

SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JEAN-MICHEL BISMUT

Problèmes à frontière libre et arbres de mesures

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 13 (1979), p. 495-520

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1979__13__495_0>

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

PROBLEMES A FRONTIERE LIBRE ET ARBRES DE MESURES

par Jean-Michel Bismut

Une classe importante de problèmes d'optimisation stochastique consiste dans la détermination de frontières optimales associées à l'arrêt ou la transition d'une loi de processus de Markov vers une autre loi. Les problèmes de frontière les plus simples sont les problèmes d'arrêt optimal : ils ont reçu une solution complète dans [6]. Une autre classe de problèmes est la détermination de frontières de transition pour des processus alternants [2]. Dans ce cas on considère deux lois de processus de Markov P et P' . On construit un nouveau processus qui suit la loi de P jusqu'au temps d'arrêt T_1 , la loi de P' jusqu'au temps d'arrêt T_2 , la loi de P jusqu'au temps d'arrêt T_3 etc... On doit alors choisir $T_1, T_2, \dots, T_n \dots$ de manière à maximiser :

$$(0.1) \quad E\left(\sum_{i=1}^{+\infty} (g'(x_{T_{2i-1}}) + g(x_{T_{2i}}))\right)$$

Un tel problème a reçu une solution complète dans [2] par des techniques de balayage. L'étude fine des relations d'ordre sur les mesures associées aux cônes K et K' de fonctions fortement surmédianes pour P et P' permet de résoudre complètement le problème. Si R et R' sont les opérateurs de réduite relativement à K et K' , on se ramène en effet à étudier le système

$$(0.2) \quad \begin{aligned} f &= R(f' + g) \\ f' &= R'(f + g') \end{aligned}$$

On démontre alors sous des conditions très faibles l'existence d'une solution minimale pour le système (0.2) et la régularité des solutions lorsque les processus considérés sont de Feller et vérifient une hypothèse de "réduite continue". Cette hypothèse est en particulier vérifiée par les diffusions de Stroock et Varadhan [13] et les diffusions avec sauts de Stroock [14].

Nous allons étudier ici un problème plus difficile. On va en effet se donner trois lois (où $d \geq 3$ lois) de processus de Markov droits P^1, P^2, P^3 . A partir d'une chaîne croissante de temps d'arrêt T_1, T_2, \dots, T_n et d'une suite (m_1, m_2, \dots, m_n) de variables aléatoires à valeurs dans $\{1, 2, 3\}$ telle que $m_1 = 1$ et que m_{i+1} est F_{T_i} -mesurable, on construit un processus cad qui suit la loi P^{m_1}

pour $t \leq T_1$, la loi P^{m_2} pour $T_1 \leq t \leq T_2$, la loi P^{m_3} pour $T_2 \leq t \leq T_3 \dots$

Si $\{g^{ij}\}_{i \neq j}$ est une famille de six fonctions, on veut maximiser en

$(T_1, \dots, T_n, \dots), (m_1, \dots, m_n, \dots)$ le critère

$$(0.3) \quad E\left(\sum_1^{+\infty} g^{m_i m_{i+1}}(x_{T_i})\right).$$

On doit ainsi déterminer six frontières de transition A^{ij} de i vers j .

On pourra se représenter P^1, P^2, P^3 comme les différents régimes de fonctionnement d'un "engin" dans un environnement aléatoire. Compte tenu des coûts de transition d'un régime vers l'autre, ou des coûts de fonctionnement de chaque régime -- voir [2] - section 3-- on doit déterminer les frontières optimales de transition.

Dans la section 1, on pose les hypothèses du problème. On introduit une suite de fonctions fortement surmédianes relativement à P^1, P^2, P^3 , qu'on note (f_n^1, f_n^2, f_n^3) , et on exprime ces fonctions à l'aide de la notion d'arbre de mesures. On donne des conditions sous lesquelles cette suite converge vers (f^1, f^2, f^3) , et on montre que ce triplet est la solution minimale du système

$$(0.4) \quad f^i = R^i[(f^j + g^{ij}) \vee (f^k + g^{ik})] \quad \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}.$$

Dans la section 2, on étudie la régularité des solutions de (0.4), et on démontre l'existence de solutions pour le problème de maximisation de (0.3). Dans la section 3, on étudie la dépendance continue des solutions de (0.4) en fonction des données $\{g^{ij}\}$.

On utilisera constamment les résultats de [2].

1. HYPOTHESES.

E désigne un espace lusinien métrisable, auquel on adjoint un point cimetière δ où toutes les fonctions définies sur E s'annulent.

Ω est l'espace des fonctions continues à droite définies sur \mathbb{R}^+ à valeurs dans $E \cup \{\delta\}$.

x^1, x^2, x^3 sont trois processus de Markov droits [15], transients, à durée de vie finie, ayant comme cimetière δ .

$P_\lambda^1, P_\lambda^2, P_\lambda^3$ sont les mesures sur Ω associées à x^1, x^2, x^3 , quand la mesure d'entrée est λ .

On fait l'hypothèse que les fonctions excessives pour x^1, x^2, x^3 sont boréliennes.

Pour $i=1,2,3$, K^i est le cône des fonctions fortement surmédianes pour le processus x^i .

On pose alors la définition suivante :

DEFINITION 1.1. : Si λ et μ sont des mesures bornées sur E on écrit $\lambda < \mu^i$ si pour tout $f \in K^i$ bornée, on a :

$$(1.1) \quad \langle \mu, f \rangle \leq \langle \lambda, f \rangle$$

Par le Théorème de Rost [1], [12], si λ et μ sont ≥ 0 , pour que $\lambda < \mu^i$, il faut et il suffit qu'il existe un temps d'arrêt T randomisé pour P_λ^i tel que pour h borélienne bornée on ait

$$(1.2) \quad \langle \mu, h \rangle \geq E^\lambda \int_{T < +\infty} P_\lambda^i h(x_T)$$

R^i est l'opérateur de réduite associé à K^i . Si h est borélienne, $R^i h$ est borélienne. En effet ce résultat est vrai quand h est continue, car $R^i h$ est excessive. On applique alors le Théorème des classes monotones [8]-I. T 20.

De plus par les résultats de Mertens et Rost [17]-[12], si λ est une mesure bornée ≥ 0 sur E , on a :

$$(1.3) \quad \langle \lambda, R^i h \rangle = \sup_{\substack{\mu \geq 0 \\ i \\ \lambda < \mu}} \langle \mu, h \rangle$$

a) Définition des arbres.

On considère un arbre dont les branches sont construites de la manière suivante :

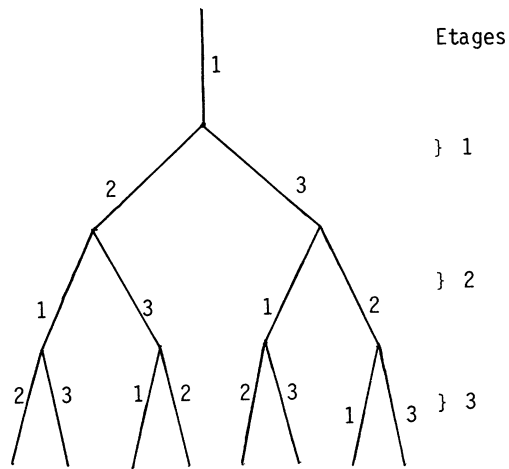


Figure 1

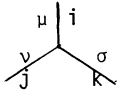
- chaque branche est indexée par l'un des indices 1,2,3.
- la branche d'indice i se divise en deux branches d'indices j et k avec $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$.

Le type de l'arbre est l'indice de la branche mère (sur la figure 1, il est de type 1)

On définit alors les arbres de mesures.

