SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

YVES LE JAN

Martingales et changement de temps

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 13 (1979), p. 385-399
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1979__13__385_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1977/78

MARTINGALES ET CHANGEMENTS DE TEMPS

par Yves LE JAN

INTRODUCTION. On sait que la théorie du potentiel et la théorie des martingales présentent de nombreuses analogies. L'idée de ce travail fut de chercher l'analogue, en théorie des martingales, de la "formule de Douglas" (établie par Douglas [4] dans le cas du disque, généralisée par exemple dans [3], [9], [10]). Cette formule exprime l'énergie d'une fonction f, harmonique dans un ouvert borné D de $\mathbb{R}^n$ de frontière régulière δ comme une intégrale

$$\int_{\delta\times\delta} (f(y)-f(x))^2\, \Theta(dx,dy)$$

où Θ est une mesure sur $\delta\times\delta$ privé de la diagonale. En utilisant la filière habituelle, qui passe par les processus de Markov, on peut voir que la "version probabiliste" de cette formule est une expression du processus croissant prévisible associé à la partie discontinue d'une martingale changée de temps. Nous verrons cela plus en détail au paragraphe III.

La voie suivie dans cet exposé est inverse de celle que nous venons d'évoquer brièvement. Nous partons d'un changement de temps très général en suivant un travail récent de Nicole Karoui et Gérard Weidenfeld [7], qui a grandement facilité notre approche du problème. Après quelques généralités, nous étudions le changement de temps dans l'intégrale stochastique, et la décomposition en partie continue et partie discontinue d'une martingale changée de temps.

Nous pouvons ainsi retrouver des formules de balayage de la théorie des processus de Markov et de la théorie du potentiel.

Cet article a été amélioré à la suite de discussions avec P.A. Meyer. Nous lui devons notamment l'emploi des semi-martingales jusqu'à l'infini, et l'exemple II.5.

I. GENERALITES

1. Nous considérons dans toute la suite un espace probabilisé $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ et une filtration $(\underline{\underline{F}}_t)$ vérifiant les conditions habituelles, ainsi qu'un processus croissant $(C_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, adapté et continu à droite. On n'exige pas que C soit fini, ni que C_0 soit nul ; on convient que $C_\infty=+\infty$, et l'on pose

(1) $\qquad j_t = \inf\{ s : C_s>t\}$ (en particulier, $j_\infty=+\infty$)

l'inverse à droite de (C_t). On prendra garde que les conventions à l'infini ne sont pas celles de [7]. On note $Z=j_{\infty-} = \inf\{ s : C_s=+\infty \}$.

On retrouve C comme inverse à droite de j :

(1') $\qquad C_t = \inf\{ s : j_s > t \} \qquad (C_\infty = +\infty)$

et on pose $C_{\infty-} = \overline{Z}$. On convient que $C_t = j_t = 0$ pour $t<0$.

Nous posons aussi $B_t = C_{t-}$, $i_t = j_{t-}$ (en particulier $B_t = i_t = 0$ pour $t \leq 0$, $B_\infty = \overline{Z}$, $i_\infty = Z$). Ces deux fonctions sont les inverses à gauche des fonctions j et C respectivement :

(2) $\qquad i_t = \inf\{ s : C_s \geq t \} \qquad (0 \leq t \leq \infty)$

(2') $\qquad B_t = \inf\{ s : j_s \geq t \} \qquad (0 \leq t \leq \infty)$

et on a les équivalences suivantes

(3) $\qquad t \leq j_s \iff B_t \leq s \quad , \quad s \leq C_t \iff i_s \leq t$

Les notations suivantes sont classiques en théorie du balayage, au moins les deux premières

(4) $\qquad D_t = j_{C_t} \ , \ \ell_t = i_{B_t} \quad ; \quad \overline{\ell}_t = B_{i_t} \ , \ \overline{D}_t = C_{j_t}$

Soit M l'ensemble des points de croissance de C (y compris 0 si $C_0 > 0$, et $+\infty$ si $C_t < \infty$ pour tout t) ; M est un fermé aléatoire optionnel contenu dans $[0,Z]$, et l'on a

(5) $\qquad D_t = \inf\{ s : s \in M, s > t \} \quad , \quad \ell_t = \sup\{ s : s \in M, s < t \}$

$\overline{D}$ et $\overline{\ell}$ ont des interprétations analogues au moyen de l'ensemble $\overline{M}$ des points de croissance de j.

