SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

SHRISHTI DHAV CHATTERJI

Le principe des sous-suites dans les espaces de Banach

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 13 (1979), p. 4-21
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1979__13__4_0>

LE PRINCIPE DE SOUS-SUITES DANS

LES ESPACES DE BANACH

S.D. CHATTERJI

§1. Introduction.

Il y a quelques années, j'ai présenté un principe de sous-suites de la théorie des probabilités dans le cadre du Séminaire de Probabilités de Strasbourg [3(a)]. Ce principe peut s'énoncer ainsi: de toute suite de variables aléatoires (v.a.) réelles, bornée dans un espace L^p (ou une autre classe d'intégrabilité), on peut tirer une sous-suite telle que celle-ci satisfait des propriétés asymptotiques connues pour les suites de v.a. réelles, indépendantes, également réparties et de même classe d'intégrabilité. J'étais motivé par deux résultats dûs respectivement à Révész [13] et Komlòs [10]. Celui de Révész dit que de toute suite $f_n \in L^2$ t.q. $\sup_n ||f_n||_2 < \infty$, on peut extraire une sous-suite $\{f_{n_k}\}$ et trouver une $f \in L^2$ t.q. $\sum_k a_k (f_{n_k} - f)$ converge p.s. dès que $\sum_k |a_k|^2 < \infty$. Le théorème de Komlòs dit que de toute suite de v.a. réelles, bornée dans L^1, on peut trouver une sous-suite telle que celle-ci (et tout autre sous-suite de celle-ci) converge (C,1) p.s. (où (C,1) veut dire la moyenne d'ordre 1 de Cesàro). Il est clair que le théorème de Komlos correspond à la loi des grands nombres de Kolmogorov pour les v.a. réelles, indépendantes et de même loi. Dans une série de travaux [3(c),(d),(e),(f)], j'ai vérifié le principe de sous-suites pour d'autres propriétés des suites de v.a. réelles, indépendantes et de même loi, notamment pour la loi limite centrale et la loi du logarithme itéré (voir aussi [9]). Récemment, Aldous [1] a donné un énoncé rigoureux du principe de sous-suites et démontré un théorème sur l'existence des sous-suites de v.a. réelles satisfaisant aux différentes propriétés des suites indépendantes et également réparties, en faisant simplement l'hypothèse que la suite donnée de v.a. réelles est telle que leurs lois forment une famille relativement compacte (équitendue). Ce théorème de Aldous contient comme cas particuliers les théorèmes cités précedemment car si une famille de v.a. réelles est bornée dans L^p, la famille de leurs lois est automatiquement équitendue. Ce dernier fait étant en défaut dans tous les espaces de Banach de dimension infinie, on ne peut pas appliquer le théorème de Aldous -

même si ce dernier reste valable dans tous les espaces polonais (comme noté par Aldous lui-même dans [1]) - aux v.a. à valeurs dans un espace de Banach E et satisfaisant des conditions de bornitude des normes dans L^p_E . Par ailleurs, on verra dans la suite que les propriétés structurelles de E jouent un rôle important dans l'affaire. Le but de cet article est de dégager un certain nombre de propriétés du type "sous-suites" et initier l'étude de ces propriétés pour différents espaces E.

Dans mon article [3(a)] présenté au Séminaire de Probabilités VI, j'ai déjà mentionné la possiblité d'étudier ces questions pour les v.a. à valeurs dans un espace de Banach E ; j'ai même écrit, un peu trop hâtivement sans doute, que ces propriétés sont vraies sans autre pour les espaces hilbertiens. Il se trouve effectivement que pour les espaces hilbertiens, certains cas particuliers du principe de sous-suites restent vrais mais les démonstrations sont loin d'être triviales. C'est Mme. A.M. Suchanek [14] qui a donné pour la première fois une démonstration complète pour l'analogue du théorème de Révész dans les cas des v.a. à valeurs dans un espace hilbertien. Dans la suite, je donne quelques généralisations de ce résultat. En ce qui concerne la démonstration de Mme. Suchanek du théorème de Komlòs dans le cas hilbertien, je l'ai trouvé erronnée. L'erreur est du même type que celle que j'ai commis moi-même ([3(b)] p.116) en essayant de donner une démonstration rapide du théorème de Komlòs dans un cas particulier; la démonstration correcte (dûe à Komlòs) se trouve aussi dans ([3(b)], p.117-122). Au moment de la composition de cet article, je ne sais pas si le théorème de Komlòs vaut dans les espaces hilbertiens.

Le présent article n'est qu'un début. Il est très incomplet du point de vue des résultats ; il a simplement l'ambition de présenter la position du problème, de donner quelques indications sur les techniques à utiliser et de faire un premier dessin du type de résultats à espérer.

§2. La position du problème.

