(x)dx}{\mathrm{sh}q\varphi_n(x)}\ \exp\left(-\int_0^{x} q\coth q\,\varphi_n(s)\ ds\right)$$

$$+\ f(a_n)\ \exp\left(-\int_0^{a_n} q\coth q\,\varphi_n(s)\, ds\right)$$

Appliquons cette relation à la fonction $f = g \operatorname{ch} q \varphi_n$ où g est de classe C^1 à support compact ; il vient après une intégration par parties :

$$(21) \quad E[g(S_{T_n}) \operatorname{ch} q\varphi_n(S_{T_n}) e^{-\frac{q^2}{2} T_n}] = g(0) \int_0^{a_n} \exp(-\int_0^x q \coth q\varphi_n(s)) \frac{dg}{dx}(x)\, dx$$

Inversement si (21) est vérifiée pour toute g de classe C^1 à support compact, alors (20) est vérifiée. Nous pouvons maintenant faire tendre n vers l'infini. Il n'y a plus aucun problème de convergence à droite, en vertu du théorème de convergence monotone ; examinons le membre de gauche : pour tout ω, il existe un entier $N(\omega)$ tel que $T_n(\omega) = T(\omega)$ quelque soit $n \geqslant N(\omega)$; il est clair alors que $\varphi_n(S_{T_n}) \longrightarrow \varphi(S_T)$ presque sûrement. D'autre part $g \operatorname{ch} q \varphi_n$ est majorée par $g \operatorname{ch} q \varphi$, qui est bornée puisque g est à support compact. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée au membre de gauche et écrire

$$E[g(S_T) \operatorname{ch} q\varphi(S_T) e^{-\frac{q^2}{2} T}] = g(0) + \int_0^a \exp(-\int_0^x q \coth q\,\varphi(s)\, ds)(\frac{dg}{dx})(x)\, dx,$$

égalité équivalente à (10).

Remarque : On peut en principe déduire de la formule (18) la loi du couple (X_T, T). Les formules sont compliquées et il ne vaut sans doute pas la peine de faire une théorie générale. Supposons que μ possède tous les moments exponentiels ; si l'on pose $h(x) = \exp(-\int_{-\infty}^x d\Psi^c(s)\, q \coth q(\Psi(s) - s)) \prod_{s<x} \frac{\operatorname{sh} q(\Psi(s) - s)}{\operatorname{sh} q(\Psi_+(s) - s)} e^{-px}$,

on a

$$(22) \quad E[e^{-pX_T - \frac{q^2}{2} T}] = q \int_{-\infty}^a \frac{d\Psi^c(x)}{\operatorname{sh} q(\Psi(x) - x))} h(x) + \sum_x \frac{\operatorname{sh} q\, \Delta\Psi(x)}{\operatorname{sh} q(\Psi_+(x) - x)} h(x) + h(a)$$

Cette formule se simplifie dans le cas où μ ne charge aucun point (ce qui entraine la continuité de Ψ). Dans ce cas on peut écrire

$$(23) \quad E[e^{-pX_T - \frac{q^2}{2} T}] = q \int_{-\infty}^a \frac{d\Psi(x)}{\operatorname{sh} q(\Psi(x) - x)} \exp(-\int_{-\infty}^x d\Psi(s)\, q \coth q(\Psi(s) - s))\, e^{-px}$$

$$+ e^{-pa} \exp - \int_{-\infty}^a d\Psi(s)\, q \coth q(\Psi(s) - s)$$

5.2. Exemples

a/ Supposons μ portée par deux points a et b avec $a > 0$ et $b < 0$. Il est clair alors que T est le temps de sortie de l'intervalle $[b,a]$. On peut appliquer les formules (11) et (7) et l'on retrouve des lois bien connues.

On a $\varphi(x) = x - b$ sur l'intervalle $]0,a]$; on obtient donc

$$(24) \quad E[e^{-\frac{q^2}{2}T}] = \frac{\operatorname{sh} q a - \operatorname{sh} q b}{\operatorname{sh} q(a-b)}$$

$$(25) \quad P_{S_T}(dx) = \frac{-b}{(x-b)^2} 1_{[0,a[}(x)\, dx - \frac{b}{a-b} \varepsilon_a$$

b/ μ est la loi uniforme sur $[-a , +a]$; $\varphi(x) = a - x$ sur $]0,a]$ et l'on obtient

$$(26) \quad E[e^{-\frac{q^2}{2}T}] = \frac{q a}{\operatorname{sh} q a} \qquad P_{S_T}(dx) = \frac{dx}{a} 1_{[0,a]}(x)$$

c/ $\mu(dx) = \frac{1}{a} e^{-(\frac{x}{a}+1)} 1_{[-a,\infty[}(x)\, dx \qquad (a > 0)$

