Paul-André Meyer

Caractérisation des semimartingales, d'après Dellacherie

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 13 (1979), p. 620-623
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1979__13__620_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1977/78

CARACTERISATION DES SEMIMARTINGALES, D'APRES DELLACHERIE

par P.A. Meyer

Soit $(\Omega,\underline{\underline{F}},P, (\underline{\underline{F}}_t))$ un espace probabilisé filtré satisfaisant aux conditions habituelles. Nous désignons par $\underline{\underline{B}}$ l'espace des processus <u>prévisibles élémentaires</u> : un processus $(H_t)_{t>0}$ appartient à $\underline{\underline{B}}$ si et seulement s'il peut s'écrire

(1) $$H = H_0 I_{]0,t_1]} + H_1 I_{]t_1,t_2]} + \dots + H_{n-1} I_{]t_{n-1},t_n]}$$

avec $0=t_0<t_1\dots<t_n<+\infty$, les t_i étant des rationnels dyadiques, et H_i étant pour tout i une v.a. $\underline{\underline{F}}_{t_i}$-mesurable bornée.

Soit X un processus adapté, continu à droite et nul en 0. Etant donné $H\in\underline{\underline{B}}$, la variable aléatoire

(2) $$J(H) = H_0 X_{t_1} + H_1 (X_{t_2} - X_{t_1}) + \dots + H_{n-1}(X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$$

i.e. l'intégrale stochastique évidente $\int_0^\infty H_s dX_s$, ne dépend pas de la représentation (1) choisie pour H, et J définit évidemment une application linéaire de $\underline{\underline{B}}$ dans l'espace L^0 de toutes les v.a. p.s. finies sur Ω, muni de la topologie de la convergence en probabilité (L^0 est un e.v.t. métrisable complet, non localement convexe). Notre but est de démontrer le théorème suivant, dû à Dellacherie (avec l'aide de Mokobodzki pour une étape essentielle).

THEOREME 1. <u>Supposons que</u> J <u>possède la propriété suivante</u>

(a) <u>Pour toute suite</u> (H^n) <u>d'éléments de</u> $\underline{\underline{B}}$, <u>nuls hors d'un intervalle</u> $[0,N]$ <u>fixe de</u> $\mathbb{R}_+$, <u>et convergeant uniformément vers</u> 0, <u>on a</u> $\lim_n J(H^n)=0$ <u>dans</u> L^0.

<u>Alors</u> X <u>est une semimartingale</u>.

Avant de démontrer ce théorème, nous allons le commenter. Tout d'abord, il justifie a posteriori la définition des semimartingales, et suggère une nouvelle approche <<pédagogique >> de toute la théorie de l'intégrale stochastique. Dellacherie a fait un premier essai dans cette direction dans l'article qu'il a envoyé aux Actes du Congrès d'Helsinki.

Ensuite, ce théorème <u>caractérise</u> les semimartingales : on a en effet, dans l'autre sens, le résultat suivant :

(b) Pour toute suite (H^n) d'éléments de $\underline{\underline{B}}$, majorés en valeur absolue par une même constante, nuls hors d'un intervalle fixe $[0,N]$, et convergeant simplement vers 0, on a $\lim_n J(H^n)=0$ dans L^0.

On notera que (b) est une propriété du type de Daniell, tandis que (a) est plutôt du type de Riesz. Rappelons rapidement comment on établit (b) : cette propriété est invariante lorsqu'on remplace P par une loi équivalente Q . D'après un théorème de Stricker ([3]), on peut choisir Q de telle sorte que X soit, sur $[0,N]$, la somme d'une martingale de carré intégrable et d'un processus croissant intégrable, pour lesquels la propriété (b) est alors évidente.