DEFINITION 1.2. : Soit λ une mesure ≥ 0 bornée sur E . On appelle arbre de mesures de type i et d'origine λ la donnée d'une famille de mesures bornées ≥ 0 indicées par les branches de l'arbre telle que :

a) la branche mère porte la mesure λ .

b) Si  est un noeud de l'arbre, si μ, ν, σ sont les mesures associées aux branches $\uparrow, /, \backslash$, on a

$$(1.4) \quad \mu < \nu + \sigma$$

L'ensemble des arbres de mesure de type i et d'origine λ est noté A_λ^i .

La longueur $|M|$ d'un arbre M est le nombre minimum d'étages (voir figure 1) tel que pour les étages de rang strictement supérieur, les mesures indicées par les branches de ces étages soient nulles.

La masse $\|M\|$ d'un arbre est définie par

$$(1.5) \quad \|M\| = \sum_{\mu \in M} |\mu|$$

(on ne compte pas λ dans (1.5)).

$|M|$ et $\|M\|$ peuvent être infinis.

A tout arbre de mesures M on associe six mesures. En effet, pour tout couple d'indices (i,j) , avec $(i,j) \in \{1,2,3\}$, $i \neq j$, on définit la mesure μ_{ij} par

$$(1.6) \quad \mu_{ij} = \sum_{\mu \in M} \mu$$


(i.e. on ne somme que les mesures indicées par les branches j provenant d'une branche i)

Soit (g^{ij}) six fonctions boréliennes bornées indicées par $(i,j) \in \{1,2,3\}$ avec $i \neq j$.

Tout arbre M de masse finie opère sur (g^{ij}) par

$$(1.7) \quad \langle M, (g^{ij}) \rangle = \sum_{\mu} \mu^{ij} g^{ij}$$

b) Un schéma itératif

On définit par récurrence la suite de fonctions

$$(1.8) \quad \begin{aligned} f_1^i &= R^i(g^{ij} \vee g^{ik}) \\ f_{n+1}^i &= R^i((f_n^j + g^{ij}) \vee (f_n^k + g^{ik})) \quad \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}. \end{aligned}$$

On a alors le résultat suivant :

PROPOSITION 1.1. : Pour toute mesure ≥ 0 bornée λ , on a

$$(1.9) \quad \langle \lambda, f_n^i \rangle = \sup_{\substack{M \in A_{\lambda}^i \\ |M| \leq n}} \langle M, (g^{kl}) \rangle$$

Preuve : On raisonne par récurrence sur n . On sait que par (1.3)

$$(1.10) \quad \langle \lambda, f_1^i \rangle = \sup_{\tilde{\mu} \geq 0} \sup_{\lambda \leq \tilde{\mu}} \langle \tilde{\mu}, g^{ij} \vee g^{ik} \rangle$$

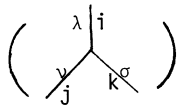
Si $\tilde{\mu}$ vérifie les conditions de (1.10), on pose

$$(1.11) \quad v = \int g^{ij} \tilde{\mu} \quad \sigma = \int g^{ik} \tilde{\mu}$$

Donc
(1.12)

$$\lambda \leq v + \sigma$$

L'arbre $M =$



est donc de longueur 1 et appartient

à A_{λ}^i . De plus

$$(1.13) \quad \langle M, (g^{kl}) \rangle = \langle \tilde{\mu}, g^{ij} \vee g^{ik} \rangle$$

Donc

$$(1.14) \quad \langle \lambda, f_1^i \rangle = \sup_{\substack{M \in A_\lambda^i \\ |M| \leq 1}} \langle M, (g^{kj}) \rangle$$

Inversement soit $M = \begin{matrix} & \lambda & i \\ & | & | \\ v & j & k \\ & \sigma & \end{matrix}$ un arbre $\in A_\lambda^i$ de longueur 1. Alors comme $\lambda < v + \sigma$, on a

$$(1.15) \quad \begin{aligned} \langle \lambda, f_1^i \rangle &\geq \langle v + \sigma, f_1^i \rangle = \langle v, f_1^i \rangle + \langle \sigma, f_1^i \rangle \\ &\geq \langle v, g^{ij} \rangle + \langle \sigma, g^{ik} \rangle = \langle M, (g^{kj}) \rangle \end{aligned}$$

De (1.14), (1.15), on tire donc l'égalité dans (1.9) pour $n = 1$.

Supposons le résultat vrai jusqu'à l'ordre n . On a encore :

$$(1.16) \quad \langle \lambda, f_{n+1}^i \rangle = \sup_{\substack{M \in A_\lambda^i \\ |M| \leq 1}} \langle M, [f^j + g^{ij}, f^k + g^{ik}] \rangle$$

ou M n'agit effectivement que sur les deux fonctions $f^j + g^{ij}, f^k + g^{ik}$.

(1.16) peut s'écrire :

$$(1.17) \quad \langle \lambda, f_{n+1}^i \rangle = \sup_{\substack{v, \sigma > 0 \\ \lambda < v + \sigma}} (\langle v, f_n^j + g^{ij} \rangle + \langle \sigma, f_n^k + g^{ik} \rangle)$$

En appliquant la récurrence pour calculer $\langle v, f_n^j \rangle$ et $\langle \sigma, f_n^k \rangle$, on vérifie qu'en juxtaposant à l'arbre M de longueur 1 des arbres de longueur n , on a encore (1.9). \square

La formule (1.9) a une interprétation très simple à l'aide de temps d'arrêt.

En effet par [17]-[12], on sait que pour h borélienne bornée,

$$(1.18) \quad \langle \lambda, R^j h \rangle = \sup_T E_\lambda^{P^j} 1_{T < +\infty} h(X_T)$$

On peut donc, en remplaçant les opérateurs R^j par leurs expression (1.18), exprimer chaque $\langle \lambda, f_n^i \rangle$ à l'aide d'une chaîne de temps d'arrêt T_1, \dots, T_n .

Pour simplifier, on écrira seulement l'expression de $\langle \lambda, f_2^1 \rangle$. On a :

$$(1.19) \quad \langle \lambda, f_2^1 \rangle = \sup E_\lambda^{P^1} (1_{T_1 < +\infty} [(g^{1j} + f_1^j) \vee (g^{1k} + f_1^k)](X_{T_1}))$$



On vérifie trivialement qu'on peut supposer que $[T_i] = [T_{ij}] \cup [T_{ik}]$, où T_{ij} et T_{ik} sont des temps d'arrêt de graphes disjoints, et qu'alors

$$(1.20) \quad \langle \lambda, f_2^i \rangle = \text{Sup } E^{P^\lambda} [1_{T_{ij} < +\infty} (g^{ij} + f_1^j)(x_{T_{ij}}) + 1_{T_{ik} < +\infty} (g^{ik} + f_1^k)(x_{T_{ik}})]$$

et donc

$$(1.21) \quad \langle \lambda, f_2^i \rangle = \text{Sup } E [1_{T_{ij} < +\infty} (g^{ij}(x_{T_{ij}})) + 1_{T_3 < +\infty} (g^{ji} \vee g^{jk})(x_{T_3}) + 1_{T_{ik} < +\infty} (g^{ik}(x_{T_{ik}})) + 1_{T_3 < +\infty} (g^{ki} \vee g^{kj})(x_{T_3})]$$

où le processus a la loi P^1 jusqu'au temps $T_i = T_{ij} \wedge T_{ik}$, la loi $P_{x_{T_i}}^j$ jusqu'au temps T_3 si $T_i = T_{ij}$, la loi $P_{x_{T_i}}^k$ jusqu'au temps T_3 si $T_i = T_{ik}$.

