MARC YOR

Quelques épilogues

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 13 (1979), p. 400-406
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1979__13__400_0>

QUELQUES EPILOGUES

Marc YOR

J'ai rassemblé ci-dessous, à la demande de P.A. Meyer, divers résultats qui sont autant de réponses à des questions posées, de façon plus ou moins explicite, dans les deux précédents volumes du Séminaire.

$[\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P]$ est un espace de probabilité filtré vérifiant les conditions habituelles... $\mathcal{P}$ est la tribu prévisible associée à $(\mathcal{F}_t)$.

1. ESPERANCES CONDITIONNELLES ET OPERATEURS D'INTEGRALE STOCHASTIQUE

Si $(f_t)_{t \geq 0}$ est un processus prévisible borné, et $X \in \mathcal{U} \overset{\text{déf}}{=} L^2(\mathcal{F}_\infty, P)$, on note :

$$K_f(X) = f_0 X_0 + \int_0^\infty f(s) dX_s ,$$

où $(X_t)_{t \geq 0}$ désigne la martingale continue à droite, de variable terminale X. On définit ainsi un opérateur borné K_f de $\mathcal{U}$ dans lui-même, appelé opérateur d'intégrale stochastique.

Dans le Séminaire XI, p. 373, Dellacherie et Stricker demandent de caractériser les sous-tribus $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}_\infty$, $(\mathcal{F}_\infty, P)$ complètes, telles que $E(.|\mathcal{G})$, considéré comme opérateur de $\mathcal{U}$ dans lui-même, soit un opérateur d'intégrale stochastique.

Jeulin et Yor ([1] , proposition 8) ont montré que $\mathcal{G}$ vérifie la propriété en question si, et seulement si, il existe un $(\mathcal{F}_t)$ temps d'arrêt T, et un ensemble $B \in \mathcal{F}_{T-}$, tels que : T_B est prévisible, et

$$\mathcal{G} = \{C \in \mathcal{F}_T \ ; \ \exists\, C_{T-} \in \mathcal{F}_{T-} \ , \ C \cap B = C_{T-} \cap B\}.$$

2. GROSSISSEMENT DE FILTRATION, ET NORMES H^p DE SEMI-MARTINGALES

2.1. Outre la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, on suppose donnée une seconde filtration $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$, vérifiant les conditions habituelles, et telle que :

a) pour tout t, $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{G}_t \subseteq \mathcal{F}$.

b) toute $(\mathcal{F}_t)$ semi-martingale est une $(\mathcal{G}_t)$ semi-martingale.

Si X est une $(\mathcal{F}_t)$ martingale locale, on note $\overline{X}$ la $(\mathcal{G}_t)$ martingale locale figurant dans la décomposition canonique de X, considérée comme $(\mathcal{G}_t)$ semi-martingale spéciale.

D'après ([1], proposition 12), il existe, pour tout $p \in [1,\infty[$, une constante universelle c_p telle que $||\overline{X}||_{H^p(\mathcal{G})} \leq c_p ||X||_{H^p(\mathcal{F})}$, ce qui répond de façon affirmative à la question posée par Jeulin et Yor, dans le Séminaire XII, p. 96.

2.2. Particularisons encore la situation : L désigne la fin d'un ensemble $(\mathcal{F}_t)$ optionnel, et pour tout $t > 0$, $\mathcal{G}_t$ est la tribu engendrée par $\mathcal{F}_t$ et $(t < L)$. M. Barlow d'une part, Jeulin et Yor d'autre part, ont montré que les hypothèses faites en 2.1 sont vérifiées pour le couple de filtrations $(\mathcal{F},\mathcal{G})$. De plus, d'après ([1], proposition 14), pour tout $p \in [1,\infty[$, il existe deux constantes universelles k_p et K_p telles que

$$k_p ||Y||_{H^p(\mathcal{G})} \leq ||Y||_{H^p(\mathcal{F})} \leq K_p ||Y||_{H^p(\mathcal{G})},$$

pour toute $(\mathcal{F}_t)$ semi-martingale Y.