Les v.a. j_t et D_t sont des temps d'arrêt de $(\underline{\underline{F}}_t)$; on vérifie aisément que les deux filtrations suivantes satisfont aux conditions habituelles

$$\overline{\underline{\underline{F}}}_t = \underline{\underline{F}}_{j_t} \quad , \quad \widetilde{\underline{\underline{F}}}_t = \underline{\underline{F}}_{D_t} \qquad (\overline{\underline{\underline{F}}}_{0-} = \widetilde{\underline{\underline{F}}}_{0-} = \underline{\underline{F}}_{0-})$$

Nous nous intéresserons surtout à la première, qui est la filtration changée de temps de $(\underline{\underline{F}}_t)$. Comme $t \leq D_t$ pour tout t, on a $\underline{\underline{F}}_t \subset \widetilde{\underline{\underline{F}}}_t$.

Soit X un processus indexé par $[0,\infty]$ (on conviendra que $X_t = 0$ pour $t<0$). Nous désignerons par JX le processus (X_{j_t}), par CX le processus (X_{C_t}), par DX le processus (X_{D_t}) (DX=CJX) ; enfin par IX et BX les processus (X_{i_t}) et (X_{B_t}), nuls respectivement pour $t<C_0$ et $t<j_0$.

2. Les résultats de la proposition suivante figurent, parmi d'autres, dans [7]. Nous en donnons une démonstration directe.

PROPOSITION 1. a) Si X est un processus càdlàg adapté à $(\underline{\underline{F}}_t)$, JX est càdlàg adapté à $(\overline{\underline{\underline{F}}}_t)$. Si X est optionnel par rapport à $(\underline{\underline{F}}_t)$, JX est optionnel par rapport à $(\overline{\underline{\underline{F}}}_t)$.

b) Si T est un temps d'arrêt de $(\underline{\underline{F}}_t)$, B_T et $C_T \wedge \overline{Z}$ sont des temps d'arrêt de $(\overline{\underline{\underline{F}}}_t)$.

c) Si T est un t. d'a. de $(\overline{\underline{\underline{F}}}_t)$, j_T est un t.d'a. de $(\underline{\underline{F}}_t)$, et $\overline{\underline{\underline{F}}}_T = \underline{\underline{F}}_{j_T}$.

Démonstration. a) est évident. Pour établir b), on applique a) à $X=1_{[T,\infty]}$, alors $JX=1_{[B_T,\infty]}$, donc B_T est un t. d'a. de $(\underline{\underline{\overline{F}}}_t)$, et on passe à $C_T\wedge\overline{Z}$ en remarquant que $C_T\wedge\overline{Z} = \lim_n B_{T+1/n}$. Pour établir c), nous commençons par le cas où T est étagé, prenant la valeur t_k sur $A_k\in\underline{\underline{\overline{F}}}_{t_k}=\underline{\underline{F}}_{j_{t_k}}$; alors $j_T = \inf_k (j_{t_k})_{A_k}$ est un t.d'a. de $(\underline{\underline{F}}_t)$. D'autre part $A\in\underline{\underline{\overline{F}}}_T \iff A\cap A_k \in\underline{\underline{\overline{F}}}_{t_k}$ pour tout k $\iff A\in\underline{\underline{F}}_{j_T}$. Le cas général s'obtient en approchant T par une suite décroissante de t.d'a. étagés.

