Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Photius Nanopoulos

Mesures de probabilité sur les entiers et ensembles progressions

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 13 (1979), p. 533-547
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1979__13__533_0>

MESURES DE PROBABILITE SUR LES ENTIERS ET ENSEMBLES PROGRESSIONS

par Photius NANOPOULOS

INTRODUCTION : Notons $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des nombres entiers strictement positifs, et $\mathcal{E}$ la classe des sous ensembles de $\mathbb{N}^*$ qui sont de la forme $a\mathbb{N}^* = \{an \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ avec $a \in \mathbb{N}^*$. Les ensembles $a\mathbb{N}^*$, seront appelés "ensembles progression". Contrairement à l'usage établi, nous appellerons "mesure" sur une algèbre ou une tribu de parties de $\mathbb{N}^*$, toute application additive μ, à valeurs dans l'intervalle $[0,1]$, vérifiant $\mu(\mathbb{N}^*)=1$. Nous supposerons que toutes les mesures considérées sont définies sur l'algèbre $\mathcal{G}$ engendrée par les ensembles progression.

A toute mesure μ on associe une fonction $h:\mathbb{N}^* \to [0,1]$, définie par

$$(1) \qquad h(a)=\mu(a\mathbb{N}^*) \text{ pour tout } a \in \mathbb{N}^*.$$

La fonction h sera appelée "fonction-progression de μ".

Le but de cet exposé est de caractériser toutes les applications $h:\mathbb{N}^* \to [0,1]$ qui sont fonction-progression d'une mesure. Ceci sera fait d'abord dans le cas général, puis dans le cas (plus intéressant à cause de l'unicité du prolongement) où μ est σ-additive. On en déduira alors deux représentations des mesures σ-additives définies sur l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$, possédant la propriété d'indépendance c'est-à-dire, des mesures σ-additives μ, vérifiant,

$$(2) \qquad \mu(a\mathbb{N}^* \cap b\mathbb{N}^*) = \mu(a\mathbb{N}^*) \cdot \mu(b\mathbb{N}^*)$$

pour tout couple (a,b) d'entiers premiers entre eux.

Ces mesures sont importantes dans l'étude probabiliste des fonctions arithmétiques additives. En effet on sait que les fonctions $(\beta_p; p$ premier), où $\beta_p(m)$ est le plus grand $k \in \mathbb{N}$ tel que p^k divise m, sont stochastiquement indépendantes par rapport à une mesure μ, si et seulement si μ possède la propriété d'indépendance.

NOTATIONS: Dans tout ce qui suit $\mathbb{P}$ désignera l'ensemble de nombres premiers privé de 1; la lettre p désignera exclusivement un élément de $\mathbb{P}$. Ainsi $\sum_p$, $\prod_p$, $\bigcap_p$, etc sont des opérations sur $\mathbb{P}$.

Institut de Recherche Mathématique Avancée, Laboratoire Associé au C.N.R.S. ,

7, rue René Descartes, 67084 STRASBOURG-CEDEX .

Pour a, b $\in \mathbb{N}^*$ on désigne par $a \vee b$, (resp. $a \wedge b$) le plus petit commun **multiple** (resp. le plus grand commun diviseur) de a et b. L'expression "a divise b" (resp. "a ne divise pas b"), sera notée $a|b$ (resp. $a \nmid b$).

Une application $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ est dite multiplicative si pour tout couple (a,b) d'entiers premiers entre eux on a : $f(ab)=f(a)f(b)$, et si $f(1)=1$. Ainsi la fonction identiquement nulle n'est pas multiplicative.

§ ENSEMBLES ET FONCTIONS PROGRESSION

Pour tout couple d'entiers (a,b) on a la relation

$$(1.1) \qquad a\mathbb{N}^* \cap b\mathbb{N}^* = (a \vee b)\mathbb{N}^*$$

ce qui montre que la classe $\mathcal{E}$ des ensembles progression est stable pour l'intersection finie; par conséquent la connaissance des valeurs qu'une mesure prends sur $\mathcal{E}$ détermine la mesure sur l'algèbre $\mathfrak{A}$ engendrée par $\mathcal{E}$.

D'autre part d'après le théorème de décomposition en facteurs premiers on a,

$$(1.2) \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad n = \prod_p p^{\beta_p(n)}.$$

La relation (1.2) exprimée sous forme ensembliste s'écrit,

$$(1.3) \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad \{n\} = \bigcap_p \left(p^{\beta_p(n)}\mathbb{N}^* - p^{\beta_p(n)+1}\mathbb{N}^*\right)$$

Par conséquent la tribu engendrée par $\mathfrak{F}$ est égale à $\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$ et de ceci on déduit la proposition suivante,

PROPOSITION 1.1.- Si deux mesures ont même fonction-progression elles sont égales sur $\mathfrak{A}$; si de plus elles sont toutes deux σ-additives, alors elles sont égales sur $\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$.