La notion d'arbre de mesures est ainsi intuitivement justifiée.

c) Convergence de la suite

Comme les g^{ij} sont nulles en δ , les $\{f_n^i\}$ sont ≥ 0 .
 On vérifie immédiatement qu'elles forment une suite croissante.
 Elles convergent donc vers les fonctions $\{f^i\}$ qui sont fortement surmédianes par rapport à x^i et ≥ 0 . On a immédiatement

THEOREME 1.1. : pour toute mesure ≥ 0 finie λ , on a

$$(1.22) \quad \langle \lambda, f^i \rangle = \text{Sup}_{\substack{M \in A_\lambda^i \\ |M| < +\infty}} \langle M, g^{ij} \rangle$$

De plus les $\{f^i\}$ sont solution du système de trois équations

$$(1.23) \quad f^i = R^i((f^j + g^{ij}) \vee (f^k + g^{ik}))$$

Preuve : c'est immédiat par passage à la limite dans (1.8) et (1.9) \square .

d) Une formule pour les $\{f^i\}$.

On va maintenant donner une formule d'une remarquable simplicité pour les $\{f^i\}$. On suppose en effet que les $\{f^i\}$ sont bornées.

On a alors trivialement

$$(1.24) \quad f^i - f^j \geq g^{ij}$$

Inversement si on suppose qu'il existe des $\tilde{f}^i \in K^i \geq 0$ bornées telles que

$$(1.25) \quad \tilde{f}^i - \tilde{f}^j \geq g^{ij}$$

on vérifie par récurrence que $f_n^i \leq \tilde{f}^i$, et donc que les $\{f^i\}$ sont bornées. La condition d'interpolation (1.25) est donc nécessaire et suffisante pour que les $\{f^i\}$ soient bornées.

On a alors le résultat très simple suivant :

PROPOSITION 1.2. : Soit λ une mesure ≥ 0 finie, M un élément de A_λ^i de masse finie. Alors on a :

$$(1.26) \quad \begin{aligned} \lambda \left\langle \begin{array}{c} i \\ \mu \end{array} \right\rangle_{ij} - \mu \left\langle \begin{array}{c} j \\ \mu \end{array} \right\rangle_{ji} + \mu \left\langle \begin{array}{c} i \\ \mu \end{array} \right\rangle_{ik} - \mu \left\langle \begin{array}{c} k \\ \mu \end{array} \right\rangle_{ki} \\ 0 \left\langle \begin{array}{c} j \\ \mu \end{array} \right\rangle_{ji} - \mu \left\langle \begin{array}{c} i \\ \mu \end{array} \right\rangle_{ij} + \mu \left\langle \begin{array}{c} j \\ \mu \end{array} \right\rangle_{jk} - \mu \left\langle \begin{array}{c} k \\ \mu \end{array} \right\rangle_{kj} \\ 0 \left\langle \begin{array}{c} k \\ \mu \end{array} \right\rangle_{ki} - \mu \left\langle \begin{array}{c} i \\ \mu \end{array} \right\rangle_{ik} + \mu \left\langle \begin{array}{c} k \\ \mu \end{array} \right\rangle_{kj} - \mu \left\langle \begin{array}{c} j \\ \mu \end{array} \right\rangle_{jk} \end{aligned}$$

Preuve : Nous donnons une démonstration rapide de ce résultat.

Démontrons la première ligne de (1.26). Dans la somme donnant les μ^{ij} et μ^{ik} se trouvent incorporées les mesures ν et σ apparaissant sur la tête de l'arbre



telles que $\lambda \left\langle \begin{array}{c} i \\ \nu + \sigma \end{array} \right\rangle$. Il suffit donc de démontrer la ligne 1 de (1.26) en remplaçant

λ par 0, et en ne comptant que les mesures apparaissant dans les étages ≥ 2 . On remplace donc μ^{ij} et μ^{ik} par $\tilde{\mu}^{ij}$ et $\tilde{\mu}^{ik}$.

Les mesures apparaissant dans $\tilde{\mu}^{ij}$ ou $\tilde{\mu}^{ik}$ se trouvent placées sur l'arbre selon les deux schémas suivants

$$(1.27) \quad \begin{array}{cc} \begin{array}{c} \nu \quad j \\ \epsilon \quad | \\ \mu \quad i \\ \nu \quad j \quad \sigma \\ \quad \quad k \end{array} & \begin{array}{c} \quad \quad k \\ \quad \quad \epsilon \\ \mu \quad i \\ \nu \quad j \quad \sigma \\ \quad \quad k \end{array} \end{array}$$

et donc

$$(1.28) \quad \mu \left\langle \begin{array}{c} j \\ \mu \end{array} \right\rangle_{ji} + \mu \left\langle \begin{array}{c} k \\ \mu \end{array} \right\rangle_{ki} \left\langle \begin{array}{c} i \\ \mu \end{array} \right\rangle_{ij} + \tilde{\mu}^{ij} + \tilde{\mu}^{ik}.$$

Comme la masse de M est finie, on peut bien écrire (1.28) sous la forme (1.26).

On démontre les autres lignes de la même manière. \square

On a alors le résultat fondamental suivant :

THEOREME 1.2. : Pour toute mesure $\lambda \geq 0$ finie, on a

$$(1.29) \quad \langle \lambda, f^i \rangle = \text{Sup}_{\Sigma_{\mu}} \sum_{ij} \mu^{ij} g^{ij}$$

où les μ^{ij} sont des mesures ≥ 0 finies telles que (1.26) est vérifiée.

Preuve : Par le Théorème 1.1 et la Proposition 1.2, $\langle \lambda, f^i \rangle$ est inférieur au membre de droite de (1.29). Montrons l'inégalité inverse.

Soit donc (μ^{ij}) une famille de mesures ≥ 0 finies vérifiant (1.26).

Comme les f^j sont bornées, on a :

$$(1.30) \quad \begin{aligned} \langle \lambda, f^i \rangle &\geq \langle \mu^{ij} - \mu^{ji} + \mu^{ik} - \mu^{ki}, f^i \rangle \geq \langle \mu^{ij}, f^j + g^{ij} \rangle \\ &+ \langle \mu^{ji}, g^{ji} - f^j \rangle + \langle \mu^{ik}, f^k + g^{ik} \rangle + \langle \mu^{ki}, g^{ki} - f^k \rangle \\ &= \langle \mu^{ij}, g^{ij} \rangle + \langle \mu^{ji}, g^{ji} \rangle + \langle \mu^{ik}, g^{ik} \rangle + \langle \mu^{ki}, g^{ki} \rangle \\ &\quad + \langle \mu^{ij} - \mu^{ji}, f^j \rangle + \langle \mu^{ik} - \mu^{ki}, f^k \rangle \end{aligned}$$

$$(1.31) \quad \begin{aligned} \langle \mu^{ij} - \mu^{ji}, f^j \rangle &\geq \langle \mu^{jk} - \mu^{kj}, f^j \rangle \geq \langle \mu^{jk}, g^{jk} \rangle + \langle \mu^{kj}, g^{kj} \rangle \\ &\quad + \langle \mu^{jk}, f^k \rangle - \langle \mu^{kj}, f^k \rangle \end{aligned}$$

De plus

$$(1.32) \quad \langle \mu^{ik} - \mu^{ki} + \mu^{jk} - \mu^{kj}, f^k \rangle \geq 0.$$

De (1.30)-(1.31), (1.32), on déduit bien que $\langle \lambda, f^i \rangle$ majore le membre de droite de (1.29). \square .

L'interprétation de (1.29) est intéressante. En effet, on va montrer qu'à toute famille (μ^{ij}) de mesures ≥ 0 finies vérifiant (1.26), on peut associer un arbre de mesures. On a en effet :

THEOREME 1.3. Soit (μ^{ij}) une famille de mesures ≥ 0 finies vérifiant (1.26). Il existe un arbre M' et des mesures ≥ 0 finies μ^{ij} vérifiant (1.26) avec $\lambda = 0$ tels que si (μ^{ij}) est la famille de mesures associée à l'arbre M' , on a :

(1.33) $\mu^{ij} = \mu_1^{ij} + \mu_2^{ij}$

Preuve : Nous allons construire l'arbre de mesures de proche en proche.