REMARQUE 1. Le processus croissant (j_t) est adapté à $(\underline{\underline{\overline{F}}}_t)$; d'après (3), C_t est un temps d'arrêt de $(\underline{\underline{\overline{F}}}_t)$; c) nous donne alors que $\underline{\underline{\overline{F}}}_{C_t}=\underline{\underline{F}}_{jC_t}=\underline{\underline{F}}_{D_t}=\underline{\underline{\tilde{F}}}_t$. Ainsi le changement de temps inverse fait passer de $(\underline{\underline{\overline{F}}}_t)$ à $(\underline{\underline{\tilde{F}}}_t)$, et on obtient sans nouveau travail les résultats suivants

a') Si X est optionnel par rapport à $(\underline{\underline{\overline{F}}}_t)$, CX est optionnel par rapport à $(\underline{\underline{\tilde{F}}}_t)$.

b') Si T est un t.d'a. de $(\underline{\underline{\overline{F}}}_T)$, i_T et $j_T\wedge Z$ sont des t.d'a. de $(\underline{\underline{\tilde{F}}}_t)$

c') Si T est un t.d'a. de $(\underline{\underline{\tilde{F}}}_T)$, C_T est un t.d'a. de $(\underline{\underline{\overline{F}}}_t)$, et $\underline{\underline{\tilde{F}}}_T=\underline{\underline{\overline{F}}}_{C_T}$.

REMARQUE 2. On voit sans peine que si T est un t.d'a. de $(\underline{\underline{\tilde{F}}}_t)$, $D_T=j_{C_T}$ est un t.d'a. de $(\underline{\underline{F}}_t)$ et $\underline{\underline{\tilde{F}}}_T=\underline{\underline{\overline{F}}}_{C_T}=\underline{\underline{F}}_{D_T}$. Appliquant cela à $T=j_t$, on voit que $\underline{\underline{\tilde{F}}}_{j_t}=\underline{\underline{F}}_{D_{j_t}}$. Si l'ensemble M des points de croissance de C est sans point isolé, on a $D_{j_t}=j_t$, et on peut remplacer en a),b) la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$ par la famille plus riche $(\underline{\underline{\tilde{F}}}_t)$. C'est le cas dans l'exemple fondamental où (C_t) est une fonctionnelle additive d'un processus de Hunt, à support fin régulier.

3. Calcul des sauts d'un processus changé de temps

Nous introduisons l'ensemble G des points de croissance à gauche de (B_t), l'ensemble $\overline{G}$ des points de croissance à gauche de (i_t) ; G est aussi l'ensemble des points d'accumulation à gauche de M. Les sauts de C précédés d'un palier de C sont des points de croissance à gauche de C ($C_s<C_t$ pour tout $s<t$) mais non de B, et n'appartiennent pas à G - en particulier, 0 n'appartient pas à G. De même pour $\overline{G}$. On a

(6) $\quad G=\{ t\in[0,\infty] : i\circ B(t)=t \} = \{ t\in[0,\infty] : \ell(t)=t \}$

(6') $\quad \overline{G}=\{ t\in[0,\infty] : B\circ i(t)=t \} = \{ t\in[0,\infty] : \overline{\ell}(t)=t \}$

Le processus (ℓ_t) étant $(\underline{\underline{F}}_t)$-prévisible, G est $(\underline{\underline{F}}_t)$-prévisible (de même pour $\overline{G}$). D'autre part, les formules (6)-(6') nous donnent

LEMME I.1. $i|_{\overline{G}}$ et $B|_G$ <u>sont des bijections réciproques l'une de l'autre</u> (évident à partir de $G=\{i\circ B=\text{identité}\}$, $\overline{G}=\{B\circ i=\text{identité}\}$).

LEMME I.2. Soit X un processus càdlàg sur $[0,\infty]$. Les sauts du processus càdlàg JX sont donnés par

(7) $$\Delta(JX)_t = X_{j_t} - X_{i_t} + \Delta X_{i_t} 1_{\{t\in\overline{G}\}}$$

En particulier, si $\Delta X=0$ sur G on a $\Delta(JX)_t = X_{j_t} - X_{i_t}$.