Enfin, disons que le théorème 1 a été suggéré à Dellacherie par la lecture de l'article [1] de Métivier-Pellaumail, le premier sans doute à considérer l'« horrible » espace L^0 comme un objet digne d'intérêt dans la théorie de l'intégrale stochastique. La première version du théorème utilisait une propriété du type (b) ; c'est la discussion au séminaire qui a montré que (a) suffisait, et que la démonstration était même plus simple ! On trouvera cette démonstration ci-dessous. Un peu plus tard, G. Letta lui a apporté quelques simplifications importantes . Dellacherie devait rédiger cette démonstration « définitive » , mais cela n'a pas été fait, car elle figure en détails dans le Lecture Notes à paraître de Jacod « Calcul stochastique et problèmes de martingales ». Il nous a semblé à tous deux que la première démonstration possède quelque intérêt propre, et mérite d'être publiée[1].

DEMONSTRATION DU THEOREME 1.

1) Il nous suffit de montrer que, pour tout N fini, le processus arrêté X^N est une semimartingale. Sans changer de notation, nous remplaçons donc X par X^N. L'application J est alors continue de $\underline{\underline{B}}$, muni de la norme de la convergence uniforme, dans L^0. Nous désignons par B la boule unité de $\underline{\underline{B}}$, par A l'image J(B).

2) L'énoncé du théorème 1 est invariant par changement de loi dans la classe d'équivalence de P . Sans changer de notation, nous remplaçons donc P par une loi équivalente, telle que toutes les v.a. X_t (t dyadique) soient intégrables [la possibilité d'un tel choix est facile à établir ; voir par exemple [1]]. Nous avons alors $A\subset L^1$.

Nous prenons comme système fondamental de voisinages de 0 dans L^0 les ensembles

(3) $$V_\varepsilon = \{ f : \|f\|_0<\varepsilon \} \quad \text{où } \|f\|_0 = E[|f|\wedge 1]$$

1. Par exemple, afin de mieux faire connaître le lemme de Cartier.

3) Nous allons construire une loi Q, équivalente à P, majorée par un multiple de P (de sorte que $A\subset L^1(Q)$), et telle que

(4) $$\sup_{f\in A} \int fQ = \alpha < +\infty \quad \text{(prenant } f=0\text{, on voit que } \alpha\geqq 0 \text{)}$$

Cela suffira. En effet, prenons dans l'expression (1)

$$H_i = \text{signe de } E_Q[X_{t_{i+1}}-X_{t_i}|\underline{\underline{F}}_{t_i}]$$

et prenons $f=J(H)$. Alors

$$\int fQ = E_Q[\sum_i |E_Q[X_{t_{i+1}}-X_{t_i}|\underline{\underline{F}}_{t_i}]|] \leqq \alpha \text{ (indépendant de la subdivision } (t_i)\text{)}$$

et l'on voit que X est une <u>quasimartingale</u> pour la loi Q, donc une semimartingale pour Q, et finalement une semimartingale pour P [Plus précisément, le processus (X_t) pour t dyadique est une quasimartingale, et il faut un petit argument pour étendre cela aux t réels, grâce à la continuité à droite de X].

4) En fait, nous allons construire une version approchée de (4) : pour tout $\varepsilon>0$, une mesure $Q=Q_\varepsilon$, majorée par P, telle que $Q(\Omega)\geqq 1-\varepsilon$ et que

(5) $$\sup_{f\in A} \int fQ = \alpha_\varepsilon < +\infty$$

Nous en déduirons (4) en prenant $Q=\sum_n \lambda_n Q_{1/n}$, où les constantes $\lambda_n>0$ sont telles que $\sum \lambda_n Q_{1/n}$ soit une loi de probabilité (comme $Q_{1/n}(\Omega)> 1-1/n$, $\sum\lambda_n = \lambda < \infty$, et Q est majorée par λP) et que $\sum \lambda_n\alpha_{1/n} = \alpha<\infty$. Q est équivalente à P : en effet, écrivons $Q_{1/n}=g_n.P$, $Q=g.P$; la condition $Q_{1/n}(\Omega)\geqq 1-1/n$ entraîne $P\{g_n=0\}\leqq 1/n$ puisque $g_n\leqq 1$, et enfin $P\{g=0\}=0$. Enfin, on a pour $f\in A$, par convergence dominée relativement à P

$$\int fQ = \int fgP = \sum \lambda_n \int fg_nP \leqq \sum \lambda_n\alpha_{1/n} = \alpha$$