On constate donc que la fonction-progression d'une mesure σ-additive μ, détermine μ sur toutes les parties de $\mathbb{N}^*$. Ceci n'est pas le cas si μ n'est pas σ-additive.

Nous donnons quatre exemples de mesures sur $\mathbb{N}^*$ choisis à cause du rôle qu'ils jouent en théorie probabiliste de nombres.

EXEMPLE 1 Lois uniformes

Pour tout entier k notons ε_k la mesure de Dirac au point k , et pour $n \geq 1$ posons,

$$\nu_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k$$

C'est la loi uniforme sur l'ensemble $\{1,2,\ldots, n\}$ et sa fonction-progression h_n est donnée par

$$h_n\ (a) = \frac{1}{n} [{}^n/a] \quad , \quad a \in \mathbb{N}^* ,$$

où pour $x \in \mathbb{R}$, $[x]$ désigne la partie entière de x.

EXEMPLE 2 Lois ζ_s

Pour $s \in \mathbb{R}$, $s > 1$, on pose: $\zeta_s = \dfrac{1}{\zeta(s)} \sum_{n \geq 1} n^{-s} \varepsilon_n$,

où $\zeta(s)$ est la fonction de Riemann . La fonction progression de ζ_s est

$$h_s\ (a) = a^{-s} \qquad a \in \mathbb{N}^*.$$

EXEMPLE 3 Lois Géométriques

Considérons la suite (p_n, $n \geq 1$) de tous les nombres premiers ordonnés selon leur ordre naturel, et pour tout $n \geq 1$ notons $\mathbb{N}_n$ l'ensemble de tous les entiers m qui sont de la forme

$$m = p_1^{k_1} \ldots p_n^{k_n} \text{ , avec } k_i \geq 0, \text{ pour } i=1,\ldots,n.$$

On définit alors une mesure τ_n sur $\mathbb{N}^*$ en posant :

$$\tau_n\{m\} = \begin{cases} \frac{1}{m}(1-\frac{1}{p_1})\ldots(1-\frac{1}{p_n}) & \text{si } m \in \mathbb{N}_n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que la fonction-progression de τ_n est

$$h_n(a) = \begin{cases} \frac{1}{a} & \text{si } a \in \mathbb{N}_n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

EXEMPLE 4 Mesures invariantes par translation.

Une mesure τ, sur $\mathbb{N}^*$, est invariante par translation si pour tout $A \subset \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\tau\ (A+k) = \tau\ (A)$$

Si τ est une mesure invariante par translation alors de la relation

$$\mathbb{N}^* = \bigcup_{k=0}^{a-1} (a\,\mathbb{N}^*-k)$$

on déduit que pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, $\tau(a\,\mathbb{N}^*) = \frac{1}{a}$, ce qui veut dire que la fonction-progression de τ est

$$h\ (a)=a^{-1} \qquad a\in \mathbb{N}^*$$

On constate que toutes les mesures invariantes par translation ont même fonction-progression, ce qui veut dire que l'algèbre $\mathcal{G}$ est contenue (strictement) dans la classe des sous ensembles " naturellement mesurables " de $\mathbb{N}^*$ (c.f. L.DUBINS et D.MARGOLIES [3]

En fait on peut montrer en utilisant le théorème de Dirichlet sur les progressions arithmétiques que tout ensemble de la forme $a\,\mathbb{N}^*+b$, avec $a\geq 3$ et $a \wedge b = 1$ n'appartient pas à $\mathcal{G}$, et par conséquent $\mathcal{G}$ est strictement contenue dans l'algèbre $\mathcal{P}$ de sous ensembles périodiques de $\mathbb{N}^*$.

§ 2. PLONGEMENT DE $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^\infty$.

Le théorème de factorisation de l'arithmétique (formule (1.2)) permet d'associer à tout entier $n\in \mathbb{N}^*$ la suite

$$\psi(n)= (\beta_{p_1}(n),\beta_{p_2}(n),\ldots)$$

où $p_1,p_2,\ldots$ est la suite des nombres premiers ordonnés par leur ordre naturel.

On définit ainsi une application $\psi : \mathbb{N}^* \to S$, où S est l'ensemble de suites à éléments dans $\mathbb{N}$, n'ayant qu'un nombre fini d'éléments non nuls.

Munissons $\mathbb{N}^*$ de la relation d'ordre $(\geq)$ induite par la relation de divisibilité (i.e. $m\geq n$ si m divise n), et l'espace produit $\mathbb{N}^\infty$ de la relation d'ordre induite par les relations ordinaires sur les coordonnées (i.e. pour $x,y \in \mathbb{N}^\infty$, $x \leq y$, si pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, x_k est inférieur ou égal à y_k).