Démonstration. Nous avons $(JX)_t = X_{j_t}$; la formule (7) équivaut donc à la suivante, où l'on a écrit X^- au lieu de X_- pour la clarté des notations

$$(JX)_{t-} = X_{i_t} \text{ si } t\notin\overline{G} \quad , \quad (JX)_{t-} = X^-_{i_t} \text{ si } t\in\overline{G} .$$

Or si $t\notin\overline{G}$ on a $j_s = i_t$ pour $s<t$ assez voisin de t, donc $(JX)_{t-} = X_{i_t}$. Si $t\in\overline{G}$ lorsque $s\uparrow t$, $s<t$ on a $j_s \uparrow i_t$, $j_s < i_t$, d'où la seconde relation. Enfin, la dernière phrase vient du lemme 1.1 : $t\in\overline{G} \iff i_t \in G$.

REMARQUES . a) La formule 7 est vraie pour $t=0$ et $t=\infty$.

b) Si l'on a $X_{j_t} - X_{i_t} = 0$ pour tout t (y compris pour $t=0$, ce qui signifie avec nos conventions que $X_{j_0} = 0$), la formule (7) se réduit à

$$\Delta(JX)_t = \Delta X_{i_t} 1_{\{t\in\overline{G}\}}$$

Comme on a $j_t = D_{i_t}$, il suffit de montrer que les processus (X_t) et (X_{D_t}) sont indistinguables, et par continuité à droite, que l'on a $X_t = X_{D_t}$ p.s. pour tout t.

4. Balayage

Soit (A_t) un processus à variation intégrable[1] (non nécessairement adapté). Nous appellerons J-balayé de A, et nous noterons $A^{(B)}$ - cette notation étant justifiée par la formule (8) ci-dessous - le compensateur prévisible de JA par rapport à $(\overline{\underline{F}}_t)$.

Par exemple, si X est un potentiel de la classe (D) par rapport à $(\underline{F}_t)$, et si A est le processus croissant prévisible engendrant X, X-A est une martingale uniformément intégrable, donc JX-JA est une martingale uniformément intégrable de $(\overline{\underline{F}}_t)$ (noter toutefois que JX n'est pas nécessairement un potentiel si $Z<\infty$), et le processus croissant prévisible (pouvant sauter à l'infini) qui engendre JX est le balayé $A^{(B)}$.

Revenons au cas général. Si H est un processus mesurable borné, on vérifie aisément par classes monotones, à partir de (3), que

$$\int_{[0,\infty]} H_s dJA_s = \int_{[0,\infty]} BH_s \, dA_s$$

Intégrons, en supposant H $(\overline{\underline{F}}_t)$-prévisible ; alors BH est $(\underline{F}_t)$-prévisible (cf. lemme II.1 ci-dessous), et nous avons

1. A peut sauter en 0 et à l'infini.

$$(8)\qquad E[\int_{[0,\infty]} H_s dJA_s] = E[\int_{[0,\infty]} H_s dA_s^{(B)}] = E[\int_{[0,\infty]} BH_s dA_s]$$

Cette formule montre que $A^{(B)}$ ne change pas si l'on remplace A par son compensateur $(\underline{\underline{F}}_t)$-prévisible.

REMARQUE. Si A est $(\underline{\underline{F}}_t)$-prévisible et porté par G ($1_G*A=A$), on a $(JA)_t = A_{j_t} = A_{i_t}$, qui est $(\overline{\underline{\underline{F}}}_t)$-prévisible (raisonnement direct, ou remarque suivant le lemme II.1 plus bas). On a donc $A^{(B)}=JA$.

II. MARTINGALES CHANGEES DE TEMPS

1. Nous désignons par $\underline{\underline{M}}^2$ ($\underline{\underline{M}}^1$) l'espace des martingales de carré intégrable (resp. uniformément intégrables) de la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$. Comme nous ne supposons pas que $\underline{\underline{F}}_\infty = \underline{\underline{F}}_{\infty-}$, les éléments de $\underline{\underline{M}}^1$, $\underline{\underline{M}}^2$ doivent être considérés comme des processus indexés par $[0,\infty]$, pouvant présenter un saut à l'infini. Le sens des notations analogues $\overline{\underline{\underline{M}}}^2$, $\widetilde{\underline{\underline{M}}}^1$... est évident.