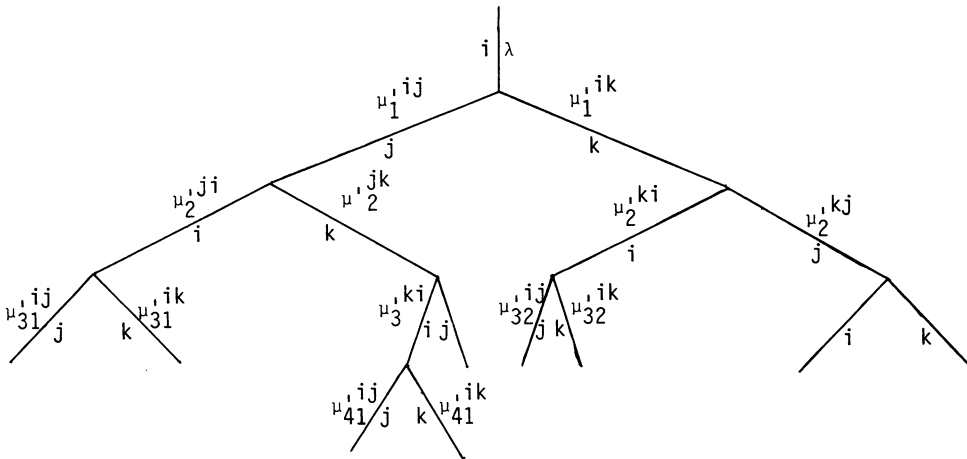


Figure 2

On a :

(1.34) $\lambda + \mu^{ji} + \mu^{ki} \leq \mu^{ij} + \mu^{ik}$

Par un résultat de Meyer-Mokobodzki-Rost [9], on peut trouver des mesures

$\nu_1, \nu_2 \geq 0$ telles que

(1.35) $\mu^{ij} + \mu^{ik} = \nu_1 + \nu_2 \quad \lambda \leq \nu_1 \quad \mu^{ji} + \mu^{ki} \leq \nu_2$

Soit a et $(1-a)$ la densité de μ^{ij} et μ^{ik} par rapport à $\mu^{ij} + \mu^{ik}$. On a

(1.36) $\mu^{ij} = a\nu_1 + a\nu_2$
 $\mu^{ik} = (1-a)\nu_1 + (1-a)\nu_2.$

En posant

(1.37) $\mu_1^{ij} = a\nu_1 \quad \mu_2^{ij} = a\nu_2 \quad \mu_1^{ik} = (1-a)\nu_1 \quad \mu_2^{ik} = (1-a)\nu_2$

on a

(1.38) $\mu^{ij} = \mu_1^{ij} + \mu_2^{ij} \quad \lambda \leq \mu_1^{ij} + \mu_2^{ik}$
 $\mu^{ik} = \mu_1^{ik} + \mu_2^{ik} \quad 0 \leq \mu_1^{ij} - \mu_2^{ji} + \mu_1^{ik} - \mu_2^{ki}.$

En reportant (1.38) dans les deux dernières lignes de (1.26), on obtient donc

$$(1.39) \quad \begin{aligned} & \mu_1^{ij} \mu_j^{ji} - \mu_1^{ij} + \mu^{jk} - \mu^{kj} \\ & \mu_1^{ik} \mu_k^{ki} - \mu_1^{ik} + \mu^{kj} - \mu^{jk} \\ & 0 < \mu_1^{ij} - \mu^{ji} + \mu_1^{ik} - \mu^{ki} \end{aligned}$$

On a donc construit le premier rameau d'un arbre (voir figure 2). Le système (1.39) est proche du système (1.26) ; la différence provient du fait que sont mêlées les mesures provenant de la branche j et de la branche k , et qu'au lieu d'avoir une seule "source" λ , on a maintenant deux "sources" μ_1^{ij} et μ_1^{ik} . Seules ont été modifiées μ^{ij} en μ_1^{ij} , μ^{ik} en μ_1^{ik} , puisque les autres possibilités de transition n'ont pas encore été envisagées. On va donc itérer l'opération sur la première ligne de (1.39). On peut effectuer les décompositions en sommes de mesures ≥ 0 :

$$(1.40) \quad \begin{aligned} \mu^{ji} &= \mu_2^{ji} + \mu_2^{ji} & \mu_1^{ij} \mu_j^{ji} + \mu_2^{jk} \\ \mu^{jk} &= \mu_2^{jk} + \mu_2^{jk} & 0 < \mu_2^{ji} - \mu_1^{ij} + \mu_2^{jk} - \mu^{kj} \end{aligned}$$

On a donc maintenant

$$(1.41) \quad \mu_1^{ik} \mu_k^{ki} - \mu_1^{ik} + \mu^{kj} - \mu_2^{jk} - \mu_2^{jk}.$$

On en déduit les décompositions

$$(1.42) \quad \begin{aligned} \mu^{ki} &= \mu_2^{ki} + \mu_3^{ki} + \mu_3^{ki} & \mu_1^{ik} \mu_k^{ki} + \mu_2^{kj} \\ \mu^{kj} &= \mu_2^{kj} + \mu_3^{kj} + \mu_3^{kj} & \mu_2^{jk} \mu_k^{ki} + \mu_3^{kj} \quad 0 < \mu_3^{ki} - \mu_1^{ik} + \mu_3^{kj} - \mu_2^{jk} \end{aligned}$$

qu'on reporte sur la figure 2.

Les mesures (μ^{kl}) ont toutes subi une première décomposition. Revenons alors à la ligne i dans (1.39). On a

$$(1.43) \quad 0 < \mu_1^{ij} - (\mu_2^{ji} + \mu_2^{ji}) + \mu_1^{ik} - \mu_2^{ki} - \mu_3^{ki} - \mu_3^{ki}.$$

On a ainsi les décompositions

$$(1.44) \quad \begin{aligned} \mu_1^{ij} &= \mu_{31}^{ij} + \mu_{32}^{ij} + \mu_{41}^{ij} + \mu_5^{ij} & \mu_2^{ji} < \mu_{31}^{ij} + \mu_{31}^{ik} \\ & & \mu_2^{ki} < \mu_{32}^{ij} + \mu_{32}^{ik} \\ \mu_1^{ik} &= \mu_{31}^{ik} + \mu_{32}^{ik} + \mu_{41}^{ik} + \mu_5^{ik} & \mu_3^{ki} < \mu_{41}^{ij} + \mu_{41}^{ik} \\ & & 0 < \mu_5^{ij} - \mu_2^{ji} + \mu_5^{ik} - \mu_3^{ki} \end{aligned}$$

qu'on reporte encore sur la figure 2. On a de plus

$$\begin{aligned}
 (1.45) \quad \mu^{ij} &= \mu_1^{ij} + \mu_{31}^{ij} + \mu_{32}^{ij} + \mu_{41}^{ij} + \mu_5^{ij} \\
 \mu^{ik} &= \mu_1^{ik} + \mu_{31}^{ik} + \mu_{32}^{ik} + \mu_{41}^{ik} + \mu_5^{ik} \\
 \mu^{ji} &= \mu_2^{ji} + \mu_2^{ji} \\
 \mu^{jk} &= \mu_2^{jk} + \mu_2^{jk} \\
 \mu^{ki} &= \mu_2^{ki} + \mu_3^{ki} + \mu_3^{ki} \\
 \mu^{kj} &= \mu_2^{kj} + \mu_3^{kj} + \mu_3^{kj} \\
 0 &\leq \mu_2^{jj} - (\mu_{31}^{ij} + \mu_{32}^{ij} + \mu_{41}^{ij} + \mu_5^{ij}) + \mu_2^{jk} - (\mu_2^{kj} + \mu_3^{kj} + \mu_3^{kj}) \\
 0 &\leq \mu_3^{ki} - (\mu_{31}^{ik} + \mu_{32}^{ik} + \mu_{41}^{ik} + \mu_5^{ik}) + \mu_3^{kj} - \mu_2^{jk} \\
 0 &\leq \mu_5^{ij} - \mu_2^{ji} + \mu_5^{ik} - \mu_3^{ki}.
 \end{aligned}$$

On peut donc réitérer l'opération de manière à parcourir les lignes i, j, k dans l'ordre $i-j-k$.