2.3. Considérons à nouveau un couple de filtrations générales satisfaisant les hypothèses :

a) pour tout t, $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{G}_t \subseteq \mathcal{F}$.

c) il existe un espace de Banach Θ constitué de $(\mathcal{F}_t)$ martingales uniformément intégrables, et vérifiant :

c.1) l'application : $X \to X_\infty$, de Θ dans $L^1(\widehat{\mathcal{F}},P)$, est continue

c.2) toute $(\widehat{\mathcal{F}}_t)$ martingale $X \in \Theta$ est une $(\mathcal{G}_t)$ quasi-martingale.

Les hypothèses faites ci-dessus entraînent <u>l'existence d'une constante</u> $c_{\Theta,\mathcal{G}}$ <u>telle que</u> :

$$\forall X \in \Theta, \; V_{\mathcal{G}}(X) \leq c_{\Theta,\mathcal{G}} \, ||X||_\Theta .$$

<u>Démonstration</u> : Notons $\mathcal{A}$ l'ensemble des couples $\alpha = (\underline{t},\underline{a})$, où $\underline{t} = (0=t_0 < t_1 < \dots < t_n < \infty)$, et $\underline{a} = (a_1, -, a_n)$, avec, pour tout $i \leq n$, a_i variable $\mathcal{G}_{t_i}$ mesurable, bornée par 1. (n varie dans $\mathbb{N}$).

D'après c.1), pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$, l'application

$X \to \ell_\alpha(X) = E\Big[\sum_{i \leq n-1} a_i(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})\Big] + E[a_n X_{t_n}]$ est une forme linéaire continue sur Θ,

et, d'après c.2), pour tout $X \in \Theta$, $V_{\mathcal{G}}(X) = \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} \ell_\alpha(X) < \infty$. L'existence de $c_{\Theta,\mathcal{G}}$ découle alors du théorème de la borne uniforme.

Cette remarque donne une explication générale de l'existence des constantes $c_{\Theta,\mathcal{G}}$ dans les articles de Dellacherie et Meyer (Séminaire XII, page 74, $\Theta = H^1(\mathcal{F})$), et P.A. Meyer (Sém. XII, p. 60, $\Theta =$ BMO$(\mathcal{F})$)

<u>2.4</u>. Rappelons le cadre de l'étude faite par P.A. Meyer dans la note : "Sur un théorème de J. Jacod" (Sém. XII, p. 57-60).

Soit $\pi = (A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une partition dénombrable d'ensembles $\widehat{\mathcal{F}}$-mesurables, et de probabilité strictement positive, pour tout i. Pour tout t, on note $\mathcal{G}_t$ la tribu engendrée par $\mathcal{F}_t$ et π. P.A. Meyer montre alors que toute $(\mathcal{F}_t)$ semi-martingale est une $(\mathcal{G}_t)$ semi-martingale, et que si, de plus, la partition π est d'entropie finie,

d) <u>toute martingale de</u> BMO $(\mathcal{F})$ <u>est une</u> $\mathcal{G}$<u>-quasi-martingale</u>.

On va donner ci-dessous une condition nécessaire et suffisante pour que d) soit réalisée.

D'après 2.3,

$$d) \iff \sup_{||X||_{BMO(\mathcal{F})} \leq 1} \ \sup_{\alpha \in \mathcal{C}\ell} \ell'_\alpha(X) < \infty,$$

où, avec les notations de 2.3, on note $\ell_\alpha(X) = \ell'_\alpha(X) + E[a_n X_{t_n}]$. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, notons $N^j_t = P(A_j \mid \mathcal{F}_t)$ (version continue à droite). On a :

$$\ell'_\alpha(X) = E[\Sigma_{i \leq n-1} a_i (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})]$$

$$= \Sigma_j E[\Sigma_i a_i 1_{A_j} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})]$$

Pour tout j, il existe a^j_i v.a. $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurable, bornée par 1 en valeur absolue.