PROPOSITION 2. <u>Pour tout</u> $X \in \underline{\underline{M}}^1$ <u>on a</u> $JX \in \overline{\underline{\underline{M}}}^1$, <u>et pour tout</u> $\overline{X} \in \overline{\underline{\underline{M}}}^1$ <u>il existe</u> $X \in \underline{\underline{M}}^1$ <u>unique tel que</u> $\overline{X}=JX$. <u>On a le même énoncé pour</u> $\underline{\underline{M}}^2$ <u>et</u> $\overline{\underline{\underline{M}}}^2$.

<u>Démonstration</u>. On a d'après le théorème d'arrêt de Doob

$$JX_t = X_{j_t} = E[X_\infty | \underline{\underline{F}}_{j_t}] = E[X_\infty | \overline{\underline{\underline{F}}}_t]$$

donc $JX=\overline{X}$ est une martingale uniformément intégrable de $(\overline{\underline{\underline{F}}}_t)$. Avec nos conventions, on a $X_\infty = \overline{X}_\infty$, et il est alors immédiat de vérifier que tout $\overline{X} \in \overline{\underline{\underline{M}}}^1$ est égal à JX, où X est la martingale $E[\overline{X}_\infty | \underline{\underline{F}}_t]$. L'unicité est claire.

REMARQUE. En effectuant le changement de temps inverse, on obtient le résultat suivant : si $\overline{X} \in \overline{\underline{\underline{M}}}^1$, alors $C\overline{X} \in \widetilde{\underline{\underline{M}}}^1$, et C établit une bijection entre $\overline{\underline{\underline{M}}}^1$ et $\widetilde{\underline{\underline{M}}}^1$. Rappelons que les martingales <u>locales</u> se comportent mal dans les changements de temps ([8],[12]).

2. <u>Changement de temps dans l'intégrale stochastique</u>

Nous rappelons d'abord la notion de <u>semimartingale jusqu'à l'infini</u> par rapport à $(\underline{\underline{F}}_t)$: c'est un processus X indexé par $[0,\infty]$, càdlàg et adapté à $(\underline{\underline{F}}_t)$, tel que si l'on effectue un isomorphisme entre l'ensemble de temps $[0,\infty]$ et l'ensemble de temps $[0,1]$, le processus $(X'_t)_{0 \leq t \leq 1}$ obtenu par transport de structure soit prolongeable au delà de 1 en une semimartingale. On peut montrer[1] que cette propriété équivaut à la suivante : il existe une loi Q équivalente à P telle que, pour la loi Q, X admette une décomposition X=M+A, où A est un processus à variation intégrable, M une martingale uniformément intégrable.

---

1. Séminaire de Probabilités XI, p. 483 (théorème de Stricker).

Voici un lemme facile, qui aurait pu figurer au paragraphe 1

LEMME II.1. Soit H un processus prévisible par rapport à $(\overline{\underline{\underline{F}}}_t)$ (indexé par $[0,\infty]$). Alors BH est prévisible par rapport à $(\underline{\underline{F}}_t)$.

Démonstration. Nous prenons pour H un processus de la forme

(*) $H = h_0 1_{\{0\}} + \Sigma_i h_i 1_{]t_i,t_{i+1}]}$ $(h_0 \in \overline{\underline{\underline{F}}}_{0-}^{(1)}$, $0=t_0<t_1 \ldots \leq +\infty$, $h_i \in \overline{\underline{\underline{F}}}_{t_i}$).

Alors d'après (3)

$$BH = h_0 1_{\{0\}} + \Sigma_i h_i 1_{]J_{t_i},J_{t_{i+1}}]} \quad (h_0 \in \underline{\underline{F}}_{0-} \ ; \ h_i \in \underline{\underline{F}}_{J_{t_i}})$$

qui est bien prévisible par rapport à $(\underline{\underline{F}}_t)$. On raisonne ensuite par classes monotones.

REMARQUE. En effectuant le changement de temps inverse, on voit que si K est un processus prévisible par rapport à $(\underline{\underline{F}}_t)$ (ou même à $(\tilde{\underline{\underline{F}}}_t)$ si M est sans point isolé ; cf. la remarque 2 après la prop.1), IK est prévisible par rapport à $(\overline{\underline{\underline{F}}}_t)$.