On construit ainsi une suite "croissante" d'arbres M_n de longueur finie dont toutes les branches à distance finie vont être couvertes après un nombre fini d'itérations. On définit ainsi n_μ^{ij}, n_μ^{ik} comme les sommes de mesure d'indice ij, ik associées à l'arbre M^n , et on a

$$\begin{aligned}
 (1.46) \quad \mu^{ij} &= n_\mu^{ij} + n_\mu^{ij} \\
 \mu^{ik} &= n_\mu^{ik} + n_\mu^{ik} \\
 0 &\leq n_\mu^{ij} - n_\mu^{ji} + n_\mu^{ik} - n_\mu^{ki} - n_\mu^{ji} - n_\mu^{ki} \\
 &\text{etc...}
 \end{aligned}$$

où n_μ^{ji} (resp. n_μ^{ki}) est une somme de mesures extraites des mesures d'indice ji (resp. ki) de l'arbre M^n sur des branches d'étage de plus en plus grand tendant vers $+\infty$. Grâce à (1.46) la suite croissante de mesures n_μ^{ij} converge vers μ^{ij} . Donc n_μ^{ji} est une suite de restes de séries convergentes et tend vers 0. Enfin n_μ^{ij} converge vers μ^{ij} . On a naturellement le même résultat pour les autres indices.

On a alors

$$(1.47) \quad \mu^{ij} = \mu^i \mu^j + \mu^{ij}.$$

De plus, si $f \in K^i$ est bornée, on a :

$$(1.48) \quad \langle \mu^{ij} + \mu^{ki}, f \rangle \geq \langle \mu^{ij} + \mu^{ik}, f \rangle$$

et donc

$$(1.49) \quad 0 \leq \mu^{ij} - \mu^{ji} + \mu^{ik} - \mu^{ki}. \quad \square$$

Dans la maximisation de (1.29), on peut ne pas tenir compte des (μ^{ij}) , car de (1.30) (avec $\lambda = 0$), on tire que

$$(1.50) \quad 0 \geq \sum \mu^{ij} g^{ij}.$$

2. Existence de la solution du problème d'optimisation.

E est maintenant un espace métrisable localement compact dénombrable à l'infini. \bar{E} est l'ensemble des fonction continues bornées sur E . \bar{E} est le compactifié de Stone-Cech de E . \mathcal{M}^b est l'ensemble des mesures bornées sur E , $\bar{\mathcal{M}}$ le dual de \bar{E} , i.e. l'ensemble des mesures bornées régulières sur \bar{E} .

x est un processus de Feller à valeurs dans $E \cup \{\delta\}$ à durée de vie finie ζ , dont le noyau potentiel est fini. K (resp. \bar{K}) est l'ensemble des fonctions fortement surmédianes (resp. appartenant à \bar{E}). R est l'opérateur de réduction par rapport à K .

On définit une relation d'ordre sur $\bar{\mathcal{M}}$:

$$(2.1) \quad \lambda < \mu \Leftrightarrow \forall f \in \bar{K} \quad \langle \mu, f \rangle \leq \langle \lambda, f \rangle.$$

Si $\lambda, \mu \in \mathcal{M}^b$, $\lambda < \mu$ est équivalent à

$$(2.2) \quad \forall f \in K \text{ bornée} \quad \langle \mu, f \rangle \leq \langle \lambda, f \rangle$$

En effet en prenant les décompositions de Jordan-Hahn de λ et μ , on peut supposer λ et $\mu \geq 0$. Alors si $\phi \in \mathcal{C}_0$ (espace des fonctions continues tendant vers 0 à l'infini) et est ≥ 0 , $\forall \phi \in \bar{K}$ et donc

$$(2.3) \quad \langle \mu, V\phi \rangle \leq \langle \lambda, V\phi \rangle$$

On a encore (2.3) pour ϕ universellement mesurable. Comme par [8]-IX-T64 toute fonction excessive est limite d'une suite croissante de potentiels de fonctions universellement mesurables, on a (2.2) pour f excessive. L'extension de (2.2) à $f \in K$ résulte de [1]-[12].

On a alors le résultat suivant :

THEOREME 2.1. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- Pour tout $h \in \bar{\mathcal{E}}, Rh \in \bar{\mathcal{E}}$
- Pour tout $x \in E, \{\mu \in \mathcal{M}_x^b; \mu \geq 0; \varepsilon_x < \mu\} = \{\mu \in \mathcal{M}_x^b; \mu \geq 0; \varepsilon_x < \mu\}$.
- Pour toute fonction h s.c.s. bornée, Rh est s.c.s. (et est l'inf des éléments de $\bar{K} > h$).
- Si L est un compact de $E, \{\mu \in \mathcal{M}_x^b; \mu \geq 0; \exists x \in L \varepsilon_x < \mu\}$ est étroitement compact.
- Pour tout fermé F de $E, P_x(D_F < \zeta)$ est une fonction s.c.s..

Preuve : C'est le Théorème 1 de l'appendice de [2]. \square

Dans [2] les propriétés équivalentes du Théorème sont reliées à la vitesse à laquelle x quitte le voisinage d'un point.

Par les résultats de [3], les diffusions de Stroock et Varadhan [13] et les diffusions à sauts de Stroock [14] tuées par une exponentielle e^{-pt} avec $p > 0$ possèdent ces propriétés.

On suppose ici que x^1, x^2, x^3 possèdent toutes les propriétés du processus x ainsi que les propriétés équivalentes du Théorème 2.1.

On suppose enfin que les g^{ij} sont des fonctions continues (resp. s.c.s.) bornées telles qu'il existe $\tilde{f}^i \in \bar{K}^i$ ($i=1,2,3$) et $\beta > 0$ tels que,

$$(2.4) \quad \tilde{f}^i - \tilde{f}^j \geq g^{ij} + \beta.$$

On a alors le résultat fondamental :

THEOREME 2.2. Si les g^{ij} sont continues (resp. s.c.s.) les fonctions $\{f_n^i\}$ forment une suite croissante de fonctions continues (resp. s.c.s.) convergent uniformément sur tout compact (resp. simplement) vers les fonctions continues (resp. s.c.s.) f et f' .

Preuve : La preuve est très proche de la preuve du Théorème 2.4. de [2]

On vérifie par récurrence que les fonctions $\{f_n^i\}$ sont continues (resp. s.c.s.). Si les (g^{ij}) sont continues, les (f^i) sont donc s.c.i. et majorées par les \tilde{f}^i donc bornées.

Montrons que les f^i sont s.c.s..

Si h est une fonction s.c.s. bornée définie sur E , on peut la prolonger en une fonction définie sur \bar{E} en posant

$$h = \inf_{h' \in \bar{\mathcal{E}} > h} h'$$

On prolonge ainsi les g^{ij} à \bar{E} . Comme les \tilde{f}^i sont dans $\bar{\mathcal{E}}$ on a

$$(2.5) \quad \tilde{f}^i - \tilde{f}^j \geq g^{ij} + \beta \text{ sur } \bar{E}.$$

Pour toute famille de six fonctions $u^{ij} \in \bar{\mathcal{E}}$ et pour $x \in E$ on pose

$$(2.6) \quad F_x((u^{ij})) = \inf_{\substack{\tilde{f}^i \in \bar{\mathcal{K}}^i \\ g^{ij} + u^{ij} \leq \tilde{f}^i - \tilde{f}^j}} \tilde{f}^1(x)$$

F_x est une fonction convexe sur $\bar{\mathcal{E}}^6$, qui majore f^1 .

