SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PAUL-ANDRÉ MEYER

Présentation de l'« inégalité de Doob » de Métivier et Pellaumail

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 13 (1979), p. 611-613

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1979__13__611_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1977/78

PRESENTATION DE L'«INEGALITE DE DOOB» DE METIVIER-PELLAUMAIL

par P.A. Meyer

Dans le travail [1], Métivier et Pellaumail développent une théorie des équations différentielles stochastiques à partir de principes assez différents de ceux qu'a utilisés Catherine Doléans-Dade. Comme dans toute théorie des équations différentielles stochastiques, cependant, l'arrêt à T- joue un rôle important, et le problème qui se pose à Métivier et Pellaumail est de trouver un substitut, pour l'arrêt à T-, de l'inégalité de Doob :

<u>Si</u> M <u>est une martingale de carré intégrable</u>, <u>et</u> T <u>est un temps d'arrêt</u>, <u>on a</u>

$$(1) \qquad \frac{1}{4}E[M_T^{*2}] \leqq E[[M,M]_T]$$

Comme d'habitude, $M_t^* = \sup_{0 \leqq s \leqq t} |M_t|$. Voici l'inégalité de Métivier-Pellaumail :

<u>Sous les mêmes hypothèses</u>, <u>si</u> T <u>est un temps d'arrêt</u> >0, <u>on a</u>

$$(2) \qquad \frac{1}{4}E[M_{T-}^{*2}] \leqq E[[M,M]_{T-}+\langle M,M\rangle_{T-}]$$

L'hypothèse que T>0 peut être gênante, et on est tenté de la lever en se ramenant à un calcul sur l'ensemble $\underline{\underline{F}}_0$-mesurable $\{T>0\}$. C'est légitime si l'on a convenu que $\underline{\underline{F}}_0=\underline{\underline{F}}_{0-}$ pour le calcul de $\langle M,M\rangle$.

La démonstration de (2) est loin d'être évidente. Elle a été présentée par Métivier au séminaire de Strasbourg au cours de l'hiver 1977, avec ses conséquences pour la théorie des équations différentielles ; il nous semble qu'elle devrait intéresser beaucoup de lecteurs de ce volume.

CALCUL PRELIMINAIRE

<u>Notations</u> : $(\Omega,\underline{\underline{F}},P,(\underline{\underline{F}}_t))$ comme d'habitude ; S est un temps prévisible >0, et (H_t) est une martingale de carré intégrable, compensée d'un seul saut à l'instant prévisible S :

$$H_t = hI_{\{t \geqq S\}} \quad \text{avec } h \in L^2(\underline{\underline{F}}_S),\ E[h|\underline{\underline{F}}_{S-}] = 0 .$$

A est un élément de $\underline{\underline{F}}_S$ (mais non de $\underline{\underline{F}}_{S-}$ en général) et $\underline{\underline{G}}$ est la tribu engendrée par $\underline{\underline{F}}_{S-}$ et A . Pour alléger les notations on pose $B=A^c$, $a=P(A|\underline{\underline{F}}_{S-})$, $b=1-a = P(B|\underline{\underline{F}}_{S-})$, $k=E[h|\underline{\underline{G}}]$. Enfin, on pose

$$(3) \qquad \ell = hI_A + E[hI_B|\underline{\underline{G}}] \text{ , v.a. } \underline{\underline{F}}_S\text{-mesurable .}$$

On a $E[\ell|\underline{\underline{G}}] = E[h|\underline{\underline{G}}]$, donc $E[\ell|\underline{\underline{F}}_{S-}]=0$, d'où une nouvelle martingale de carré intégrable

$$L_t = \ell I_{\{t\geqq S\}}$$

H et L sont toutes deux nulles sur $[0,S[$, toutes deux égales à h après S sur l'ensemble A : autrement dit, <u>elles sont égales sur</u> $[0,S_B[$. Le but du calcul est d'estimer L, et plus précisément d'établir

(4) $$E[[L,L]_S] \leqq E[[H,H]_S I_A + \langle H,H\rangle_S I_A]$$

Nous avons d'abord $[L,L]_S=\ell^2$, $[H,H]_S=h^2$, et ces deux v.a. sont égales sur **A**. Tout revient donc à montrer