PROPOSITION 3. Soit X une semimartingale jusqu'à l'infini par rapport à $(\underline{\underline{F}}_t)$; alors JX est une semimartingale jusqu'à l'infini par rapport à $(\overline{\underline{\underline{F}}}_t)$.

Si H est prévisible borné par rapport à $(\overline{\underline{\underline{F}}}_t)$, on a alors

(9) $$\int_{[0,\infty]} H_s dJX_s = \int_{[0,\infty]} BH_s dX_s \quad \text{p.s.}$$

Démonstration. Quitte à remplacer P par une loi équivalente, nous pouvons supposer que X=M+A, où A est à variation intégrable et M appartient à $\underline{\underline{M}}^1$. Alors JA est à variation intégrable, et JM appartient à $\overline{\underline{\underline{M}}}^1$ (prop. 2). Donc JX=JM+JA est une semimartingale jusqu'à l'infini.

La formule (9) est évidente lorsque H est de la forme (*), et on l'étend à tous les processus prévisibles bornés par un raisonnement de classes monotones.

REMARQUE. En appliquant ce qui précède au changement de temps inverse, on voit que si Y est une semimartingale jusqu'à l'infini par rapport à $(\overline{\underline{\underline{F}}}_t)$, K un processus prévisible borné par rapport à $(\underline{\underline{F}}_t)$, alors CY est une semimartingale jusqu'à l'infini par rapport à $(\underline{\underline{F}}_t)$ et l'on a

(10) $$\int_{[0,\infty]} K_s dCY_s = \int_{[0,\infty]} IK_s dY_s \quad \text{p.s.}$$

3. Partie martingale continue d'une semimartingale changée de temps.

Dans cette section, nous considérons une semimartingale jusqu'à l'infini X par rapport à $(\underline{\underline{F}}_t)$, et nous désignons par X^c sa partie martingale

1. On rappelle que $\overline{\underline{\underline{F}}}_{0-} = \underline{\underline{F}}_{0-}$.

locale continue, et par $(JX)^c$ la partie martingale locale continue de JX par rapport à $(\overline{\underline{\underline{F}}}_t)$. Notre but est de démontrer la proposition suivante, où G est l'ensemble $(\underline{\underline{F}}_t)$-prévisible défini au n° I.3.

PROPOSITION 4. <u>On a</u> $(JX)^c = J(1_G * X^c)$.

<u>Démonstration</u>. Nous commençons par le cas où $X\in\underline{\underline{M}}^2$. Posons $1_G*X^c=U$, $X^d=V$, $1_{G^c}*X^c=W$. Ces trois processus appartiennent à $\underline{\underline{M}}^2$, donc JU, JV, JW appartiennent à $\overline{\underline{\underline{M}}}^2$ (prop.2). Nous allons prouver

a) JU est continue

b) JV est purement discontinue

c) JW est purement discontinue .

a) Soit δ l'intervalle stochastique $]t,D_t]$. On a $1_\delta*U = 1_\delta*(1_G*X^c) = 1_{\delta\cap G}*X^c=0$. Autrement dit, $U_{D_t}=U_t$ p.s. pour tout t, donc (remarque suivant le lemme I.2) $U_{j_t}=U_{i_t}$ pour tout t, et comme U est continue sur G le lemme I.2 entraîne que U est continue.

b) V est limite dans $\underline{\underline{M}}^2$ de martingales V^n à variation intégrable, donc JV est limite dans $\overline{\underline{\underline{M}}}^2$ des martingales JV^n à variation intégrable, et JV est donc purement discontinue.