De plus, grâce à (2.5) si les (u^{ij}) vérifient $\|u^{ij}\| < \beta$, alors $F_x((u^{ij})) \leq \tilde{f}^1(x)$.

Par [7], F_x étant convexe et bornée sur une boule de centre 0 dans $\bar{\mathcal{E}}^6$ est continue en 0.

Calculons alors la duale de F_x sur $\bar{\mathcal{E}}^6$ au sens de [10]-[11]. Pour toute famille $(u^{ij}) \in \bar{\mathcal{M}}^6$, on a

$$(2.7) \quad F_x^*((u^{ij})) = \sup_{\substack{\Sigma < u^{ij} \\ \tilde{f}^i \in \bar{\mathcal{K}}^i \\ g^{ij} + u^{ij} \leq \tilde{f}^i - \tilde{f}^j}} \Sigma < u^{ij} - \tilde{f}^1(x)$$

Si l'un des μ^{ij} est < 0 , $F_x^*((\mu^{ij}))$ est égal à $+\infty$.

Si les μ^{ij} sont ≥ 0 comme $\bar{f}^i - \bar{f}^j - g^{ij}$ est s.c.i. bornée, on a

$$(2.8) \quad \sup_{\substack{\bar{f}^i \in \bar{K}^i \\ g^{ij} + \mu^{ij} \leq \bar{f}^i - \bar{f}^j}} \langle \mu^{ij}, \mu^{ij} \rangle = \langle \mu^{ij}, \bar{f}^i \rangle - \langle \mu^{ij}, \bar{f}^j \rangle - \langle \mu^{ij}, g^{ij} \rangle$$

Donc si les μ^{ij} sont ≥ 0 , il vient

$$(2.9) \quad F_x^*((\mu^{ij})) = -\Sigma \langle \mu^{ij}, g^{ij} \rangle + \sup_{\bar{f}^i \in \bar{K}^i} \langle \mu^{ij}, -\mu^{ji} + \mu^{ik} - \mu^{ki}, \bar{f}^i \rangle - \bar{f}^1(x).$$

Donc

$$(2.10) \quad F_x^*((\mu^{ij})) = \begin{cases} -\Sigma \langle \mu^{ij}, g^{ij} \rangle & \text{si les } \mu^{ij} \text{ sont } \geq 0 \text{ et si les} \\ & \text{conditions (1.26) sont formellement} \\ & \text{vérifiées avec } \lambda = \epsilon_x, i=1 \\ +\infty & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Comme F_x est continue en 0, on a, par [10]-[11] :

$$(2.11) \quad F_x^{**}((0)) = F_x((0))$$

ou encore

$$(2.12) \quad F_x((0)) = \sup_{\substack{\mu^{ij} \geq 0 \\ \mu^{ij} \in \bar{\mathcal{M}}^6}} \Sigma \mu^{ij} g^{ij}$$

conditions (1.26) formelles.

Rappelons qu'ici les μ^{ij} sont dans $\bar{\mathcal{M}}_0$ et qu'on ne peut à priori conclure à l'égalité de $F_x((0))$ avec $f^1(x)$ en utilisant (1.29), où les μ^{ij} sont dans \mathcal{M}_0^b .

On procède alors comme dans la preuve du Théorème 2.4. de [2].

On montre en effet que les $\{f_n^i\}$ peuvent être prolongées à tout \bar{E} en une suite croissante de fonctions s.c.s. majorée par \bar{f}^i , et telle que les f^i limite des f_n^i sur \bar{E} sont i-fortement surmédianes sur tout \bar{E} , i.e. si λ et μ sont des éléments de $\bar{\mathcal{M}}_0$ tels que $\lambda \dot{<} \mu$, alors $\langle \mu, f^i \rangle \leq \langle \lambda, f^i \rangle$.

f^1 peut donc être prolongée en une fonction i-fortement surmédiane sur tout \bar{E} . Donc si $x \in E$ et si les (μ^{ij}) sont des éléments ≥ 0 de $\bar{\mathcal{M}}_0$ vérifiant formellement les conditions de (1.26) avec $\lambda = \epsilon_x$, en raisonnant formellement

comme dans (1.30)-(1.31)-(1.32), on a :

$$(2.13) \quad f^1(x) \geq \sum \mu^{ij} g^{ij}$$

et donc $f^1(x) \geq F_x((0))$. Donc

$$(2.14) \quad f^1(x) = F_x((0))$$

f^1 étant un inf de fonctions continues est s.c.s.

La convergence uniforme des f_n^i quand les g^{ij} sont continues résulte du Théorème de Dini. \square

On pose

$$A^{ij} = (f^i - f^j = g^{ij}).$$

Si les g^{ij} sont continues, les A^{ij} sont fermés. Si les g^{ij} sont s.c.s., les A^{ij} sont boréliens et de plus

$$A^i = A^{ij} \cup A^{ik}$$

est finement fermé pour x^i par [6]-II.

On va construire explicitement un arbre de mesures réalisant le sup dans (1.29).

Le processus part avec la loi d'entrée λ suivant la loi i . Soit D_{A^i} de début de A^i . Comme A^i est i -finement fermé, $x_D \in A^i$. Si $x_D \notin A^{ij}$ le processus suit ensuite la loi j . Si $x_D \in A^{ij}$, il suit la loi k (le choix de j plutôt que k sur $A^{ij} \cap A^{ik}$ est arbitraire).

Soit μ_1^{ij} la mesure définie par $\langle \mu_1^{ij}, h \rangle = E^{\lambda} \int_{D_{A^i} < \zeta} 1_{x \in A^{ij}} h(x) \mu_1^{ik}$ la mesure définie par $\langle \mu_1^{ik}, h \rangle = E^{\lambda} \int_{D_{A^i} < \zeta} 1_{x \in A^{ij}} h(x) \mu_1^{ik}$. On réitère la procédure sur chaque branche de l'arbre. On prend comme convention qu'en cas d'ambiguïté, on préfère j à k , i à k , i à j .

On construit ainsi un arbre M de mesures. Soit (μ^{ij}) les mesures (éventuellement non bornées) associées à M .

On a alors

THEOREME 2.3. : (f^1, f^2, f^3) est le seul triplet de fonctions s.c.s. bornées solution de (1.23). De plus les mesures μ^{ij} sont bornées et réalisent le sup dans (1.29).

Preuve : Soit (f^i) un triplet de solutions s.c.s. bornées de (1.23) Comme il n'y aura pas d'ambiguïté, on les note encore comme les f^i construits précédemment. Les A^{ij} désignent les objets construits précédemment pour ces "nouveaux" f^i .

Par un résultat de [6] on a :

$$\langle \lambda, f^i \rangle = \langle \lambda, Q^{A^i} [(f^j + g^{ij}) \vee (f^k + g^{ik})] \rangle = \langle \mu_1^{ij}, (f^j + g^{ij}) \rangle + \langle \mu_1^{ik}, (f^k + g^{ik}) \rangle$$

ou encore

$$\langle \lambda, f^i \rangle = \langle \mu_1^{ij}, g^{ij} \rangle + \langle \mu_1^{ik}, g^{ik} \rangle + \langle \mu_1^{ij}, f^j \rangle + \langle \mu_1^{ik}, f^k \rangle$$

En itérant n fois, il vient

$$(2.15) \quad \langle \lambda, f^i \rangle = \sum_{\substack{m < n \\ k\ell}} \langle \mu_m^{k\ell}, g^{k\ell} \rangle + \sum \langle \mu_n^{k\ell}, f^\ell \rangle$$

ou encore si $n_{\mu}^{k\ell}$ représente la somme des mesures $\mu_m^{k\ell}$ jusqu'à l'étage n

$$(2.16) \quad \langle \lambda, f^i \rangle = \sum \langle n_{\mu}^{k\ell}, g^{k\ell} \rangle + \sum \langle n_{\mu}^{k\ell}, f^\ell \rangle$$