(5) $$E[[L,L]_S I_B] \leqq E[\langle H,H\rangle_S I_A] \ .$$

Du côté gauche, nous écrivons $\ell^2= h^2 I_A+E[h|\underline{\underline{G}}]^2 I_B$, donc $[L,L]_S I_B=k^2 I_B$. Du côté droit, $\langle H,H\rangle_S = E[h^2|\underline{\underline{F}}_{S-}] \geqq E[k^2|\underline{\underline{F}}_{S-}]$ puisque $k=E[h|\underline{\underline{G}}]$, tribu contenant $\underline{\underline{F}}_{S-}$. Il suffit donc de prouver

$$E[k^2 I_B] \leqq E[I_A E[k^2|\underline{\underline{F}}_{S-}]]$$

En fait on a l'égalité : écrivons $k=XI_A+YI_B$, avec X,Y $\underline{\underline{F}}_{S-}$-mesurables. La relation $E[k|\underline{\underline{F}}_{S-}]=0$ s'écrit $Xa+Yb=0$. On a $k^2=X^2 I_A+Y^2 I_B$, donc

$$E[I_A E[k^2|\underline{\underline{F}}_{S-}]] = E[I_A(X^2a+Y^2b)] = E[X^2a^2+Y^2ab]$$

$$E[k^2 I_B] = E[Y^2 b] = E[Y^2 b(a+b)] = E[Y^2b^2+Y^2ab] \qquad (a+b=1\ !\ )$$

Prenant la différence, on trouve $E[X^2a^2-Y^2b^2]=E[(Xa+Yb)(Xa-Yb)]=E[0]=0$.

DEMONSTRATION DE L'INEGALITE (2)

T étant un temps d'arrêt >0, soient S_n des temps prévisibles >0, à graphes disjoints, tels que les $[S_n]$ recouvrent la partie accessible de $[T]$. Quitte à remplacer S_n par $+\infty$ sur $\{S_n>T\}$, on peut supposer $S_n\leqq T$ sur $\{S_n<\infty\}$. On pose

$$A_n=\{S_n<T\} \ , \quad B_n=A_n^c = \{ S_n=T \text{ ou } S_n=+\infty \}$$

$$h^n= \Delta M_{S_n} \ , \quad H_t^n= h^n I_{\{t\geqq S_n\}}$$

et pour chaque n on fait la construction précédente, fournissant une martingale L^n qui ne saute qu'à l'instant S_n . On peut décomposer M en une série orthogonale

$$M = N + \Sigma_n H^n$$

où N est continue aux instants S_n . La série orthogonale

$$\hat{M} = N + \Sigma_n L^n$$

est aussi convergente dans L^2 d'après (4). Comme $H^n=L^n$ sur $[0,(S_n)_{B^n}[$, qui contient $[0,T[$, on a $M=\hat{M}$ sur $[0,T[$. D'après l'inégalité de

Doob usuelle pour $\hat{M}$, il suffit d'établir

$$E[[\hat{M},\hat{M}]_T] \leqq E[[M,M]_{T-}+\langle M,M\rangle_{T-}]$$

qui se ramène aux inégalités suivantes :

$$E[[N,N]_T] \leqq E[\langle N,N\rangle_{T-}] \tag{6}$$

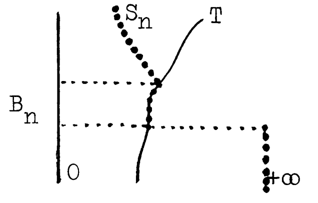
$$E[[L^n,L^n]_T] \leqq E[[H^n,H^n]_{T-}+\langle H^n,H^n\rangle_{T-}] \tag{7}$$

(6) est immédiate : en effet, $\langle N,N\rangle$ est continu à l'instant T, donc $E[\langle N,N\rangle_{T-}]=E[\langle N,N\rangle_T]=E[[N,N]_T]$. Pour établir (7), nous remarquons que

$$[L^n,L^n]_T = [L^n,L^n]_{S^n}$$

$$[H^n,H^n]_{T-}+\langle H^n,H^n\rangle_{T-} = [H^n,H^n]_{S_n} I_{A_n} + \langle H^n,H^n\rangle I_{A_n}$$

et (7) se ramène donc à (4).



[1]. M. Métivier et J. Pellaumail. On a stopped Doob's inequality and general stochastic equations. Rapport interne n°28, Ecole Polytechnique, 1978.