Dans la suite, l'espace de probabilité (Ω,Σ,P) sera fixe mais quelconque; on pourra passer ensuite aux mesures P quelconques. Par L_E^p, $0<p<\infty$, E étant un espace de Banach (réel ou complexe), on notera l'espace (des classes de P-équivalences) des fonctions $f:\Omega\to E$, fortement mesurables et telles que $[f]_p = (\int ||f||^p\, dP)^{1/p} < \infty$. Pour $p\geqslant 1$, L_E^p est un espace de Banach. Par L_E^0 on notera l'espace correspondant à toutes les v.a. (fortement mesurables) à valeurs dans E. Si $x'\in E'$, (E' = l'espace de Banach dual à E) on notera $x'(x) = \langle x, x'\rangle$ pour $x\in E$. Dans la suite, on aura besoin de la convergence faible dans les espaces L_E^p $(1\leqslant p<\infty)$ surtout lorsque E est réflexif. Les faits suivants donc sont à noter lorsque E est réflexif (ils sont vrais généralement sous les conditions plus larges sur E). D'abord, le dual $(L_E^p)'$ est isométriquement isomorphe à $L_{E'}^{p'}$ où $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$; si $p=1$, $p'=\infty$ et l'on définit $L_{E'}^{\infty}$ comme l'espace (des classes de P-équivalences) des fonctions $f':\Omega\to E'$, fortement mesurables et telles que $[f']_\infty = \operatorname{ess.sup.}_{\omega} ||f'(\omega)|| < \infty$. La dualité entre L_E^p et $L_{E'}^{p'}$ se réalise par la formule

$$\langle f\ ,\ f'\rangle = \int \langle f(\omega)\ ,\ f'(\omega)\rangle\, P(d\omega)\ .$$

Une suite $f_n\in L_E^p$ converge faiblement vers $f\in L_E^p$ si et seulement si $\sup_n [f_n]_p < \infty$ et

$$\lim_{n\to\infty} \langle \int_A f_n\, dP\ ,\ x'\rangle = \langle \int_A f\, dP\ ,\ x'\rangle$$

pour tout $A\in\Sigma$ et $x'\in E'$. On peut montrer que L_E^p $(1\leqslant p<\infty$, E réflexif dans toute cette discussion) est faiblement séquentiellement complet (ce qui est évident pour $p>1$ car alors L_E^p est réflexif). A cause de la réflexivité de L_E^p, $p>1$, un sous-ensemble K de L_E^p $(p>1)$ est faiblement relativement compact si et seulement si K est borné dans L_E^p. Pour la relative compacité fiable de $K\subset L_E^1$ on a les conditions nécessaires et suffisantes suivantes: (i) K est borné dans L_E^1 et (ii) la famille $\{||f|| : f\in K\}$ est uniformément intégrable c.à.d. $\int_{||f||>N} ||f||\, dP\to 0$ lorsque $N\to\infty$ uniformément dans $f\in K$. Une condition nécessaire et suffisante pour (ii) est que

$$\sup_{f \in K} \int \psi(\|f(\omega)\|)\, P(d\omega) < \infty$$

pour une fonction $\psi : [0, \infty[\to [0, \infty[$ croissante, convexe, $\lim_{n\to\infty} \psi(x)/x = \infty$ avec $\psi(0) = 0$. Les propriétés de L_E^p citées ci-dessus sont bien connues; elles apparaissent exactement sous cette forme dans mon article [3(g)] qui est peut-être un peu inaccessible. On pourra consulter [5] ou [6] aussi.

Nous considérons maintenant les propriétés suivantes pour un espace E ; il est sous-entendu que ces propriétés doivent être valables par rapport à tous les espaces de probabilité (Ω, Σ, P) :
<u>$(P_p - \alpha)$</u> : $0 < p < \infty$, $0 < \alpha < \infty$; pour toute suite bornée $\{f_n\}$ de L_E^p il existe une sous-suite $\{f_{n_k}\}$ et $f \in L_E^0$ t.q. (avec $g_j = f_{n_j}$)

$$\lim_{N\to\infty} N^{-\alpha} \sum_{j=1}^{N} \{g_j(\omega) - f(\omega)\} = 0 \qquad \text{p.s.} \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

(la limite étant toujours prise dans la topologie forte de E, sauf mention du contraire).

<u>$(P_p^* - \alpha)$</u> : $0 < p < \infty$, $0 < \alpha < \infty$; pour toute suite bornée $\{f_n\}$ de L_E^p, il existe une sous-suite $\{f_{n_k}\}$ et $f \in L_E^0$ t.q. pour toute sous-suite $\{g_j\}$ de $\{f_{n_k}\}$ on a la relation (1).

<u>(Q)</u> : Pour toute suite bornée $\{f_n\}$ de L_E^2, il existe une sous-suite $\{f_{n_k}\}$ et $f \in L_E^0$ t.q. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \{f_{n_k}(\omega) - f(\omega)\}$ converge p.s. dès que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$, $a_n \in \mathbb{C}$.

On peut évidemment formuler d'autres propriétés de ce genre en s'inspirant du principe de sous-suites. Dans cet article, nous nous bornons seulement à ces trois propriétés.

Une question préliminaire qui se pose est la suivante : est-il-vrai que $(P_p - \alpha) \Rightarrow (P_p^* - \alpha)$ (l'inverse étant automatique) ? Pour certaines questions de convergence métrique (et non de convergence p.s.) ce genre d'implication est déduisible d'un théorème de Ramsay pour les ensembles infinis (cf.[7], [8]). Cette implication générale simplifie certaines considérations pour la démonstration des propriétés $(P_p^* - \alpha)$.