Alors $\psi : (\mathbb{N}^*,\geq) \mapsto (S,\geq)$ est une application bijective croissante et l'image par ψ d'un ensemble-progression $a\mathbb{N}^*$ est le cône $C_{\psi(a)}$ de S où,

$$C_x = \{y \in S \mid x \leq y\}.$$

Il en résulte que l'algèbre $\mathcal{G}$ sur $\mathbb{N}^*$ engendrée par les ensembles progression peut être identifiée à l'algèbre sur S engendrée par les cônes, que nous noterons $\mathcal{J}$.

Considérons une mesure ν sur $\mathbb{N}^*$ et posons $\mu = \nu \circ \psi^{-1}$. Si h est la fonction-progression de ν alors la relation $\psi\ (a\,\mathbb{N}^*) = C_{\psi(a)}$ entraine

$$(2.1) \quad \mu\ (C_x) = h\ (\psi^{-1}(x)) \qquad x \in S.$$

Pour $x \in S$ posons $H\ (x) = \mu\ (C_x)$ et remarquons que la fonction H détermine parfaitement la fonction-progression h.

Comme S est un sous ensemble du produit infini $S' = \mathbb{N}^{\infty}$ et μ une mesure sur S' on peut considérer les marges de dimension finie de μ. On constate que les sous espaces de dimension finie de S sont déterminés pour les sous ensembles finis de $\mathbb{P}$. Ainsi par exemple le sous espace $\mathbb{N}^n = \{ x \in S \mid \forall k > n, x_k = 0 \}$ est l'image par ψ de l'ensemble $\mathbb{N}_n$ de l'exemple 3 du § 1.

Le système $\{ \mu_n = \mu \circ \pi_n^{-1}, n \geq 1 \}$, où π_n est la projection de $S \to \mathbb{N}^n$ est le système de marges de dimension finie de μ. Pour tout $n \geq 1$, μ_n est une mesure définie sur l'algèbre $\mathcal{G}_n$ sur $\mathbb{N}^n$, engendrée par les cônes de $\mathbb{N}^n$, et comme $\mathcal{F} = \bigcup_n \mathcal{F}_n$, (où $\mathcal{F}_n = \pi_n^{-1}(\mathcal{G}_n)$, on a :

$$(2.2) \qquad \mu(\pi_n^{-1}(A)) = \mu_n(A), \quad \text{pour tout } A \in \mathcal{G}_n.$$

Il est bien connu que si les $(\mu_n, n \geq 1)$ sont des mesures sur $(\mathbb{N}^n, \mathcal{G}_n)$ qui forment un système consistant alors la relation (2.2) détermine d'une manière unique une mesure μ sur $(S, \mathcal{F})$ dont le système de marges est $(\mu_n, n \geq 1)$.

En général μ n'est pas σ-additive, même si pour tout $n \geq 1$ μ_n l'est. Comme cas typique nous donnons les lois "géométriques" $(\tau_n, n \geq 1)$ définies dans l'exemple 3 du § 1. Il est facile de voir que toute mesure τ invariante par translation (exemple 4, §1) admet $(\tau_n, n \geq 1)$ comme système de marges; or bien que pour tout n, τ_n est σ additive, τ ne l'est pas. Cependant dans le cas où toutes les μ_n sont σ-additives il existe une mesure σ-additive μ' sur $(S', \mathcal{F}')$, (où $\mathcal{F}'$, π_n', etc. sont définis sur S' exactement comme $\mathcal{F}$, π_n, etc sur S), déterminée d'une manière unique par la relation.

$$(2.3) \quad \mu'(\pi_n'^{-1}(A)) = \mu_n(A) \quad \text{pour } A \in \mathcal{G}_n.$$

On verra au § 3 que $S \in \sigma(\mathcal{F}')$ et que μ est σ-additive sur $(S, \mathcal{F})$ si et seulement si $\mu'(S) = 1$.

§ 3 CARACTERISATION DES FONCTIONS-PROGRESSIONS

Il est évident que si h est la fonction progression d'une mesure μ alors

(i) $h(1) = \mu(\mathbb{N}^*) = 1$

(ii) si $a \mid b$ alors $b\mathbb{N}^* \subset a\mathbb{N}^*$ et par conséquent $h(a) \geq h(b)$.

Plus généralement si a divise chacun des entiers $b_1, \ldots, b_n$ alors

$$\bigcup_{i=1}^{n} (b_i \mathbb{N}^*) \subset a\mathbb{N}^*$$

ce qui implique

$$h(a) \geq h[b_1,\dots,b_n]$$

où,

$$h[b_1,\dots,b_n] = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{1\leq i_1\leq\dots\leq i_k\leq n} h(b_{i_1}\vee\dots\vee b_{i_k}).$$

(iii) En particulier pour tout $a \in \mathbb{N}^*$ et tout vecteur $(k_1,\dots,k_n)$ à coordonnées dans $\mathbb{N}$ on a :

$$h(a)\geq h[ap_1^{k_1},\dots,ap_n^{k_n}]$$

Si de plus on suppose que μ est σ-additive alors on a :

(iv) Pour tout $p \in \mathbb{P}$, $h(p^k)$ décroit vers zéro lorsque $k\to\infty$.