c) Désignons par $]S_n^\varepsilon,T_n^\varepsilon[$ le n-ième intervalle contigu à M dont la longueur dépasse ε (s'il n'existe pas de tel intervalle, on a $S_n^\varepsilon=T_n^\varepsilon=+\infty$). Posons $R_n^\varepsilon=S_n^\varepsilon+\varepsilon$, qui est un temps d'arrêt (cf. [2]). Soit aussi

$$W_k^\varepsilon = \Sigma_1^k \, 1_{]R_n^\varepsilon,T_n^\varepsilon]}*W$$

Comme $W=1_{G^c}*W$, on a dans $\underline{\underline{M}}^2$ $W=\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{k\to\infty} W_k^\varepsilon$, donc aussi dans $\overline{\underline{\underline{M}}}^2$ $JW=\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{k\to\infty} JW_k^\varepsilon$, et finalement il suffit de montrer que JW_k^ε est purement discontinue. Or $1_{]R_n^\varepsilon,T_n^\varepsilon]}*W=(W_{t\wedge T_n^\varepsilon}-W_{R_n^\varepsilon})1_{\{t\geq R_n^\varepsilon\}}$, et il en résulte que non seulement JW_k^ε est à variation intégrable, mais qu'elle est la somme de ses sauts (sans compensation). Ainsi JW appartient à la classe des "martingales de sauts", étudiée dans [11], qui est plus restreinte en général que celle des martingales purement discontinues.

Passons maintenant au cas des semimartingales. Revenons à la définition des semimartingales jusqu'à l'infini (début du n° II.2) : ramenant $[0,\infty]$ sur $[0,1]$, nous définissons un processus $(X'_t)_{0\leq t\leq 1}$, prolongeable au delà de 1 en une semimartingale $(X'_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$; X' admet une décomposition $X'=M'+A'$, où M' est une martingale locale nulle en 0 à sauts bornés, A' un processus à variation finie, et l'on a $X'^c=M'^c+A'^c=M'^c$. De plus, il existe des temps d'arrêt $T'_n\uparrow+\infty$ tels que M' arrêtée à T'_n soit une martingale bornée. Arrêtant tout à 1 et revenant à la situation initiale, nous obtenons :

$X=M+A$, où M est une martingale locale nulle en 0, à sauts bornés, qui est une semimartingale jusqu'à l'infini, et A est à variation finie sur $[0,\infty]$; $X^c=M^c$ est une semimartingale jusqu'à l'infini ; il existe des $T_n\uparrow+\infty$ tels que M^{T_n} soit une martingale bornée, et que $P\{T_n<\infty\}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Décomposons M en 1_G*M^c+N, et montrons que $(JX)^c=J(1_G*M^c)$.

Tout d'abord, A étant à variation finie, JA est à variation finie, et donc $(JA)^c=0$.

Ensuite, posons $S_n=B_{T_n}$, qui est un t.d'a. de $(\underline{\underline{F}}_t)$ (prop.1). Sur $[0,S_n[$, JN coincide avec $J(N^{T_n})$, qui est sans partie martingale continue d'après la première partie. Sur $[0,S_n]$, JN s'écrit donc $J(N^{T_n})+L$, où L est à variation finie, et donc $(JN)^c=0$ sur $[0,S_n]$. Comme $P\{T_n<\infty\}\to 0$, on a $P\{S_n<\overline{Z}\}\to 0$, donc $(JN)^c=0$ sur $[0,\overline{Z}]$; comme JN est arrêtée à $\overline{Z}$, on a $(JN)^c=0$.

Il reste donc seulement à montrer que si l'on pose $U=1_G*M^c$, JU est une martingale locale continue. La continuité est facile (cf. la partie a) au début de la démonstration). M^{T_n} est bornée, donc appartient à $\underline{\underline{M}}^2$, donc $(M^c)^{T_n}$ et U^{T_n} sont dans $\underline{\underline{M}}^2$. Comme U est constante sur $[T_n,D_{T_n}]$, JU coincide avec $J(U^{T_n})$, non seulement sur $[0,S_n[$, mais sur $[0,C_{T_n}]$. Comme $P\{T_n<\infty\}\to 0$, il en est de même de $P\{C_{T_n}<\infty\}$, et JU arrêtée à C_{T_n} appartient à $\overline{\underline{\underline{M}}}^2$, donc JU est bien une martingale locale, et la proposition est établie.