La propriété $(P_1^* - 1)$ correspond au théorème de Komlòs. En prenant pour $\{f_n\}$ une suite bornée des vecteurs non-aléatoires $x_n \in E$, on voit que $(P_p - 1) \Rightarrow$ BS (Banach-Saks) ou BS est la propriété suivante de E : toute suite bornée de E contient une sous-suite qui converge (C,1) fortement vers un élément de E. Pour la propriété BS voir [4], [3(f)]. On sait que BS entraîne la reflexivité de E (cf [15]; aussi [3(f)] pour une autre preuve simple). On démontrera par la suite (Prop.1) que tout espace E possède la propriété $(P_p^* - 1/p)$ pour $0 < p < 1$; une considération des v.a. réelles indépendantes et équiréparties (théorème de Marcinkiewicz) donne que aucun espace $E \neq \{0\}$ ne possède la propriété $(P_p - \alpha)$ pour $0 < p < 1$ et $0 < \alpha < 1/p$. Comme $(P_p - \alpha) \Rightarrow (P_p - \beta)$ pour $\alpha < \beta$ on voit que les propriétés $(P_p^* - \alpha)$ pour $0 < p < 1$ sont faciles à étudier. Ceci est essentiellement dû au fait que $\sum_n n^{-1/p} < \infty$ si $0 < p < 1$. Les mêmes considérations des v.a. réelles donnent que seules les propriétés $(P_p - \alpha)$, $1 \leq p < 2$, $\alpha \geq 1/p$ ou $p \geq 2$ et $\alpha > 1/2$ (de même pour $(P_p^* - \alpha)$) sont intéressantes; les autres cas pour $p \geq 1$ ne peuvent subsister dans aucun espace $E \neq \{0\}$. Par ailleurs, $(P_p - \alpha)$ avec $p \geq 1$ et $\alpha > 1$ est toujours vraie (de même pour $(P_p^* - \alpha)$) à cause de la relation

$$\int \sum_n n^{-\alpha} \|f_n\| \, dP = \sum_n n^{-\alpha} [f_n]_1$$

$$\leq \sum_n n^{-\alpha} [f_n]_p \leq M \sum_n n^{-\alpha} < \infty$$

(si $[f_n]_p \leq M$) d'où $\sum_n n^{-\alpha} \|f_n(\omega)\| < \infty$ p.s. et $\lim_{n\to\infty} n^{-\alpha} \sum_{j=1}^{n} f_n(\omega) = 0$ p.s. En résumé, les seuls cas qui restent à étudier sont $(P_p - \alpha)$, $1 \leq p < 2$ et $\frac{1}{p} \leq \alpha \leq 1$ ou $p \geq 2$ et $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ (de même pour $(P_p^* - \alpha)$). Notons aussi que $(\Omega) \Rightarrow (P_p^* - \alpha)$ avec $p \geq 2$ et $\alpha > 1/2$ et que

$$(P_p - \alpha) \Rightarrow (P_q - \alpha) \Rightarrow (P_q - \beta)$$

si $p \leq q$ et $\alpha < \beta$ (de même que pour $(P_p^* - \alpha)$).

Dans la suite on va montrer que l'espace hilbertien possède les propriétés (Q) et $(P_p^* - 1/p)$ pour tous p t.q. $1 < p < 2$. Le cas $(P_1^* - 1)$ reste ouvert, comme nous avons déjà mentionné. Dans une autre publication nous établirons que (Q) et $(P_p^* - 1/p)$, $1 < p < 2$, restent valable pour un espace L^α, $2 < \alpha < \infty$.

Si E est tel que $(P_p - \alpha)$ est vraie pour un $\alpha \leq 1$, alors E doit avoir la propriété suivante : de toute suite bornée $\{x_n\}$ de E, on peut tirer une sous-suite $y_k = x_{n_k}$ et un $x \in E$ t.q.

$\lim_{N\to\infty} N^{-\alpha} \sum_{k=1}^{N} (y_k - x) = 0$. On voit ceci en prenant $f_n(\omega) = x_n$ et en

s'assurant facilement que le seul choix de f dans ce cas est celui de $f(\omega) \equiv x$ pour un x convenable. De cette remarque on peut déduire deux choses: (1) il suffit de considérer les espaces E ayant la propriété BS ; (2) si $E = \ell^\alpha$, $1 < \alpha < 2$, et $p > \alpha$ alors E ne possède pas la propriété $(P_p - 1/p)$. Il suffit de prendre $x_n = (\delta_{k,n}) \in \ell^\alpha$ ($\delta_{k,n} = 1$ si $k = n$ et $= 0$ si $k \neq n$) et de se rendre compte que pour toute sous-suite x_{n_k}

$$N^{-1/p} \left\| \sum_{k=1}^{N} x_{n_k} \right\| = N^{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{p}} \to \infty \; . \; .$$

De même, on voit que $E = \ell^\alpha$, $1 < \alpha < 2$, ne possède pas la propriété (Q) non plus.