Comme $g^{k\ell} \leq \tilde{f}^k - \tilde{f}^\ell - \beta$, on a

$$(2.17) \quad \langle \lambda, f^i \rangle \leq \langle n_{\mu}^{ij} - n_{\mu}^{ji} + n_{\mu}^{ik} - n_{\mu}^{ki}, \tilde{f}^i \rangle + \\ + \langle n_{\mu}^{ji} - n_{\mu}^{ij} + n_{\mu}^{jk} - n_{\mu}^{kj}, \tilde{f}^j \rangle + \\ + \langle n_{\mu}^{ki} - n_{\mu}^{ik} + n_{\mu}^{kj} - n_{\mu}^{jk}, \tilde{f}^k \rangle + \sum \langle n_{\mu}^{k\ell}, f^\ell \rangle - \beta \langle \sum n_{\mu}^{k\ell}, 1 \rangle$$

Comme les $\{n_{\mu}^{k\ell}\}$ vérifient les conditions (1.26), il vient

$$(2.18) \quad \langle \lambda, f^i \rangle \leq \langle \lambda, \tilde{f}^i \rangle + \sum \langle n_{\mu}^{k\ell}, f^\ell \rangle - \beta \langle \sum n_{\mu}^{k\ell}, 1 \rangle$$

Or on a :

$$(2.19) \quad \langle \mu_1^{ij} + \mu_1^{ik}, 1 \rangle \leq \langle \lambda, 1 \rangle$$

Par récurrence, on en déduit que $\sum \langle n_{\mu}^{k\ell}, 1 \rangle$ décroît avec j , et que donc

$$(2.20) \quad \sum_{k\ell} \langle \mu_n^{k\ell}, 1 \rangle \leq \langle \lambda, 1 \rangle .$$

Comme les $\{f^\ell\}$ sont bornées, de (2.18), on tire

$$(2.21) \quad \beta \langle \sum_{k\ell} \mu_n^{k\ell}, 1 \rangle \leq K$$

où K ne dépend pas de n .

La famille de mesures $\{\mu_n^{k\ell}\}$ est donc bornée, et les mesures limites $\{\mu^{k\ell}\}$ sont également bornées. Ceci implique en particulier que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum \langle \mu_n^{k\ell}, f^\ell \rangle = 0$.

De (2.15)-(2.18)-(2.22), on tire

$$(2.22) \quad \langle \lambda, f^i \rangle = \sum \langle \mu^{k\ell}, g^{k\ell} \rangle .$$

Or les $\{\mu^{k\ell}\}$ vérifient le système (1.26). Donc $\langle \lambda, f_i \rangle$ est inférieur au sup dans (1.29). Comme $f^i - f^j \geq g^{ij}$, par le raisonnement utilisé au début de la section 2. c), les $\{f^i\}$ utilisés ici majorent les vrais $\{f^i\}$. De (2.22), on tire qu'ils leur sont égaux. \square

3. Dépendances continues.

Dans [2], nous avons étudié la dépendance continue des solutions de (0.2) en fonction des données g et g' et des paramètres définissant les processus--dans [2] les dérivées de diffusions-- parce que nous avons en vue la détermination simultanée de domaines de transition et de contrôles optimaux. Ici, nous nous contenterons de faire varier en toute généralité les g^{ij} , mais les méthodes utilisées ici ainsi que les techniques de [3]-[4] permettent d'étudier aussi les variations des dérivées.

On reprend toutes les hypothèses de la section 2. On a tout d'abord le résultat élémentaire :

PROPOSITION 3.1. : Si h_n est une suite de fonctions continues uniformément bornée convergeant uniformément sur tout compact vers h , $R^i h_n$ converge vers $R^i h$ uniformément sur tout compact.

Preuve : Soit x_n une suite de points de E convergeant vers $x \in E$. Par le Théorème 2.1, il existe $\mu_n \geq 0$ telle que $\varepsilon_{x_n}^i < \mu_n$ et que

$$(3.1) \quad R^i h_n(x_n) = \langle \mu_n, h_n \rangle .$$

Par le Théorème 2.1 les $\{\mu_n\}$ forment une suite étroitement relativement compacte. Soit $\{\mu_{n_k}\}$ une sous-suite extraite convergeant vers μ . Comme pour $\phi \in \mathcal{C}^0 \geq 0$, $\langle \mu_{n_k}, V\phi \rangle \leq V\phi(x_{n_k})$, on a $\langle \mu, V\phi \rangle \leq V\phi(x)$, et donc $\varepsilon_x^i < \mu$. De plus

$$(3.2) \quad \langle \mu, h \rangle = \lim \langle \mu_{n_k}, h_{n_k} \rangle$$

et donc comme $R^i h(x) \geq \langle \mu, h \rangle$, on a :

$$(3.3) \quad R^i h(x) \geq \limsup R^i h_n(x_n) .$$

De même, il existe $v_n \geq 0$ telle que $\varepsilon_{x_n}^i < v_n$ et que

$$(3.4) \quad R^i h(x_n) = \langle v_n, h \rangle$$

On peut trouver $\{v_{n_k}\}$ convergeant étroitement vers v telle que $\varepsilon_x^i < v$,

et comme $R^i h$ est continue, il vient

$$(3.5) \quad R^i h(x) = \langle v, h \rangle .$$

De plus

$$(3.6) \quad \langle v_{n_k}, h_{n_k} \rangle \leq R^i h_{n_k}(x_{n_k}) \\ \lim \langle v_{n_k}, h_{n_k} \rangle = \langle v, h \rangle .$$

Donc

$$(3.7) \quad R^i h(x) \leq \liminf R^i h_n(x_n) .$$

De (3.3) et (3.7), on tire bien la Proposition. \square

On a enfin le Théorème de dépendance continue :

THEOREME 3.1. Soit $(g^{ij,n})$ une famille de fonctions continues uniformément bornées convergeant uniformément vers (g^{ij}) sur tout compact de E . On suppose que $\tilde{f}^{i,n} \in \bar{R}^i$ et qu'il existe $\beta > 0$ indépendant de n tel que $\tilde{f}^{i,n} - \tilde{f}^{j,n} \geq g^{ij,n} + \beta$ et qu'il existe $\tilde{f}^i \in \bar{R}^i$ tels que $\tilde{f}^i - \tilde{f}^j \geq g^{ij} + \beta$. On suppose enfin que les $\tilde{f}^{i,n}$ et \tilde{f}^i sont uniformément bornées.

Alors les suites de fonctions continues $(f^{i,n})$ construite au théorème 2.3 relativement aux $(g^{ij,n})$ est uniformément bornée et converge uniformément sur tout compact vers les fonctions (f^i) associés aux (g^{ij}) .

Preuve : Comme les $\{f^{i,n}\}$ sont majorées par les $\{\tilde{f}^{i,n}\}$, elles restent uniformément bornées.

Grâce à la Proposition 3.1, on vérifie par récurrence que pour tout j , les approximations $\{f_j^{i,n}\}$ construites à la Section 1 convergent vers $\{f_j^i\}$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Si $x_n \rightarrow x$, on a :

$$(3.8) \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} f^{i,n}(x_n) \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} f_j^{i,n}(x_n) = f_j^i(x)$$

et donc

$$(3.9) \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} f^{i,n}(x_n) \geq f^i(x).$$

Montrons l'inégalité inverse. Soit M une constante majorant les $\tilde{f}^{i,n}$,

Si les mesures ≥ 0 finies $\{\mu^{k\ell,n}\}$ sont les mesures construites au Théorème 2.3 pour les $\{g^{ij,n}\}$ et $\lambda = \varepsilon_{x_n}$, de (2.18), on tire que

$$(3.10) \quad \beta \sum_{k,\ell} \langle \mu^{k\ell,n}, 1 \rangle \leq (\tilde{f}^{i,n} - f^{i,n})(x_n) \leq M.$$

où M ne dépend pas de n .

