SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

MARC YOR

Un exemple de J. Pitman

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 13 (1979), p. 624

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1979__13__624_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1977/78

UN EXEMPLE DE J. PITMAN

par M. Yor

Soit (X_t) un mouvement brownien issu de 0, et soit H l'ensemble de ses zéros. On peut se demander si <u>toutes</u> les martingales de la filtration naturelle de X qui sont nulles sur H sont de la forme $K_{\tau_t} X_t$, où K est un processus prévisible, et τ_t est le dernier zéro avant t (voir dans ce volume les articles sur le balayage). Lors de son passage à Paris en Juin 1978, Pitman nous a montré un exemple d'une intégrale stochastique $Y_t = \int_0^t h_s dX_s$, où h n'est pas constante sur les intervalles contigus à H, qui a les mêmes zéros que X. Voici cet exemple.

Nous posons $T = \inf\{t : X_t = 1\}$

$$U = \inf\{t > T : X_t = 1/2\}$$

$$D = \inf\{t > T : X_t = 0\}$$

de sorte que $T \leqq U \leqq D$. D'autre part

$$V = \inf\{t > T : X_t = 3/2\}$$

$$W = U \wedge V$$

Puis nous posons

$$h_s = 1_{]0,W]}(s) + 1_{\{W=U\}} 1_{]W,\infty[}(s) + 3.1_{\{W<U\}} 1_{]U,\infty[}(s)$$

Ce processus est prévisible. Si W=U, i.e. si $U \leqq V$, on a $h_\cdot(\omega)=1$ et la trajectoire de $Y = \int_0^\cdot h_s dX_s$ est égale à celle de X. Si W<U , i.e. si la trajectoire ω monte en 3/2 avant de redescendre en 1/2, la trajectoire de Y vaut X_t pour $0 \leqq t \leqq V = W$, $3/2$ pour $V \leqq t \leqq U$ $3X_t$ pour $t \geqq U$

Dans les deux cas, elle a les mêmes zéros que la trajectoire de X. Sur le dessin suivant, la trajectoire de X est en trait plein, celle de Y en pointillé :