Faisons une dernière remarque. La fonction f qui figure dans les propriétés $(P_p - \alpha)$ pour $p \geq 1$ et $\alpha \leq 1$ sont en fait dans L_E^p et celle dans (Q) est forcément un élément de L_E^2. C'est une conséquence du lemme de Fatou car dans tous ces cas, l'on a

$$f = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} g_j \quad \text{avec} \quad \sup_j [g_j]_p = M < \infty$$

d'où $\displaystyle\int \|f\|^p \, dP \leq \liminf_{n\to\infty} \int \left\| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} g_j \right\|^p dP$

$$\leqslant \liminf_{n\to\infty} \int \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} ||g_j||^p \, dP \qquad \text{(car } p \geqslant 1)$$

$$\leqslant M < \infty .$$

Dans la section 3 nous démontrons les principaux résultats; les lemmes techniques nécessaires sont énoncés et prouvés dans la dernière section 4.

§3. Les principaux résultats.

Proposition 1.

La propriété $(P_p^* - 1/p)$, $0 < p < 1$, est valable (avec $f = 0$) pour tout espace de Banach E.

N.B. Comme noté auparavent, $(P_p^* - \alpha)$ avec $0 < p < 1$ et $\alpha \geqslant 1/p$ est alors valable pour tout E et $(P_p - \alpha)$ avec $0 < p < 1$ et $0 < \alpha \leqslant 1/p$ est valable pour aucun $E \neq \{0\}$.

Démonstration:

Soit $\{f_n\}$ une suite bornée dans L_E^p , $0 < p < 1$; grâce au lemme 2, §4, on peut choisir une sous-suite $\{f_{n_j}\}$ t.q. pour toute sous-suite $\{g_k\}$ de cette dernière on a :

(i) $\sum_k P\{||g_k|| > k^{1/p}\} < \infty$

(ii) $\sum_k k^{-1/p} \int_{\{||g_k|| \leqslant k^{1/p}\}} ||g_k|| \, dP < \infty$

De (i) et (ii) on a immédiatement que

$$\sum_k k^{-1/p} ||g_k(\omega)|| < \infty \quad \text{p.s.}$$

d'où

$$\lim_{N\to\infty} N^{-1/p} \sum_{k=1}^{N} g_k(\omega) = 0 \quad \text{p.s.}$$

Q.E.D.

Proposition 2.

La propriété $(P_p^* - 1/p)$, $1 < p < 2$, est vraie pour un espace hilbertien E.

Démonstration:

Soit $\{f_n\}$ une suite bornée dans L_E^p , $1 < p < 2$. En passant à une sous-suite, si nécessaire, on peut supposer que $f_n \to f$ faiblement dans L_E^p (cf §2). On peut ensuite trouver des fonctions simples $\{f_n'\}$ t.q. $[(f_n - f) - f_n']_p \leq 2^{-n}$; comme $f_n' \to 0$ faiblement dans L_E^p et $\sum_n ||(f_n - f) - f_n'|| < \infty$ p.s., il suffit de tirer une sous-suite convenable de $\{f_n'\}$. En d'autres termes, on peut supposer, sans perte de généralité, que la suite $f_n \to 0$ faiblement dans L_E^p et que chaque f_n est simple. Grâce aux lemmes 2 et 5 de §4, on peut trouver une sous-suite $\{f_{n_j}\}$ t.q. pour toute sous-suite $\{g_k\}$ de celle-ci on a :

(i) $$\sum_k k^{-2/p} \int_{\{||g_k|| \leq k^{1/p}\}} ||g_k||^2 \, dP < \infty$$

(ii) $$\sum_k k^{-1/p} \int_{\{||g_k|| > k^{1/p}\}} ||g_k|| \, dP < \infty$$

(iii) Si $\Theta_k = E(g_k | g_1 , \ldots , g_{k-1})$ alors

$$\sum_k k^{-1/p} \Theta_k \text{ converge p.s.}$$

Ecrivons $g_k = g_k' + g_k''$ avec $g_k' = g_k$ si $||g_k|| \leq k^{1/p}$ et $= 0$ autrement; aussi, posons $\Theta_k' = E(g_k' | g_1 , \ldots , g_{k-1})$, $\Theta_k'' = E(g_k'' | g_1 , \ldots , g_{k-1})$

On a alors

$$\sum_k k^{-1/p} (g_k - \Theta_k) = \sum_k k^{-1/p} (g_k' - \Theta_k') + \sum_k k^{-1/p} (g_k'' - \Theta_k'') .$$

La première série à droite converge p.s. grâce au lemme 3, §4 et la condition (i) ci-dessus. La deuxième série a droite converge absolûment p.s. à cause de la condition (ii) car

$$\sum_k k^{-1/p} \int ||g_k'' - \theta_k''|| \, dP \leq 2 \sum_k k^{-1/p} \int ||g_k''|| \, dP < \infty$$

Ainsi, la série à gauche converge p.s. d'où la convergence de $\sum_k k^{-1/p} g_k$ à cause de la condition (iii). Du lemme de Kronecker, on conclut que

$$\lim_N N^{-1/p} \sum_{k=1}^{N} g_k = 0 \quad \text{p.s.}$$

Q.E.D.