D'où $\ell'_\alpha(X) = \Sigma_j E(\Sigma_i a^j_i (X_{t_{i+1}} N^j_{t_{i+1}} - X_{t_i} N^j_{t_i}))$

$$= \Sigma_j E(\Sigma_i a^j_i (<X,N^j>_{t_{i+1}} - <X,N^j>_{t_i})),$$

et finalement :

$$\sup_{\alpha \in \mathcal{C}\ell} \ell'_\alpha(X) = \Sigma_j E(\int_0^\infty |d<X,N^j>_s|).$$

Cette expression explicite permet d'écrire :

$$\sup_{\alpha \in \mathcal{C}\ell} \ell'_\alpha(X) = \sup_{J \in \mathbb{N}} \ \sup_{f_j \in \mathcal{P}, |f_j| \leq 1} E\left[<X ; \sum_{j \leq J} f_j . N^j>_\infty\right],$$

et donc, par interversion des supremum,

$$d) \iff \infty > \sup_{J \in \mathbb{N}} \ \sup_{f_j \in \mathcal{P}; |f_j| \leq 1} \ \sup_{||X||_{BMO(\mathcal{F})} \leq 1} E\left[<X, \sum_{j \leq J} f_j . N^j>_\infty\right]$$

Or, puisque le dual de H^1 est BMO, il existe deux constantes universelles c et c' telles que, pour tout $Y \in H^1(\mathcal{F})$,

$$c ||Y||_{H^1(\mathcal{F})} \leq \sup_{||X||_{BMO(\mathcal{F})} \leq 1} E[<X,Y>_\infty] \leq c' ||Y||_{H^1(\mathcal{F})}.$$

En conséquence,

$$\text{d)} \iff A \overset{\text{déf}}{=} \sup_{J \in \mathbb{N}} \sup_{f_j \in \mathcal{P}\,;\ |f_j| \leq 1} \|\sum_{j \leq J} f_j . N^j\|_{H^1(\mathcal{F})} < \infty.$$

Remarques :

1) La condition de Meyer : (π est d'entropie finie) implique : $\Sigma_j \|N^j\|_{H^1(\mathcal{F})} < \infty$, condition plus restrictive que : $A < \infty$.

2) Les arguments utilisés précédemment permettent également de montrer, pour tout $p \in]1,\infty[$, l'équivalence de

d_p) toute martingale de $H^p(\mathcal{F})$ est une $\mathcal{G}$-quasi-martingale et

$$A_q = \sup_{J \in \mathbb{N}} \sup_{f_j \in \mathcal{P}\,;\,|f_j| \leq 1} \|\sum_{j \leq J} f_j . N^j\|_{H^q(\mathcal{F})} < \infty \text{ , où } \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1.$$

3. CONVERGENCE DE MARTINGALES DANS L^1 ET DANS H^1.

Dans l'étude faite dans le Séminaire XII sur la représentation des martingales à partir du théorème de Douglas (p. 278, et suivantes), le résultat suivant joue un rôle important.

Proposition 1. Soit M une martingale locale. Soient (Y_t^n), (Y_t) des martingales uniformément intégrables telles que Y_∞^n converge dans L^1 vers Y_∞. Si les martingales Y^n admettent des représentations comme intégralès stochastiques prévisibles par rapport à M : $Y_t^n = \int_0^t \phi_s^n \, dM_s$, il existe un processus prévisible ϕ tel que $Y_t = \int_0^t \phi_s \, dM_s$.

L'espace $\mathcal{L}^1(M)$ des intégrales stochastiques prévisibles $\int_0^\cdot \phi(s) dM_s$, qui appartiennent à H^1, étant fermé pour la convergence dans H^1 fort, la proposition précédente découle immédiatement du résultat suivant ([2], Corollaire 3.1).

Proposition 2. Soient (Y_t^n), (Y_t) des martingales uniformément

<u>intégrables, telles que</u> Y^n_∞ <u>converge vers</u> Y_∞ <u>dans</u> L^1. <u>Il existe alors une sous-suite</u> (n_k) <u>de</u> $\mathbb{N}$ <u>et une suite de</u> t.a $(T_j)_{j\in\mathbb{N}}$ <u>croissant vers</u> $+\infty$ P p.s, <u>telles que</u> :

- <u>pour tout couple</u> (j,k), $(Y^{n_k})^{T_j}$, $Y^{T_j} \in H^1$.
- <u>pour tout</u> $j \in \mathbb{N}$, $(Y^{n_k})^{T_j} \xrightarrow[H^1]{(k\to\infty)} Y^{T_j}$.