(v) $\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{m\to\infty} h[p_{n+1},\dots, p_{n+m}]= o$

La relation (v) tient au fait que

$$h[p_{n+1},\dots,p_{n+m}] = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{m} p_{n+i}\,\mathbb{N}^*\right) \xrightarrow[m\to\infty]{} \mu\left(\bigcup_{i\geq n} p_i\,\mathbb{N}^*\right).$$

Ces considérations mènent au premier théorème sur la caractérisation des applications $h: \mathbb{N}^*\to[o,1]$ qui sont fonctions-progression d'une mesure.

<u>THEOREME 3.1</u>. <u>Soit h une application de $\mathbb{N}^*$ dans</u> $[o,1]$.

1) <u>h est fonction-progression d'une mesure (simplement additive) si et seulement si elle satisfait aux conditions</u> (c_1) <u>et</u> (c_2) <u>ci-dessous</u> :

(c_1) $h(1) = 1$

(c_2) Pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout vecteur $(k_1,\dots,k_n) \in \mathbb{N}^*$ on a:
$h(a) \geq h[ap_1^{k_1},\dots, ap_n^{k_n}]$

2) <u>h est fonction-progression d'une mesure σ-additive si et seulement si elle satisfait à</u> (c_1) <u>et</u> (c_2) <u>ci-dessus ainsi qu'aux deux conditions supplémentaires</u> (c_3) <u>et</u> (c_4) <u>ci-dessous</u>.

(c_3) $\forall\, p \in \mathbb{P}$, $\lim\limits_{k\to\infty} h(p^k) =o$

(c_4) $\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{m\to\infty} h[p_{n+1},\dots, p_{n+m}] = o$.

Preuve. La nécessité des conditions a été démontrée dans les deux cas et ainsi il reste à démontrer qu'elles sont suffisantes. En reprenant la discussion du paragraphe 2, nous introduisons la fonction $H:S\to[o,1]$ définie par

$$H(x)= h(\psi^{-1}(x)).$$

Les conditions (c_i), $i=1,2,3,4$, sur h, peuvent être traduites en des conditions équivalentes (D_i), $i=1,2,3,4$, sur H, de la façon suivante :

(D_1) $H(o)=1$.

(D_2) pour tout $x \in S$, tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout vecteur $(k_1,\dots,k_n) \in \mathbb{N}^n$ on a:

$$H(x)\geq H[x^1,\dots,x^n]$$

où, x^i est définit par,

$$x^i_j=\begin{cases} x_j & \text{si } j\neq i \\ x_i+k_i & \text{si } j=i \end{cases},$$

et

$$H[x^1,\dots,x^n] =\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1\leq i_1<\dots<i_k\leq n} H(x^{i_1}\vee\dots\vee x^{i_k}).$$

(D_3) $\forall\ i\geq 1 \ \lim_{k\to\infty} H(k\cdot u^i) = o$

(D_3) $\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} H[u^{n+1},\dots,u^{n+m}]= 0$

où $u^i=\psi(p_i)$ est l'élément de S ayant toutes ces coordonnées nulles sauf la i-ème qui est égale à 1.

Preuve de 1). Sur $\mathbb{N}^n$ définissons la fonction

$$(1)\ H_n(x_1,\dots,x_n) = H(x_1,\dots,x_n,0,0,\dots).$$

On déduit des conditions (D_1) et (D_2) que pour tout $n\geq 1$ la fonction H_n vérifie

(i) H_n est décroissante et $H_n(0,\dots,0) = 1$.

(ii) Pour tout rectangle $\{[k_i, k_i+m_i],\ i=1,\dots,n\}$ de $\mathbb{N}^n$

$$\Sigma \pm H_n(k_1+\theta_1 m_1,\dots,k_n+\theta_n m_n) \geq 0$$

où la sommation est effectuée sur les 2^n vecteurs $(\theta_1,\dots,\theta_n) \in \{o,1\}^n$ et le signe $(\pm)$ est + ou − selon que le nombre de coordonnées nulles de $(\theta_1,\dots,\theta_n)$ est pair ou impair.