Proposition 3. (Suchanek [14])

L'espace hilbertien E possède la propriété (Q)

Démonstration:

On procède comme dans la démonstration précédente; on suppose que la suite donnée $\{f_n\}$ est telle que $f_n \to 0$ faiblement dans L^2_E et que chaque f_n est simple. Passons à une sous-suite $\{f_{n_k}\}$ telle que $\sum_j a_j \theta_j$ converge p.s. dès que $\sum_j |a_j|^2 < \infty$ où $a_j = E(f_{n_j} | f_{n_1}, \ldots, f_{n_{j-1}})$; ceci est possible grâce au lemme 5 de §4. Dans l'identité

$$\sum_j a_j f_{n_j} = \sum_j a_j (f_{n_j} - \theta_j) + \sum_j a_j \theta_j \quad ,$$

la première série à droite converge p.s. à cause du lemme 3, §4 et la deuxième série à droite converge p.s. par le choix de la sous-suite dès que $(a_j) \in \ell^2$. Ceci donne la convergence p.s. de la série à gauche pour chaque suite $(a_j) \in \ell^2$.

Q.E.D.

N.B. Les démonstrations précédentes sont exactement comme dans le cas des v.a. réelles; elles sont empruntées de mon article [3(c)]. L'effort nouveau principal est contenu dans le lemme 5, §4; il est dû à Suchanek [14]. Lemme 3 du §4 se généralise de diverses manières aux espaces uniformément convexes (cf. [12]). Si pour ces espaces , l'on peut établir des analogues du lemme 5, alors les propositions 2 et 3 seront acquises pour ces espaces (pour des valeurs convenables de p, $1 < p \leq 2$).

§4. Lemmes techniques.

Dans ce paragraphe nous donnons tous les lemmes nécessaires pour les démonstrations précédentes; certains sont donnés dans une forme plus générale que celle dont on a besoin pour cet article en vue d'utilisation dans des études ultérieures.

Lemme 1.

Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ et $0 < p < \infty$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(0) $$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^p \, \mu(dx) < \infty \quad ;$$

(i) $$\sum_n \mu\{|x| > n^{1/p}\} < \infty \quad ;$$

(ii) $$\sum_n \frac{1}{n^\alpha} \int_{|x| \leqslant n^\beta} |x|^\gamma \, \mu(dx) < \infty$$

pour tout (ou un) choix de $\alpha > 1$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ t.q.

$$\gamma\beta - \alpha + 1 = p\beta \quad ;$$

(iii) $$\sum_n \frac{1}{n^\alpha} \int_{|x| > n^\beta} |x|^\gamma \, \mu(dx) < \infty$$

pour tout (ou un) choix de $0 < \alpha < 1$, $0 < \gamma \leqslant p$, $\beta > 0$ t.q.

$$\gamma\beta - \alpha + 1 = p\beta \quad .$$

Démonstration:

Nous démontrons seulement l'équivalence de (0) et (ii); les autres équivalences se démontrent de la même manière. La série de (ii) s'écrit comme

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^\gamma \Big(\sum_{n \geqslant |x|^{1/\beta}} n^{-\alpha} \Big) \, \mu(dx)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |x|^{\gamma} \cdot (|x|^{1/\beta})^{-\alpha+1} \cdot \Theta(x) \cdot \mu(dx)$$

avec $0 < c_1 \leq \Theta(x) \leq c_2 < \infty$ d'où l'équivalence entre (0) et (ii).

Q.E.D.

Lemme 2.

Soit $f_n \in L_E^p$, $0 < p < \infty$, $\sup_n [f_n]_p < \infty$, E étant un espace de Banach quelconque. Alors pour chaque choix de α, β, γ satisfaisant les hypothèses données ci-dessous il existe une sous-suite $\{f_{n_j}\}$ t.q. pour toute sous-suite $\{g_k\}$ de $\{f_{n_j}\}$ on a les propriétés suivantes :

(i) $\sum_k P\{||g_k|| > k^{1/p}\} < \infty$;

(ii) $\sum_k \frac{1}{k^\alpha} \int_{\{||g_k|| \leq k^\beta\}} ||g_k||^\gamma \, dP < \infty$

si $\alpha > 1$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$, t.q. $0 < \gamma\beta - \alpha + 1 \leq p\beta$;

(iii) $\sum_k \frac{1}{k^\alpha} \int_{\{||g_k|| > k^\beta\}} ||g_k||^\gamma \, dP < \infty$

si $0 < \alpha < 1$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ t.q. $0 < \gamma\beta - \alpha + 1 \leq p\beta$.

(iv) La suite $\{||h_k||^p\}$ est uniformément intégrable où $h_k = f_{n_k}$ si $||f_{n_k}|| \leq k^{1/p}$ et $= 0$ autrement.