$\varphi(x) = a$ et $P_{S_T}(dx) = \frac{1}{a} e^{-\frac{x}{a}} 1_{[0,\infty[}(x)\, dx$

$$(27) \quad E[e^{-\frac{q^2}{2}T}] = \frac{1}{\operatorname{ch} q a}$$ (Ce résultat est dû à H.M. Taylor)

On remarquera que, lorsque l'on prend $-b = a$, (24) est identique à (27) ; ce n'est pas une simple coïncidence : Dans l'exemple a/, T est le temps $\{\inf t ; |X_t| = a\}$ et dans l'exemple b/ $T = \inf\{t ; S_t - X_t = a\}$. Mais, un résultat bien connu de Paul Lévy affirme que le processus $(S_t - X_t)$ est équivalent en loi à $|X_t|$ (voir, à ce sujet, l'appendice) ; il n'est donc pas étonnant que ces deux temps d'arrêt aient même loi. Cela appelle une autre remarque ; la loi de X_T, nous l'avons vu, détermine Ψ (il serait facile à l'aide de (7) de montrer que Ψ est également déterminée par la loi de S_T) ; en revanche, Ψ n'est pas déterminée par la loi de T : deux fonctions Ψ distinctes peuvent donner lieu à la même loi pour T.

6. Les théorèmes de Ray sur le temps local

Nous supposons que $[(X_t),(P_x)_{x\in\mathbb{R}}]$ est le mouvement brownien canonique ; rappelons que l'on note $(L_t^a)_t$ le processus croissant associé à la sous-martingale $|X_t - a|$ et qu'on l'appelle "temps local en a" du mouvement brownien.

Pour tout a, c'est une fonctionnelle additive ; on écrira simplement (L_t) si $a=0$. Appelons S_b le temps d'arrêt $S_b = \inf\{t>0 \,;\, X_t = b\}$ et considérons le processus $(L_{S_b})_{b\geqslant 0}$; il est facile de voir que c'est un processus à accroissements indépendants inhomogène : on a en effet

$$E[e^{-\alpha(L_{S_{a+b}} - L_{S_a})} \mid \underline{\underline{F}}_{S_a}] = E_0[e^{-\alpha(L_{S_b}\circ\theta_{S_a})} \mid \underline{\underline{F}}_{S_a}] = E_a\, e^{-\alpha L_{S_b}}.$$

Pour caractériser complètement la loi de ce processus, il suffit donc de calculer $E_a\, e^{-\alpha L_{S_b}}$, ce que permet de faire rapidement une famille de martingales analogues à celles figurant au corollaire 2.2. : à l'aide de la formule d'Ito, on montre immédiatement que, pour toute $f\in C^1(\mathbb{R})$, le processus

$$(28)\quad \frac{1}{2}\, f(L_t^a) - (X_t - a)^+\, f'(L_t^a)$$

est une martingale locale continue.

On prend alors pour fonction f une exponentielle et on applique le théorème d'arrêt au temps S_b ; il vient

$$(29)\quad \text{pour } \alpha\geqslant 0,\ E_a[e^{-\alpha L_{S_b}}] = \frac{1+2\alpha a^+}{1+2\alpha b}$$

En fait, le résultat le plus frappant de Ray et Knight (voir respectivement [9] et [5], ainsi que l'article de Williams [14]) est relatif à la dépendance en a du temps local (L_t^a) : il est montré que le processus $(\omega,a) \to L_{S_1}^{1-a}(\omega)$ est un processus de Markov. Pour établir le résultat de Ray-Knight, nous aurons besoin d'une généralisation de (28) pour des fonctions f de plusieurs variables. On a le résultat suivant, qui est valable si (X_t) est une martingale locale continue.

6.1. <u>Proposition</u> <u>Soient</u> $a_1, a_2, \ldots, a_n$ <u>n nombres réels tels que</u> $a_1 < a_2 \cdots < a_n$ <u>et</u> $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ <u>une fonction de classe</u> C^∞ <u>; on note</u> $f(L_t^a) = f(L_t^{a_1}, L_t^{a_2}, \ldots, L_t^{a_n})$. <u>Alors, le processus défini par</u>

$$(30)\quad f(L_t^a) + \sum_{d=1}^{n} (-2)^d \sum_{i_1<i_2<\dots<i_d\leq n} (a_{i_2} - a_{i_1}) \;\dots\dots\; (a_{i_d} - a_{i_{d-1}})(X_t - a_{i_d})^+ f^{(d)}_{i_1,i_2,\dots i_d}(L_t^a)$$

est une martingale locale.