Ceci permet de simplifier considérablement la rédaction faite dans le Séminaire XII (p. 279 et suivantes) en remplaçant les arguments de convergence faible dans L^1 ou H^1, par des arguments analogues de convergence forte dans les mêmes espaces.

4. TEMPS LOCAUX

<u>4.1</u>. En [3], J. Walsh exhibe une famille de semi-martingales réelles, continues, qui prennent à la fois des valeurs positives et négatives, et dont le temps local en 0 est discontinu : il s'agit des " skew Brownian motion" de paramètre $\alpha \neq 1/2$.

On veut ici donner des exemples généraux (en fait, très liés à ceux de Walsh) d'une telle situation.

Soit M une martingale locale continue, nulle en 0, mais non nulle. Son temps local en 0 - soit L^0 - n'est donc pas nul (pourquoi ?). De plus, si $X=a\,M^+ + b\,M^-$, avec $ab < 0$, X prend à la fois des valeurs positives et négatives. D'après la formule de Tanaka, si l'on note $V = (\frac{a+b}{2})L^0$, $X-V$ est une martingale locale. D'après ([4], théorème 2, iv), c), le saut du temps local de X en $x=0$, soit $\mathcal{L}^0_t - \mathcal{L}^{0-}_t$, est égal à :

$$2\int_0^t 1_{(X_s=0)}dV_s = 2\int_0^t 1_{(M_s=0)}dV_s = (a+b)\; L^0_t.$$

Ainsi, lorsque $ab < 0$, et $a+b \neq 0$, la semi-martingale $X = a\,M^+ + b\,M^-$ répond à la demande de J. Walsh.

<u>4.2</u>. A l'aide d'arguments de projection duale prévisible, Azéma et Yor ont montré en ([5], Corollaire 13) que M martingale continue de carré intégrable appartient à BMO si, et seulement si, il existe une constante C

telle que, pour tout t.a T : $E\left[\sup_{s \geq T} (M_s - M_\infty)^2 / \widehat{\mathcal{F}}_T\right] \leq C$ P p.s.

En fait, P.A. Meyer nous a fait remarquer que cette caractérisation de BMO découle simplement de l'inégalité de Doob dans L^2.

Montrons, de façon générale, que M, martingale de carré intégrable, appartient à BMO si, et seulement si, il existe une constante C telle que :

$$\forall T \text{ t.a, } E\left[\sup_{s \geq T} (M_{s-} - M_\infty)^2 / \widehat{\mathcal{F}}_T\right] \leq C.$$

La condition est évidemment suffisante ; inversement, si $M \in \text{BMO}$,

$$B_T \overset{\text{déf}}{=} E\left[\sup_{s \geq T} (M_{s-} - M_\infty)^2 / \widehat{\mathcal{F}}_T\right]$$

$$\leq 2\{E\left[\sup_{s \geq T} (M_s - M_{T-})^2 / \widehat{\mathcal{F}}_T\right] + ||M||^2_{BMO}\}$$

$$\leq 2\{4\, E\left[(M_\infty - M_{T-})^2 / \widehat{\mathcal{F}}_T\right] + ||M||^2_{BMO}\}$$

$$\leq 10\, ||M||^2_{BMO}, \text{ cqfd.}$$

<u>REFERENCES</u> (dans l'ordre d'apparition dans le texte).

[1] T. JEULIN et M. YOR : Nouveaux résultats sur le grossissement des tribus Annales Scientifiques ENS, t. 11, n° 3 (1978).

[2] M. YOR : Convergence de martingales dans L^1 et dans H^1. C.R.A.S., t. 286, p. 571-573 (1978).

[3] J.B. WALSH : A diffusion with a discontinuous local time. in : <u>Temps locaux</u>. Astérique 52-53, 1978.

[4] M. YOR : Sur la continuité des temps locaux associés à certaines semi-martingales ; in : <u>Temps locaux</u>.

[5] J. AZEMA et M. YOR : En guise d'introduction, in : <u>Temps locaux</u>.