Démonstration:

Soit ν_n la loi de la v.a. (réelle) $\omega \to ||f_n(\omega)||^p$. La famille $\{\nu_n\}$ est équitendue (relativement compacte) car $\nu_n([0 , N]) = P\{||f_n||^p \geq N\} \leq \frac{1}{N} \int ||f_n||^p \, dP < \varepsilon$ pour tout n si $N \geq N_\varepsilon$. Donc (cf [2] pour les questions de convergence des lois) une sous-suite $\{\nu_{n_k}\}$ converge (étroitement) vers une loi ν sur $\mathbb{R}$ c.à.d. $\int f(x) \, \nu_{n_k}(dx) \to \int f(x) \, \nu(dx)$ pour toute fonction f continue et bornée sur $\mathbb{R}$; aussi

$$\int |x| \ \nu(dx) \leqslant \liminf_{k\to\infty} \int |x| \ \nu_{n_k}(dx)$$
$$= \liminf_{k\to\infty} \int ||f_{n_k}||^p \ dP < \infty$$

Pour simplifier l'écriture, on supposera que la suite $\{\nu_n\}$ elle-même converge vers ν. On va montrer que pour chacune des conditions (i)-(iv), il existe une sous-suite convenable.

Comme $\nu(F) \geqslant \limsup_{n\to\infty} \nu_n(F)$ pour tout fermé F, on a, pour tout $k = 1,2,\ldots$ un n_k t.q.

$$\nu\{|x| \geqslant k\} + 2^{-k} > \nu_n \{|x| \geqslant k\}$$

pour tout $n \geqslant n_k$; en prenant $n_1 < n_2 < \ldots$ on aura une sous-suite $\{n_k\}$ t.q.

$$P\{||f_n||^p \geqslant k\} = \nu_n\{|x| \geqslant k\} < \nu\{|x| \geqslant k\} + 2^{-k}$$

pour $n \geqslant n_k$, $k = 1,2,\ldots$. Pour cette sous-suite $\{f_{n_k}\}$, (i) sera vérifiée grâce au Lemme 1(i) (avec $p = 1$).

Les preuves pour (ii) et (iii) sont du même type ; donnons celle pour (ii). Notons d'abord que

$$\int_{|x| \leqslant A} |x|^t \ \nu(dx) \geqslant \limsup_{n\to\infty} \int_{|x| \leqslant A} |x|^t \ \nu_n(dx)$$

pour $\forall t > 0$, $A > 0$ d'où l'existence de $n_1 < n_2 < \ldots.$ t.q. pour $n \geqslant n_k$, $k = 1,2,\ldots$

$$\int_{||f_n|| \leqslant k^\beta} ||f_n||^\gamma \ dP = \int_{|x| \leqslant k^{\beta p}} |x|^{\gamma/p} \ \nu_n(dx)$$
$$\leqslant \int_{|x| \leqslant k^{\beta p}} |x|^{\gamma/p} \ \nu(dx) + 2^{-k}$$

Lemme 1(ii) (pour le cas p = 1) conclut la preuve.

Pour (iv), choisissons une fonction $\psi : [0, \infty[\to [0, \infty[$ convexe, croissante, $\psi(0) = 0$, $\psi(t)/t \to \infty$ lorsque $t \to \infty$ et t.q. $\int \psi(|t|)\ \nu(dt) < \infty$; ceci est possible car $\int |t|\ \nu(dt) < \infty$. Montrons que pour un bon choix de $\{n_k\}$

$$\sup_k \int \psi(||h_k||^p)\ dP < \infty$$

ce qui établira (iv). Ici aussi, notons que

$$\int_{|x| \leqslant A} \psi(|x|)\ \nu(dx) \geqslant \limsup_{n\to\infty} \int_{|x| \leqslant A} \psi(|x|)\ \nu_n(dx)$$

pour tout $A > 0$; donc l'on peut trouver $n_1 < n_2 < \ldots$ t.q. pour $n \geqslant n_k$, $k = 1,2,\ldots$

$$\begin{aligned}\int_{||f_n|| \leqslant k^{1/p}} \psi(||f_n||^p)\ dP &= \int_{|x| \leqslant k} \psi(|x|)\ \nu_n(dx)\\ &\leqslant \int_{|x| \leqslant k} \psi(|x|)\ \nu(dx) + 1\\ &\leqslant \int \psi(|x|)\ \nu(dx) + 1 < \infty\end{aligned}$$

La suite $\{n_k\}$ donnera le résultat voulu.

Q.E.D.

<u>N.B.</u> Les énoncés de type (i)-(iii) du lemme 2 se trouvent dans [3(c)], [9], [10]. La propriété (iv) du lemme 2 était notée par [14] (aussi [10]); nous n'aurons pas besoin de celle-ci dans cet article. Les démonstrations présentées ici sont nouvelles; elles montrent que la vraie source de toutes ces propriétés est le fait qu'une certaine famille de loi est équitendue.

<u>Lemme 3</u>.

Soit $f_n \in L^2_E$, $n = 1,2,..,$ E hilbertien; alors la convergence de

$\sum_n \int ||f_n||^2 \, dP$ entraîne la convergence p.s. de $\sum_n (f_n - \Theta_n)$ où $\Theta_n = E(f_n | A_{n-1})$ où $A_{n-1} \subset \sigma\{f_1, \ldots, f_{n-1}\}$, $A_0 = \{\phi, \Omega\}$.