Comme des problèmes de continuité ne se posent pas on déduit des résultats classiques sur les fonctions de répartition (c.f. [1] p.226) que H_n est fonction de répartition d'une mesure μ_n sur $(\mathbb{N}^n, \mathcal{G}_n)$; c'est-à-dire que

$$(2)\ \forall\ x \in \mathbb{N}^n,\ H_n(x) = \mu_n\ \{y \in \mathbb{N}^n \mid x \leq y\}.$$

D'autre part, on déduit de la définition de H_n, que le système de mesures $(\mu_n,\ n \geq 1)$ est consistant; par conséquent il existe une mesure unique (simplement additive) sur $(S, \mathfrak{F})$ vérifiant :

$$(3)\ \mu\ (\pi_n^{-1}\ (A)) = \mu_n\ (A)\ ,\ A \in \mathcal{G}_n\ .$$

Posons $\nu = \mu \circ \psi$, mesure sur $\mathbb{N}^*$, et montrons que la fonction progression de ν coïncide avec h.

Pour $a \in \mathbb{N}^*$, choisissons n tel que, pour tout $k \geq n, p_k$ ne divise pas a. Alors on a

$$(4)\ C_{\psi(a)} = \pi_n^{-1}\ (\ C^n_{\pi_n(\psi(a))})$$

et par conséquent

$$\nu\ (a\,\mathbb{N}^*) = \mu\ (\psi(a\,\mathbb{N}^*)) = \mu\ (C_{\psi(a)})\ .$$

De (3) et (4) on déduit que

$$\nu\ (a\,\mathbb{N}^*) = \mu_n\ (C^n_{\pi_n}\ (\psi(a))) = H_n\ (\pi_n(\psi(a))) = H\ (\psi(a)) = h(a).$$

<u>Preuve de 2)</u> Tout d'abord remarquons que (D_3) implique que pour tout $n \geq 1$ on a :

$$(iii)\quad \forall\ k = 1,\ldots,n \qquad \lim_{x_k \to \infty} H_n(x) = o.$$

Les conditions (i) (ii) et (iii) impliquent que la mesure μ_n dans (2) est σ-additive sur $(\mathbb{N}^n, \mathcal{G}_n)$. On a donc un système consistant $(\mu_n,)$ de marges σ-additives, mais ceci ne suffit pas pour assurer la σ-additivité de μ sur $(S, \mathfrak{F})$. Toutefois le théorème de Kolmogorov (c.f.[1] p.228) implique l'existence d'une mesure σ-additive μ' (et une seule), sur $(S', \mathfrak{F}')$ vérifiant :

$$(4)\ \mu'\ (\pi_n'^{-1}\ (A)) = \mu_n\ (A),\ \text{pour}\ A \in \mathcal{G}_n.$$

Montrons maintenant que (D_4) implique que μ est σ-additive. Pour cela, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$, posons

$$S'_{n,m} = \{x \in S' \mid x_{n+1} = \ldots = x_{n+m} = 0\}$$

et

$$S_{n,m} = S \cap S'_{n,m}$$

Ainsi pour tout $n \geq 1$ fixé, les suites d'ensembles $(S'_{n,m}\,;\ m\geq 1)$ et $(S_{n,m}\,;\ m\geq 1)$ décroissent vers le même ensemble S_n, où

$$S_n = \{x \in S \mid \forall\ k \geq n+1\ ,\ x_k = 0\}$$

et la suite $(S_n\,;\ n \geq 1)$ croît vers S.

De (3) et (4) on déduit que pour tout $n,m \in \mathbb{N}^*$

$$\mu(S_{n,m}) = \mu'(S'_{n,m})$$

et comme μ' est σ-additive

$$\mu'(S) = \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \mu\ (S'_{n,m}\ ).$$

Or $\mu(S_{n,m}) = 1 - H\,[u^{n+1},\ldots,u^{n+m}]$ et ainsi de (D_4) on déduit que $\mu(S) = 1$.

Il en résulte que μ est la restriction de μ' sur S et comme μ' est σ-additive μ l'est aussi. Comme dans 1) on déduit que la mesure $\nu = \mu\circ\phi$ sur $\mathbb{N}^*$ est σ-additive et sa fonction-progression coïncide avec h. $\square$

§ 4) LA PROPRIETE D'INDEPENDANCE

L'étude du comportement asymptotique des fonctions arithmétiques additives par rapport aux lois uniformes $(\nu_n\ ;\ n \geq 1)$ (c.f. [2],[4] est basée sur le fait que les fonctions $(\beta_p\ ;\ p \in \mathbb{P})$ sont ν_n- asymptotiquement indépendantes. L'étude analogue par rapport aux lois $(\zeta_s\ ;\ s > 1)$ (c.f.[5],[6],[7]) donne des résultats plus élégants grâce au fait que les fonctions $(\beta_p\ ;\ p \in \mathbb{P})$ sont ζ_s-indépendantes pour tout $s > 1$.

Par ailleurs les fonctions β_p sont indépendantes en tant que v.a.pour d'autres familles intéressantes comme les lois géométriques et les mesures invariantes par translation.

DEFINITION 4.1. Une mesure P sur $\mathbb{N}^*$ possède la"propriété d'indépendance" si les fonctions $(\beta_p\ ;\ p \in \mathbb{P})$ sont P-indépendantes.