Démonstration Si deux processus (U_t) et (V_t) diffèrent d'une martingale locale, on notera $U \equiv V$; par exemple $(L_t^{a_i}) \equiv 2(X_t - a_i)^+$.

On écrit alors

$$f(L_t^a) = f(0) + \sum_i \int_0^t f_i'(L_s^a)\, dL_s^{a_i}$$

$$\equiv f(0) + 2 \sum_i \int_0^t f_i'(L_s^a)\, d(X_s - a_i)^+,$$

ce qui se transforme par une intégration par parties en :

$$f(L_t^a) \equiv f(0) + 2 \sum_i f_i'(L_t^a)(X_t - a_i)^+ - 2 \sum_{i,j} \int_0^t (X_s - a_i)^+ f_{ij}''(L_s^a)\, dL_s^{a_j}$$

Puis, on recommence : dans le dernier terme, on remplace $(dL_s^{a_j})$ par $d(X_s - a_j)^+$, puis on intègre par parties. En itérant le procédé n fois, on trouve (30).

On en déduit sans difficulté la loi du processus $(L_{S_1}^a)_{a\in\mathbb{R}}$

(Dans ce qui suit, on a posé $S = S_1 = \inf\{t>0 ; X_t = 1\}$)

6.2. Théorème On pose $a = (a_1, a_2, \dots a_n)$, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_n)$ avec $a_1 \leq a_2 \dots\dots \leq a_n \leq 1$ et $\gamma_i \in \mathbb{R}_+$ $\forall i \in \{1, 2, \dots\dots n\}$.

Définissons la fonction $\Phi_a(x,\gamma)$ par

$$\Phi_a(x,\gamma) = 1 + \sum_{d=1}^{n} 2^d \sum_{i_1<i_2<\dots<i_d\leq n} (a_{i_2} - a_{i_1}) \dots\dots (a_{i_d} - a_{i_{d-1}})(x - a_{i_d})^+ \gamma_{i_1}\gamma_{i_2}\dots\gamma_{i_d}$$

Alors $\displaystyle E\left[\exp\left(-\sum_{i=1}^{n} \gamma_i L_S^{a_i}\right)\right] = \frac{\Phi_a(0,\gamma)}{\Phi_a(1,\gamma)}$

Démonstration : il suffit d'appliquer le théorème d'arrêt à la martingale locale (30) au temps S.

6.3. Corollaires Soient $(r_2(t))_{t \geq 0}$ et $(r_4(t))_{t \geq 0}$ un processus de Bessel d'ordre 2 et un processus de Bessel d'ordre 4 indépendants de (X_t) ; notons $Y = \inf\limits_{t \leq S} X_t$; alors

α/ Le processus $(L_S^{1-a})_{0 \leq a \leq 1}$ a même loi que $(r_2(a))^2_{0 \leq a \leq 1}$

β/ Le processus $(L_S^a)_{a \leq 0}$ a même loi que $(1-a)^2(r_4\{(\frac{1}{1-a} - \frac{1}{1-Y})^+\})^2$

Ces interprétations sont classiques ; la démonstration se résume au calcul des transformées de Laplace des lois des processus indiqués, que nous ne détaillerons pas ici. Notons simplement que la loi de Y se déduit simplement de l'exemple 5.2.a : il suffit, dans cet exemple de prendre $b=-1$ et de faire tendre a vers l'infini dans la formule donnant la loi de S_T : on trouve ainsi la loi de (-Y) ; on a donc $P[Y \leq x] = \frac{1}{1-x}$ quelque soit $x \leq 0$.

Appendice (nous conservons les notations générales de l'article)

Notre but principal ici est de donner une démonstration du théorème suivant, dû à Paul Lévy ([8], théorème 49.1, page 218).

Théorème A.1. Si $X = (X_t, t \geq 0)$ désigne le mouvement brownien réel issu de 0, les processus $(Y = S - X\,, S)$ et $(|X|\,, L^\circ)$ ont même loi.

De plus, on a, pour tout t :

$$(31) \quad S_t = \lim_{(\varepsilon \to 0)} \text{p.s} \ \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^t 1_{(Y_s \leq \varepsilon)}\, ds.$$

Les démonstrations proposées ci-dessous sont simples, mais non originales : nous empruntons beaucoup aux articles [15] et [3], pour le § 1 et le § 2 respectivement. Toutefois, une présentation complète ici nous semble justifiée, vu l'importance du théorème A.1.

1. Comme l'a remarqué Ch. Yoeurp [15], on peut calculer aisément le temps local en 0 d'une semi-martingale (1) continue et positive.