5) Nous fixons donc $\varepsilon>0$, et désignons par K l'ensemble des mesures positives Q, majorées par P et telles que $Q(\Omega)\geqq 1-\varepsilon$. Si nous considérons K comme une partie de L^∞ munie de la topologie faible $\sigma(L^\infty,L^1)$, K est <u>convexe et compacte</u>.

L'application J étant continue de $\underline{\underline{B}}$ dans L^0, il existe un voisinage de 0 dans $\underline{\underline{B}}$ dont l'image est contenue dans V_ε . Autrement dit, si $\alpha>0$ est assez grand, $\frac{1}{\alpha}A \subset V_{\varepsilon}$, soit

pour $f\in A$, on a $E[\frac{1}{\alpha}|f|\wedge 1] \leqq \varepsilon$, donc $P\{|f|>\alpha\} \leqq \varepsilon$

Prenons alors $Q_f = I_{\{|f|\leqq\alpha\}}P$. Nous avons $Q_f\in K$, et $\int fQ_f \leqq \alpha$. Identifions $f\in A$ à la fonction (affine) continue $Q\mapsto \int fQ$ sur K, et utilisons le <u>lemme de Cartier</u> que voici :

LEMME. *Soit* K *un espace compact, et soit* A *un ensemble convexe de fonctions continues sur* K. *Supposons que*

(6) *pour tout* $f \in A$ *il existe* $Q \in K$ *tel que* $f(Q) \leqq \alpha$

Alors il existe une loi de probabilité μ *sur* K *telle que*

pour tout $f \in A$, $\int f(Q)\mu(dQ) \leqq \alpha$.

La démonstration est donnée plus loin. Ici, K est convexe compact, et toute $f \in A$ est affine continue, donc si Q est la *résultante* de μ, on a $f(Q) \leqq \alpha$ pour tout $f \in A$, et le théorème 1 est établi.

DEMONSTRATION DU LEMME. Nous prenons $\alpha=1$. Soit $\varepsilon>0$. D'après (6), la fonction constante $1+\varepsilon$ n'appartient pas à l'adhérence de l'ensemble convexe $A-\underline{\underline{C}}^+(K)$. D'après le théorème de Hahn-Banach, il existe une mesure (signée) μ_ε sur K telle que

(7) $$\sup_{f \in A,\ g \in \underline{\underline{C}}^+(K)} \mu_\varepsilon(f-g) \leqq (1+\varepsilon)\mu_\varepsilon(1)$$

Remplaçant g par tg ($t \in \mathbb{R}_+$) et faisant tendre t vers $+\infty$, on voit que $\mu_\varepsilon(g) \geqq 0$; donc μ_ε est positive. Nous pouvons alors supposer que $\mu_\varepsilon(1)=1$, et (7) nous donne, lorsque $g=0$

$$\sup_{f \in A} \mu_\varepsilon(f) \leqq 1+\varepsilon$$

Il ne reste plus qu'à prendre pour μ une valeur d'adhérence vague de μ_ε lorsque $\varepsilon \to 0$.

REFERENCES.

[1]. C. DELLACHERIE. Quelques applications du lemme de Borel-Cantelli à la théorie des semimartingales. Sém. Prob. XII, p. 742-745, Lect. Notes 649, Springer 1978.

[2]. M. METIVIER et J. PELLAUMAIL. Mesures stochastiques à valeurs dans les espaces L^0. ZfW 40, 1977, p. 101-114.

[3]. C. STRICKER. Quasimartingales, martingales locales, semimartingales et filtration naturelle. ZfW 39, 1977, p. 55-64.