Démonstration:

On note simplement que si $g_n = f_n - \Theta_n$ alors $M_n = \sum_{k=1}^{n} g_k$ est une martingale à valeurs dans E t.q.

$$\int ||M_n||^2 \, dP = \sum_{1 \leq j,k \leq n} \int (g_j | g_k) \, dP$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int ||g_k||^2 \, dP$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \int ||f_k||^2 \, dP$$

car pour $j \neq k$, $\int (g_j | g_k) \, dP = 0$ et

$$\int ||g_k||^2 \, dP = \int ||f_k||^2 \, dP - \int ||\theta_k||^2 \, dP .$$

Comme E est hilbertien (donc réflexif) un théorème de convergence des martingales à valeurs dans E garantit l'existence p.s. de $\lim_{n\to\infty} M_n$ (cf [11]).

N.B. Ce lemme se généralise au cas ou $f_n \in L_E^p$ et E est p-lisse, $1 < p \leq 2$ (en anglais : p-smooth) de manière suivante :

$$\sum_n \int ||f_n||^p \, dP < \infty \Rightarrow \sum_n (f_n - \Theta_n) \text{ converge p.s.}$$

C'est une conséquence immédiate d'un théorème de Pisier [12] en notant simplement que pour $p \geq 1$

$$\int ||f_n - \Theta_n||^p \, dP \leq C(p) \cdot \int ||f_n||^p \, dP$$

pour une constante C(p). L'espace hilbertien est 2-lisse et un espace L^α, $\alpha > 1$, est p-lisse pour $p = \min(\alpha, 2)$.

Lemme 4. (Suchanek [14])

Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions simples dans L^1_E (E un espace de Banach quelconque) t.q. $\{||f_n||\}$ est uniformément intégrable. Il existe alors une sous-suite $\{f_{n_k}\}$ t.q. pour toute sous-suite $\{g_j\}$ de celle-ci on a

$$\sup_j ||E(g_j|g_1, \ldots, g_{j-1})|| \leqslant \sup_j E(||g_j|| \, |g_1, \ldots, g_{j-1}) < \infty \text{ p.s.}$$

Démonstration:

En passant à une sous-suite si nécessaire, l'on peut supposer, sans perte de généralité, que $||f_n|| \to \alpha$ faiblement dans L^1. Posons $n_1 = 1$ et définissons n_k inductivement comme $n_k > n_{k-1}$ et t.q.

$$E(||f_n|| \, |A) \leqslant E(\alpha|A) + 1 \text{ p.s.}$$

pour $n \geqslant n_k$ et A une α-algèbre quelconque contenue dans $\sigma\{f_{n_1}, \ldots, f_{n_{k-1}}\}$. Ceci est possible car cette dernière est une σ-algèbre finie (ainsi que A) et que pour $\omega \in A$ de A avec $P(A) > 0$,

$$E(||f_n|| \, |A)(\omega) = \frac{1}{P(A)} \int_A ||f_n|| \, dP \to \frac{1}{P(A)} \int_A \alpha \, dP = E(\alpha|A)(\omega)$$

La sous-suite $\{f_{n_k}\}$ satisfait la conclusion du lemme 4. Vérifions ceci pour $g_k = f_{n_k}$, le cas d'une sous-suite quelconque étant similaire. On a

$$\sup_j E(||g_j|| \, |g_1, \ldots, g_{j-1}) \leqslant \sup_j E(\alpha|g_1, \ldots, g_{j-1}) + 1 < \infty \quad \text{p.s.}$$

car $\lim_j E(\alpha|g_1, \ldots, g_{j-1})$ existe p.s.

Q.E.D.

Lemme 5. (Suchanek [14])

Soit E un espace hilbertien et $\{f_n\}$ une suite de fonctions simples dans L^1_E t.q. $f_n \to 0$ faiblement dans L^1_E. Il existe alors une sous-suite $\{f_{n_k}\}$ t.q. pour toute suite $(a_k) \in \ell^2$ et pour toute sous-suite $\{g_j\}$ de $\{f_{n_k}\}$ on a la convergence p.s. de $\sum_j a_j \, \Theta_j$ où $\Theta_j = E(g_j|g_1, \ldots, g_{j-1})$.

Démonstration:

Le raisonnement est comme dans la démonstration précédente. Mettons $n_1 = 1$ et définissons n_k inductivement comme $n_k > n_{k-1}$ t.q. pour $n \geq n_k$, on a (où $(\cdot|\cdot)$ est le produit scalaire de E)

$$\left|\left(\frac{1}{P(A)} \int_A f_n \, dP \;\middle|\; x\right)\right| \leq 2^{-k} \quad \ldots . \quad (*)$$

pour tout $A \in \sigma\{f_{n_1}, \ldots, f_{n_{k-1}}\}$ avec $P(A) > 0$ (une σ-algèbre finie) et tout $x \in E$ qui est de la forme $\frac{1}{P(B)} \int_B f_{n_j} \, dP$, $P(B) > 0$, avec $j \leq k-1$ et $B \in \sigma\{f_{n_1}, \ldots, f_{n_{j-1}}\}$; notons que l'ensemble de ces $x \in E$ est de cardinalité finie. Nous pouvons assurer de plus que les $\{n_k\}$ sont tels que l'affirmation du lemme 4 est vraie aussi. Vérifions que ce choix de $\{n_k\}$ est suffisant. Pour cela, nous prenons le cas de $g_k = f_{n_k}$; pour d'autres sous-suites de $\{f_{n_k}\}$ on peut procéder de même manière. En posant $\Theta_k = E(g_k | g_1, \ldots, g_{k-1})$ on voit que