On désignera par $\mathcal{P}_a$ (resp. $\mathcal{P}_\sigma$) l'ensemble de mesures de probabilité simplement additives (resp. σ-additives) possédant la propriété d'indépendance.

Si on connaît la fonction-progression h de P, alors il est facile de voir si $P \in \mathcal{P}_a$ grâce au théorème suivant :

THEOREME 4.1 Une mesure P est dans $\mathcal{P}_a$ si et seulement si sa fonction-progession h est multiplicative.

Preuve : Immédiate d'après la relation

$$a\mathbb{N}^* = \bigcap_{p|a} p^{\beta_p(a)}\mathbb{N}^* \quad .$$

Remarque : Posons nous la question de savoir quelles applications $h : \mathbb{N}^* \to [0,1]$ sont fonction-progression d'une mesure $P \in \mathcal{P}_a$. En combinant les théorèmes 3.1 et 4.1 on constate qu'il faut et il suffit que h satisfait aux conditions (c_1) et (c_2) et qu'elle soit multiplicative. Toutefois la multiplicativité de h implique que les conditions (c_1) et (c_2) ne sont plus indépendantes.

THEOREME 4.2. Une application $h : \mathbb{N}^* \to [0,1]$ est la fonction-progession d'une mesure $P \in \mathcal{P}_a$, si et seulement si elle vérifie

(c_1') h est multiplicative

(c_2') pour tout $p \in \mathbb{P}$, la suite $(h(p^k)\ ;\ k \geq 1)$ est décroissante.

Preuve : Il est évident que les conditions (c_1') et (c_2') sont nécessaires. Pour montrer qu'elles sont suffisantes il suffit de montrer qu'il existe une mesure P admettant pour fonction-progression h, car d'après le théorème 4.1, et (c_1'), on est assuré que $P \in \mathcal{P}_a$. Montrons donc que les conditions (c_1) et (c_2) du théorème 3.1. sont vérifiées. Puisque h est multiplicative, $H(1)= 1$, d'où (c_1). Pour montrer (c_2) on utilisera l'identité.

$$(1) \qquad (x_1 - y_1)\ldots(x_n - y_n) = x_1\ldots x_n - \sum_{m=1}^{n}(-1)^{m+1}\Sigma_m' \, y_{i_1}\ldots y_{i_m}\, x_{j_1}\ldots x_{j_{n-m}}$$

où le symbole Σ_m' indique la sommation sur tous les sous-ensembles $\{i_1,\ldots,i_m\}$ de $\{1,\ldots,n\}$ ayants m éléments et $\{j_1,\ldots,j_{n-m}\} = \{1,\ldots,n\} - \{i_1,\ldots,i_m\}$.

Soit $a = p_1^{l_1}\ldots p_n^{l_n}$ un entier et $(k_1,\ldots,k_n)$ un élément de $\mathbb{N}^n$. Avec les notations du théorème 3.1., la différence

$$D = h(a) - h[a\ p_1^{k_1},\ldots,p_n^{k_n}]$$

s'écrit ;

$$D = h(a) - \sum_{m=1}^{n}(-1)^{m+1}\ \Sigma_m'\ h(ap_{i_1}^{k_{i_1}}\ldots\ldots p_{i_m}^{k_{i_m}})$$

et puisque h est multiplicative on a,

$$D = \prod_{i=1}^{n} h(p_i^{l_i}) - \sum_{m=1}^{n}(-1)^{m+1}\Sigma_m'\, h(p_{i_1}^{l_{i_1}+k_{i_1}})\ldots h(p_{i_m}^{l_{i_m}+k_{i_m}})h(p_{j_1}^{l_{j_1}})\ldots h(p_{j_{n-m}}^{l_{j_{n-m}}}).$$

L'identité (1) implique que

$$D = \prod_{1}^{n} (h(p_i^{l_i}) - h(p_i^{l_i+k_i}))$$

et d'après (c_2') on en déduit que $D \geq 0$, d'où (c_2).

On peut maintenant en déduire facilement le résultat analogue pour les mesures σ-additives.

Théorème 4.3. Une application $h: \mathbb{N}^* \to [o,1]$ est la fonction-progression d'une mesure $\mu \in \mathcal{P}_\sigma$ si et seulement si elle vérifie,

(c_1') h est multiplicative ,

(c_2') pour tout $p \in \mathbb{P}$ la suite $(h(p^k), k \geq 1)$ est décroissante ,

(c_3') pour tout $p \in \mathbb{P}$ $\lim\limits_{k\to\infty} h(p^k) = 0$,

(c_4') $\sum\limits_{p} h(p) < \infty$.

Preuve : Nécessité: Les conditions (c_1') (c_2') et (c_3') découlent directement des définitions tandis que (c_4') s'obtient en appliquant le lemme de Borel-Cantelli aux ensembles $(p\,\mathbb{N}\ ,\ p \in \mathbb{P})$ qui vérifient, $\lim_p \sup(p\,\mathbb{N}) = \emptyset$.