De plus, on sait que pour n fixé, si $\mu_j^{i, k\ell, n}$ représente la somme des mesures de l'arbre associé aux $(g^{ij, n})$ avec $\lambda = \epsilon_{x_n}$ à l'étage j , $\sum_{k\ell} \langle \mu_j^{i, k\ell, n}, 1 \rangle$ décroît quand j croît.

Soit $\epsilon > 0$ et soit j un entier tel que

$$(3.11) \quad \sum_{k\ell} \langle \mu_j^{i, k\ell, n}, 1 \rangle \geq \frac{\epsilon\beta}{M}.$$

Alors les sommes $\sum_{k\ell} \langle \mu_i^{i, k\ell, n}, 1 \rangle$ sont $\geq \frac{\epsilon\beta}{M}$ pour $i \leq j$. De (3.10), on tire que:

$$(3.12) \quad \frac{j\epsilon\beta^2}{M} \leq M.$$

Donc pour $j \geq \frac{M^2}{\epsilon\beta} + 1$, on a :

$$(3.13) \quad \sum_{k\ell} \langle \mu_j^{i, k\ell, n}, 1 \rangle \leq \frac{\epsilon\beta}{M}.$$

Or chacun des sous-arbres dont les sommets sont situés au bas de l'étage j est un sous-arbre optimal pour la mesure d'entrée associée $\mu_j^{i, k\ell, n}$: c'est en effet évident par la construction du Théorème 2.3. Donc, de (2.18), on tire que :

$$(3.14) \quad \beta \sum_{\substack{k\ell \\ j' > j}} \langle \mu_{j'}^{i, k\ell, n}, 1 \rangle \leq M \sum_{k\ell} \langle \mu_j^{i, k\ell, n}, 1 \rangle \leq \epsilon\beta$$

i.e.

$$(3.15) \quad \sum_{\substack{k\ell \\ j' > j}} \langle \mu_{j'}^{i, k\ell, n}, 1 \rangle \leq \epsilon.$$

On va alors montrer que les $\mu_j^{i, k\ell, n}$ vérifient un critère de compacité de Prokhorov.

En effet

$$(3.16) \quad \mu_j^{i, k\ell, n} = \sum_{j' < j} \mu_{j'}^{i, k\ell, n} + \sum_{j' > j} \mu_{j'}^{i, k\ell, n}.$$

Soit $\eta > 0$. Choisissons $j_\eta = \left[\frac{2M^2}{\eta\beta} \right] + 2$. Alors de (3.15), on tire que

$$(3.17) \quad \sum_{j' > j_\eta} \langle \mu_{j'}^{i, k\ell, n}, 1 \rangle \leq \frac{\eta}{2}.$$

Les mesures $\{\mu_j^{i,k\ell,n}\}_{n \in \mathbb{N}, j' \leq j}$ vérifient un critère de Prokhorov. En effet comme

$\varepsilon_{X_n}^i \leq \mu_1^{ij} + \mu_1^{ik}$, par le Théorème 2.1, les $\mu_1^{ij} + \mu_1^{ik}$ vérifient un critère de

Prokhorov. Il suffit alors de vérifier que si ρ varie dans un ensemble étroitement compact R de mesures de masse ≤ 1 $\{\sigma \geq 0 ; \exists \rho \in R \ \rho < \sigma\}$ est étroitement relativement compact. On peut alors procéder par récurrence sur l'indice j' jusqu'ici j .

Si $\rho < \sigma$, il existe un temps d'arrêt T algébrique éventuellement randomisé tel que :

$$\langle \sigma, h \rangle = E^{\rho} 1_{T < \zeta} h(X_T) = \int E^{\rho} 1_{T < \zeta} h(X_T) d\rho(x).$$

Soit K un compact tel que $\rho(C_K) < \varepsilon/2$ quand $\rho \in R$. Par le Théorème 2.1, il existe un compact K' tel que si $x \in K$, $E^{\rho} 1_{T < +\infty} 1_{X_T \notin K'} < \frac{\varepsilon}{2}$. Donc

$$(3.18) \quad \langle \rho, 1_{C_{K'}} \rangle < \varepsilon$$

Les $\{\mu^{i,k\ell,n}\}$ vérifient donc un critère de Prokhorov.

On en extrait une sous-suite étroitement convergente vers $\{\mu^{i,k\ell}\}$ qu'on note $\{\mu^{i,k\ell,n_j}\}$. Les $\{\mu^{i,k\ell}\}$ vérifie trivialement (1.26) pour $\lambda = \varepsilon_X$.

Or :

$$(3.19) \quad f^i(x_n) = \Sigma \langle \mu^{i,k\ell,n}, g^{k\ell,n} \rangle$$

Donc

$$(3.20) \quad \lim f^i(x_{n_k}) = \Sigma \langle \mu^{i,k\ell}, g^{k\ell} \rangle \leq f^i(x)$$

et ainsi

$$(3.21) \quad f^i(x) \geq \limsup f^i(x_n).$$

De (3.9) et (3.21), on déduit bien le Théorème. \square

- BIBLIOGRAPHIE -

- [1] AZEMA J., MEYER P.A. : Une nouvelle représentation du type de Skorokhod, Séminaire de Probabilités n° 8. Lecture Notes in Mathematics 381, 1-10. Berlin-Heidelberg-New-York : Springer 1974.
- [2] BISMUT J.M. : Contrôle des processus alternants et applications. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete, A paraître.
- [3] BISMUT J.M. : Dualité convexe, temps d'arrêt optimal et contrôle stochastique. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete, 38, 169-198 (1977).
- [4] BISMUT J.M. : Sur un problème de Dynkin. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete, 39, 31-53 (1977).
- [5] BISMUT J.M. : Probability theory methods in zero-sum stochastic games. SIAM J. of Control and Optimization, 15, 539-545 (1977).
- [6] BISMUT J.M., SKALLI B. : Temps d'arrêt optimal, théorie générale des processus et processus de Markov. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete, 39, 301-314 (1977).
- [7] BOURBAKI N. : Espaces vectoriels topologiques. Eléments de Mathématiques. Livre V. Chapitres I et II. Paris:Hermann1966
- [8] MEYER P.A. : Probabilités et Potentiels. 1° édition. Paris : Hermann 1966.
- [9] MEYER P.A. : Le schéma de remplissage en temps continu, d'après H. Rost. Séminaire de Probabilités n° 6, p 130-150. Lecture Notes in Mathematics n° 258. Berlin-Heidelberg-New-York : Springer 1972.
- [10] MOREAU J.J. : Fonctionnelles convexes. Séminaire d'équations aux dérivées partielles. Collège de France 1966-1967.
- [11] ROCKAFELLAR R.T. : Convex analysis. Princeton : Princeton University Press 1972.
- [12] ROST H. : The stopping distribution of a Markov process. Inventiones Math., 14, 1-16 (1971).
- [13] STROOCK D.W., WARADHAN S.R.S. : Diffusion processes with continuous coefficients. Comm. Pure and Appl. Math., XXII, 345-400, 479-530 (1969).
- [14] STROOCK D.W. : Diffusion processes with Levy generators. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete. 32, 209-244 (1975).

- BIBLIOGRAPHIE - (suite)

- [15] GETTOOR. R.K. : Ray Processes and Right processes. Lecture Notes in Mathematics n° 440. Berlin-Heidelberg-New-York Springer 1975 .
- [16] MERTENS J.F. : Théorie des processus stochastiques généraux. Application aux surmartingales. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete, 22, 45-68 (1972).
- [17] MERTENS J.F. : Strongly supermedian functions and optimal stopping. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete, 26, 119-139 (1973).

Université Paris-Sud (Orsay)

Département de Mathématiques

F-91405 Orsay