$$|(\Theta_k(\omega) | \Theta_j(\omega))| \leq 2^{-k} \quad \text{p.s.}$$

si $1 \leq j \leq (k-1)$ grâce à la condition (*) et que $\sup_k \|\Theta_k(\omega)\| < \infty$ p.s. grâce au lemme 4. La convergence p.s. de $\sum_k a_k \Theta_k$ suit de la remarque élémentaire suivante : si $x_k \in E$ t.q. $b_{jk} = |(x_j|x_k)|$ satisfait $\sup_k b_{kk} < \infty$ et $\sum_{1 \leq j \neq k < \infty} b_{jk}^2 < \infty$ alors $\sum_k a_k x_k$ converge dans E pour tout choix de $(a_k) \in \ell^2$. Il suffit de majorer l'expression

$$\left\|\sum_{k=M}^{N} a_k x_k\right\|^2 = \sum_{M \leq j, k \leq N} a_j \bar{a}_k (x_j|x_k) \quad \text{par}$$

$$\sum_{M}^{N} b_{kk} |a_k|^2 + \sum_{M \leq j \neq k \leq N} |a_j| \, |a_k| \, b_{jk}$$

et utiliser le lemme de Schwarz.

Q.E.D.

N.B. Les raisonnements utilisés dans les deux démonstrations précédentes étaient initiés par Komlos [10]. C'est la généralisation du lemme 5 aux espaces de Banach autres que les hilbertiens qui est une des pierres d'achoppement de la théorie si l'on veut la dévélopper par les techniques de cet article.

Références.

[1] Aldous, D.J.
Limit theorems for subsequences of arbitrarily-dependent sequences of random variables. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 40, 59-82 (1977)

[2] Billingsley, P.
Convergence of probability measures. Wiley, N.Y. (1968)

[3] Chatterji, S.D.
(a) Un principe de sous-suites dans la théorie des probabilités. Séminaire de Prob. VI, Univ. de Strasbourg; Lecture Notes in Maths. No. 258, 72-89, Springer-Verlag, Berlin (1972)

(b) Les martingales et leurs applications analytiques. Lecture Notes in Maths. No. 307, Springer-Verlag, Berlin (1973)

(c) A general strong law. Inventiones Math. 9, 235-245 (1970)

(d) A principle of subsequences in probability theory : the central limit theorem. Advances in Maths. 13,31-54 (1974); ibid. 14, 266-269 (1974)

(e) A subsequence principle in probability theory II: the law of the iterated logarithm. Inventiones Math. 25, 241-251 (1974)

(f) On a theorem of Banach and Saks. Linear operators and approximation II Ed. Butzer and Sz.-Nagy, 565-578 (1974)

(g) Weak convergence in certain special Banach spaces. MRC Technical Summary Report # 443, Madison, Wisconsin (1963).

[4] Diestel, J.
Geometry of Banach spaces - selected topics. Lecture Notes in Maths. No. 485, Springer-Verlag, Berlin (1975).

[5] Diestel, J. and Uhl, J.J. (Jr.)
Vector measures. Math. Surveys no. 15, American Mathematical Society, Providence (1977)

[6] Dinculeanu, N.
Vector measures. Pergamon Press, Oxford (1967)

[7] Erdös, P. and Magidor, M.
A note on regular methods of summability and the Banach-Saks property. Proc. Amer. Math. Soc. 59, 232-234 (1976).

[8] Figiel T. and Sucheston L.
An application of Ramsey sets in analysis. Advances in Maths. 20, 103-105 (1976)

[9] Gaposhkin, V.F.
Convergence and limit theorems for sequences of random variables. Theor. Prob. Appl. 17, 379-399 (1972)

[10] Komlòs, J.
A generalisation of a problem of Steinhaus. Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 18, 217-229 (1967)

[11] Neveu, J.
Martingales à temps discret. Masson, Paris (1972)

[12] Pisier, G.
Martingales with values in uniformly convex spaces. Israel Jr. of Maths. 20, 326-350 (1975)

[13] Révész, P.
On a problem of Steinhaus. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 16, 310-318 (1965)

[14] Suchanek, Ana Maria
On almost sure convergence of Cesaro averages of subsequences of vector-valued functions. Preprint (1977-78)

[15] Waterman, D. and Nishiura, T.
Reflexivity and summability. Studia Math. 23, 53-57 (1963)

S.D. Chatterji
Dépt. de Mathématiques
Ecole Polytechnique Fédérale
de Lausanne
61, av. de Cour

1007 Lausanne, Suisse

P.S. Je viens de reçevoir un "preprint" de D.J.H. Garling, St. John's College, Cambridge qui donne des résultats qui vont beaucoup plus loin que ceux de cet article. En particulier, il suit de ses résultats que si un espace E est p-lisse, $1 < p \leq 2$, alors E possède la propriété $(P_p^* - \alpha)$ pour $\alpha > 1/p$. Mais la démonstration d'une généralisation du théorème de Komlos pour les espaces E uniformément convexes souffre de même défaut que celui indiqué ci-dessus.