Suffisance : D'après le théorème 4.2. on sait qu'il existe $\mu \in \mathcal{P}_a$ ayant h comme fonction-progression, et d'après le théorème 3.1. il suffit de montrer que (c_4) est vérifiée. Dans ce but on remarque que

$$h\,[p_{n+1},\dots,p_{n+m}] = \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{m} p_{n+i}\,\mathbb{N}\Big) \leq \sum_{i=n+1}^{m} h(p_i)$$

et par conséquant pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\lim_{m\to\infty} h[p_{n+1},\dots,p_{n+m}] \leq \sum_{i>n} h\,(p_i)$$

et ainsi (c_4) est une conséquence de (c_4') $\square$

§ 5. CONSTRUCTION DE MESURES VERIFIANT LA PROPRIETE D'INDEPENDANCE ; LE THEOREME DE REPRESENTATION.

Les théorèmes 4.2. et 4.3. fournissent une première méthode de construction de mesures ayant la propriété d'indépendance, à l'aide de fonctions-progression, c'est-à-dire des mesures que l'on désire attribuer aux ensembles progressions. Cependant dans le cas de mesures σ-additives on peut donner une autre méthode en examinant les masses ponctuelles.

Soit $P \in \mathcal{P}_\sigma$ admettant pour fonction-progression h. La relation (1.3) implique que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a,

$$(5.1) \quad P\{n\} = \prod_p \left(h(p^{\beta_p(n)}) - h(p^{\beta_p(n)+1})\right).$$

Supposons en un premier temps que

$$P\{1\} = \prod_p (1-h(p)) > 0.$$

Ceci est équivalent à dire que pour tout p, $h(p) > 1$.

Pour simplifier l'écriture, posons

$$\Delta_p(n) = h(p^{\beta_p(n)}) - h(p^{\beta_p(n)+1})$$

et associons à P la fonction $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}^+$ définie par

$$(5.2) \quad \varphi(n) = \prod_{p|n} \frac{\Delta_p(n)}{1-h(p)}$$

Il est facile de vérifier que φ est une fonction multiplicative et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a,

$$(5.3) \qquad P\{n\} = c\,\varphi(n)$$

où

$$c^{-1} = \sum_{n\geq 1} \varphi(n)\ .$$

Les deux fonctions multiplicatives h et φ se déterminent mutuellement par les relations (5.4) et (5.5) ci-dessous.

$$(5.4) \quad \varphi(p^k) = (h(p^k) - h(p^{k+1}))\,(1-h(p))^{-1}$$

$$(5.5) \quad h(p^k) = \Big(\sum_{i\geq k} \varphi(p^i)\Big)\Big(\sum_{i\geq 0} \varphi(p^i)\Big)^{-1} ,$$

valables pour tout $p \in \mathbb{P}$ et tout $k \in \mathbb{N}$.

Lemme 5.1. La relation (5.3) définit une application bijective entre les éléments $P \in \mathcal{P}_\sigma$ vérifiant $P\{1\} > 0$ et l'ensemble de fonctions multiplicatives φ positives et sommables.

Preuve Il est clair que la correspondance $P \to \varphi$ est injective. Pour montrer qu'elle est surjective considérons φ multiplicative, positive et sommable et définissons P par (5.3). Considérons également la fonction multiplicative h définie à l'aide de φ par (5.5). La fonction h vérifie

$$\text{(i) } \forall\, p \in \mathbb{P} \quad h(p) < 1 .$$

$$\text{(ii) } \sum_p h(p) < \infty$$

Ainsi du Théorème 4.3., on déduit l'existence de $P' \in \mathcal{P}_a$ admettant h comme fonction-progression. De (i) et (ii) on déduit que

$$P'\{1\} = \prod_p (1-h(p)) > 0 .$$

La fonction φ' associée à P' par (5.2) est égale à φ ce qui implique $P=P'$. □

Pour éliminer la condition $P\{1\} > 0$, on aura besoin du lemme suivant.

Lemme 5.2. Soit $P \in \mathcal{P}_\sigma$ et h sa fonction-progression.

Posons

$$e = \inf \{n \in \mathbb{N}^* \mid P\{n\} > 0\}$$

alors on a :

1) $P((e\,\mathbb{N}^*)^c) = 0$

2) $\forall\, p \in \mathbb{P}$, $\beta_p(e) = \inf \{k \geq 0 \mid h(p^k) > h(p^{k+1})\}$

3) Pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, il vient, en posant $e_a = \prod_{p|a} p^{\beta_p(e)}$,
$h(e\,a) = h(e_a\, a)$.