Proposition A.2. Soient (M_t) une martingale locale continue, nulle en 0, et (A_t) un processus adapté, continu, à variation bornée.

Si $Y = M + A$ est un processus positif, le temps local de Y en 0 est égal à

$$2\int_0^{\cdot} 1_{(Y_s = 0)}\, dA_s.$$

Démonstration : Soit Λ le temps local en 0 de Y.

D'après la formule de Tanaka, on a :

$$Y_t^+ = Y_0^+ + \int_0^t 1_{(Y_s > 0)}\, dY_s + \frac{1}{2}\Lambda_t$$

$$= Y_0 + M_t + \int_0^t 1_{(Y_s > 0)}\, dA_s + \frac{1}{2}\Lambda_t,$$

car l'intégrale $\int_0^t 1_{(Y_s = 0)}\, dM_s$ est nulle.

D'autre part, on a : $Y^+ = Y = M + A$, et de la comparaison de ces deux écri-

(1) Pour la définition de ce temps local, on adopte la convention de P.A. Meyer qui consiste à prendre sgn(0)=-1 dans la formule de Tanaka généralisée.

tures de Y^+, on tire : $\Lambda_t = 2 \int_0^t 1_{(Y_s = 0)}\, dA_s$.

<u>Corollaire A.3.</u> <u>Si</u> $X = (X_t)$ <u>est une martingale locale continue nulle en 0, le temps local en 0 de</u> $Y = S - X$ <u>est égal à 2S</u>

<u>Démonstration</u> : On applique la proposition précédente, en remarquant que dS_s est portée par $\{s \mid Y_s = 0\}$.

Lorsque X est le mouvement brownien réel issu de 0, la formule (31) résulte alors de l'existence d'une version continue à droite (cf. [16]) du processus des temps locaux $(\Lambda_t^a)_{a \in \mathbb{R}}$ de Y, et de la formule de densité de temps d'occupation :

$$\forall\ h > 0, \qquad \int_0^t 1_{(Y_s \leqslant h)}\, ds = \int_0^h \Lambda_t^a\, da.$$

2. En [3], N. El Karoui et M. Maurel ont dégagé en toute généralité, le

<u>Lemme A.4.</u> : <u>Soit</u> $(z(t), t \geqslant 0)$ <u>une fonction réelle continue, nulle en 0. Il existe un seul couple de fonctions continues</u> $(y(t), \ell(t))$ <u>telles que</u> :

$$(R) \qquad \begin{cases} 1) & y(t) = z(t) + \ell(t)) \\ 2) & y(0) = 0 \\ 3) & \ell \text{ est une fonction croissante, et } d\ell_s \text{ est portée par} \\ & \{s / y(s) = 0\} \end{cases}$$

<u>L'unique solution de (R) est donnée par</u> :

$$(32) \quad \ell(t) = \sup_{s \leqslant t} z(s)^- \quad \text{et} \quad y(t) = z(t) + \ell(t).$$

Appliquons ce lemme à la démonstration du théorème A.1. :

Les couples $(S - X, S)$ et $(|X|, L^\circ)$ sont respectivement solutions des problèmes de réflexion (R) associés à :

$$z_1(t) = -X_t$$

$$\text{et } z_2(t) = \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s)\, dX_s \qquad \text{(d'après la formule de Tanaka).}$$

Or, z_1 et z_2 sont deux mouvements browniens réels, et ont donc même loi, ce qui entraîne l'équivalence en loi de $(S - X, S)$ et $(|X|, L^\circ)$, d'après (32).

Le théorème est maintenant complètement démontré.

Voici un exemple d'application de ce théorème :

Corollaire A.5. : Soit X le mouvement brownien réel issu de 0, et $a>0$.

Notons $T_a = \inf\{t \,/\, S_t - X_t = a\}$, et $\tau_a = \inf\{t \,/\, |\bar{X}_t| = a\}$.

Alors, les couples (S_{T_a}, T_a) et (L_{τ_a}, τ_a) ont même loi.

Remarque : On peut également démontrer ce résultat en utilisant les deux familles de martingales $(Z^{p,q})$ et $(\tilde{Z}^{p,q})$ du corollaire 2.2.

Soulignons que le théorème A.1. est souvent utilisé pour traduire sur L° des résultats portant sur S, et inversement (pour de nombreux exemples de ceci, voir l'article récent de F. Knight [6]).

3. D'après le théorème A.1., Y a la loi de la valeur absolue du mouvement brownien réel. Toutefois, on a le résultat négatif suivant :

Proposition A.6. : Il n'existe pas de mouvement brownien réel B (pour sa propre filtration $\mathcal{B}_t = \sigma\{B_s, s \leq t\}$ convenablement complétée) tel que : $Y = |B|$ et $\mathcal{B}_\infty \subseteq \mathcal{X}_\infty$

[où $\mathcal{X}_\infty$ est la tribu P-complète engendrée par $(X_s, s \in \mathbb{R}_+)$].

Démonstration : S'il existait un tel mouvement brownien B, on aurait, d'après la formule de Tanaka $Y_t = \int_0^t \operatorname{sgn}(B_s)\, dB_s + \mathcal{L}_t$, où $\mathcal{L}$ désigne le temps local de $Y = |B|$ en 0. D'où, $\mathcal{L} = S$, d'après le corollaire A.3.. On a donc :

$$-X_t = \int_0^t \operatorname{sgn}(B_s)\, dB_s .$$

Ainsi, si $|\mathcal{B}|$ (resp : $\mathcal{X}$) désigne la filtration associée au processus $|B|$ (resp : X), on a : $|\mathcal{B}| = \mathcal{X}$,

car, d'après [17] (proposition 14), $|\mathcal{B}|$ est aussi la filtration engendrée par $\int_0^{\cdot} \operatorname{sgn}(B_s)\, dB_s$. L'hypothèse $\mathcal{B}_\infty \subset \mathcal{X}_\infty$ entraînerait alors : $\mathcal{B}_\infty = |\mathcal{B}|_\infty$, ce qui n'est pas, car pour tout t, B_t n'est pas $|\mathcal{B}|_\infty$-mesurable.

De la démonstration précédente, découle également la :

Proposition A.7. : Soit B un mouvement brownien réel.

Il n'existe pas de solution (sous-entendu : adaptée à la filtration de B) de l'équation $X_t = \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s)\, dB_s$.

Références :

[1]. CHACON, R., WALSH, J.B. One dimensional Potential Embedding. Sém. Probab. X, Lecture Notes in Math. 511, Springer (1976)

[2]. DUBINS, L. On a theorem of Skorokhod. Ann. Math. Statist. 39, 2094-2097 (1968)

[3]. KAROUI, N.EL., MAUREL, M. Un Problème de réflexion et ses applications au temps local et aux équations différentielles stochastiques sur $\mathbb{R}$. Cas continu. Astérisque, 52-53, 117-144 (1978)

[4]. KENNEDY, D. Some martingales related to cumulative sum tests and single-server queues, in : Stochastic processes and their applications 4, 261-269 (1976)

[5]. KNIGHT, F. Random walks and a sojourn density process of Brownian motion. Trans. Amer. Math. Soc. 109, 56-86 (1963)

[6]. KNIGHT, F. On the sojourn times of killed Brownian motion. Sém. Probab. XII, Lecture Notes in Math. 649, Springer (1978)

[7]. LEHOCZKY, J. Formulas for stopped diffusion processes, with stopping times based on the maximum. Ann. Probability, 5, 601-608 (1977)

[8]. LEVY, P. Processus stochastiques et mouvement brownien. Gauthier-Villars. Seconde édition. (1965)

[9]. RAY, D. Sojourn times of diffusion processes. Illinois J. Math. 7, 615-630 (1963)

[10]. ROOT, D.H. The existence of certain stopping times on Brownian motion. Ann. Math. Statist. vol. 40, n°2, 715-718 (1969)

[11]. SKOROKHOD, A. Studies in the theory of random processes. Addison-Wesley, Reading (1965)

[12]. TAYLOR, H.M. A stopped Brownian motion formula. Ann. Probability 3, 234-246 (1975)

[13]. WILLIAMS, D. On a stopped Brownian motion formula of H.M. Taylor. Sém. Probab. X, Lecture Notes in Math. 511, Springer (1976)

[14]. WILLIAMS, D. Markov properties of Brownian local times. Bull. Amer. Math. Soc. 75, 1035-1036 (1969)

[15]. YOEURP, Ch. Compléments sur les temps locaux et les quasi-martingales. Astérisque, 52-53, 197-218 (1978)

[16]. YOR, M. Sur la continuité des temps locaux associés à certaines semi-martingales. Astérisque, 52-53, 23-35 (1978)

[17]. YOR, M. Sur les théories du filtrage et de la prédiction. Sém. Probab. XI, Lecture Notes in Math. 581, Springer (1977)

[18]. AZEMA, J. Représentation multiplicative d'une surmartingale bornée. (A paraître au Z.W.)

[19]. AZEMA, J., YOR, M. En guise d'introduction (à un volume d'"Astérisque" sur les temps locaux). Astérisque, 52-53, 3-16 (1978)