Preuve : Pour $p \in \mathbb{P}$ posons

$$\text{(i) } u_p = \inf \{k \geq 0 \mid h(p^k) > h(p^{k+1})\}.$$

Du théorème 4.3. , on déduit qu'il existe un entier a, tel que, $\forall\, p \in \mathbb{P}$, $\beta_p(a) = u_p$. Montrons que a = e. De(5.1) et de(1) on obtient $P\{a\} > 0$, et par conséquent $e \leq a$. D'autre part (5.1) implique aussi que

$$\text{Pour tout } p ,\ h(p^{\beta_p(e)}) > h(p^{\beta_p(e)+1})$$

et par conséquent pour tout p on a,

$$u_p \leq \beta_p(e)$$

ce qui entraine $a \leq e$. Ceci prouve le point 2). Pour montrer 3) on remarque que

$$\text{(ii) } h(p^{\beta_p(e)}) = 1 \quad \text{pour tout } p$$

et ainsi $\forall\, a \in \mathbb{N}$, $h(ea) = h(e_a\, a)$,

ce qui démontre 3).

En choisissant dans 3), $a = 1$ on obtient $h(e) = 1$, ce qui implique 1). □

On est maintenant en mesure de démontrer le théorème de représentation.

THEOREME 5.1. Une mesure σ-additive P a la propriété d'indépendance si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a,

$$(5.6) \qquad P\{n\} = \begin{cases} c\varphi(\frac{n}{e}) & \text{si } e \mid n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

où $e \in \mathbb{N}^*$ et φ est une fonction multiplicative positive et sommable de somme c^{-1}.

Preuve : Considérons $P \in \mathcal{P}_\sigma$ et posons $e = \inf\{n \in \mathbb{N}^* \mid P\{n\} > 0\}$. On définit alors une mesure σ-additive P' en posant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\text{(i)} \quad P'\{n\} = P\{e\, n\},$$

de sorte que les fonctions-progression h et h' de P et P' vérifient

$$\text{(ii)} \quad h'(a) = h(e\, a) \quad \text{pour tout } a \in \mathbb{N}^*.$$

Si a et b sont deux entiers premiers entre eux alors $e_{ab} = e_a\, e_b$ et ainsi

$$h'(ab) = h(e\, a\, b) = h(e_a\, a\, e_b\, b) = h(e\, a)h(e\, b) = h'(a)\, h'(b).$$

Par conséquent h' est multiplicative et ainsi $P' \in \mathcal{P}_\sigma$. D'autre part $P'\{1\} = P\{e\} > 0$, et du lemme 5.1. , on déduit l'existence d'une fonction multiplicative φ , positive et sommable telle que

$$\text{(iii)} \quad P'\{n\} = c\,\varphi(n) \text{ , pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

De (i) et (iii) on déduit que P et φ vérifient (5.6).

Réciproquement si P et φ vérifient (5.6) alors la relation (iii) ci-dessus définit $P' \in \mathcal{P}_\sigma$ dont la fonction-progression h' est liée à la fonction-progression h de P par la relation

$$\text{(iv)} \quad h(a) = h'\left(\frac{e \vee a}{e}\right) \quad \text{pour tout } a \in \mathbb{N}^*.$$

De la définition de e_a on déduit que

$$\frac{e \vee a}{e} = \frac{e_a \vee a}{e_a}$$

et ainsi pour a et b premiers entre eux, on a ,

$$h(ab) = h'\left(\frac{e_{ab} \vee (ab)}{e_{ab}}\right) = h'\left(\frac{(e_a \vee a)(e_b \vee b)}{e_a e_b}\right) =$$

$$= h'\left(\frac{e_a \vee a}{e_a}\right) h'\left(\frac{e_b \vee b}{e_b}\right) = h(a)h(b).$$

Il en résulte que h est multiplicative, et ainsi $P \in \mathcal{P}_\sigma$. □

Références :

[1] BILLINGSLEY,Patrick (1968). Convergence of Probability Measures. Wiley,New York.

[2] BILLINGSLEY,Patrick (1974). Probabilistic methods in the theory of numbers. Ann. Prob. 2 (5) 749-791.

[3] DUBINS, Lester and MARGOLIES David (1978). Unpublished work on naturally integrable functions on amenable groups.

[4] KUBILIUS, J.(1964). Probabilistic methods in the theory of numbers. Amer. Math. Soc. Translations 11. (Translation of the second Russian edition of 1962).

[5] NANOPOULOS, Photius (1975). Lois de Dirichlet sur $\mathbb{N}^*$ et pseudo-probabilités. C.R.A.S. Paris 280, 1543 - 1546 .

[6] NANOPOULOS, Photius (1977). Lois zêta et fonctions arithmétiques additives. Loi faible de grands nombres. C.R.A.S. Paris 285, 875-877

[7] NANOPOULOS, Photius (1978) lois zêta et fonctions arithmétiques additives. Convergence vers une loi normale (A paraître aux C.R.A.S.).