4. Processus croissants associés à JX

Nous commençons par quelques remarques simples :

REMARQUES 1. a) Si $X\in\underline{\underline{M}}^2$, $X^2-\langle X\rangle$ appartient à $\underline{\underline{M}}^1$, donc $(JX)^2-JX$ appartient à $\overline{\underline{\underline{M}}}^1$. Par conséquent, $\langle JX\rangle$ est le J-balayé de $\langle X\rangle$ ou de $[X]$.

b) Plus précisément, on a identifié dans la proposition 4 $(JX)^c$ et $(JX)^d$; $\langle (JX)^c\rangle$ est le J-balayé de $\langle 1_G*X^c\rangle = 1_G*\langle X^c\rangle$, c'est à dire

(11) $\quad \langle (JX)^c \rangle = [\,(JX)^c] = \quad (1_G*\langle X^c\rangle)^{(B)} = J(1_G*\langle X^c\rangle)$

(n° I.4, remarque suivant la formule (8)). De même

(12) $\quad \langle (JX)^d\rangle = (1_G*\langle X^d\rangle + 1_{G^c}*\langle X\rangle\,)^{(B)} = J(1_G*\langle X^d\rangle) + (1_{G^c}*\langle X\rangle)^{(B)}$.

On a d'autre part la proposition suivante :

PROPOSITION 5. Soit X une semimartingale jusqu'à l'infini. On a

(13) $\quad [J(1_G*X)] = J(1_G*[X]) \quad ; \; [J(1_{G^c}*X)]_t = \sum_{s\leq t} (X_{j_s}-X_{i_s})^2$.

Démonstration. Posons $1_G*X=H$, $1_{G^c}*X=K$. Nous avons $K=1_{G^c}*K$, donc $K^c=1_{G^c}*K^c$, et finalement $1_G*K^c=0$. D'après la proposition 4, JK n'a pas de partie martingale locale continue, et par conséquent

$$[JK]_t = \sum_{s \leq t} \Delta(JK)_s^2 = \sum_{s \leq t} (K_{j_s} - K_{i_s})^2$$

d'après le lemme I.2, puisque K n'a pas de saut sur G. D'autre part, on a $H_{j_s} - H_{i_s} = 0$ (cf. a) dans la démonstration de la prop. 4), donc $K_{j_s} - K_{i_s} = X_{j_s} - X_{i_s}$, et la seconde des formules (13) est établie.

Passons à H. Comme $H_{j_s} - H_{i_s} = 0$ pour tout s, le lemme I.2 nous donne

$$\Delta[JH]_t = (\Delta(JH)_t)^2 = (\Delta H_{i_t} 1_{\{t \in \overline{G}\}})^2$$

D'autre part, on a aussi $1_G * [H] = [H]$, donc d'après le lemme I.2 $\Delta(J[H])_t = \Delta[H]_{i_t} 1_{\{t \in \overline{G}\}}$. Dans la première formule (13), les deux membres ont donc les mêmes sauts. Il reste à examiner les parties continues.

D'après la proposition 4, la partie martingale locale continue de JH est $J(H^c)$. Posons $Y = (H^c)^2 - [H^c]$; Y est une semimartingale jusqu'à l'infini, continue, satisfaisant à $1_G * Y = Y$ (car $Y = 2H^c_- * H^c$, et on a $1_G * H^c = H^c$), et c'est une martingale locale. Donc $Y = Y^c$. D'après la proposition 4, la partie martingale locale continue de JY est $J(1_G * Y^c) = JY$, donc JY est une martingale locale. Autrement dit, $(J(H^c))^2 - J[H^c]$ est une martingale locale. D'autre part, $J[H^c]$ est continu d'après le lemme I.2. Finalement, cela exprime que

$$[J(H^c)] = J[H^c]$$

et la première des formules (13) en résulte aussitôt.

REMARQUES 2. a) Les formules (13) ne nous permettent pas de calculer [JX] par simple addition. On a en effet, avec les notations de la démonstration

$$[JX] = [JH] + [JK] + 2[JH, JK]$$

Comme JK est sans partie martingale continue, ce dernier crochet se réduit à une somme de sauts, mais JH et JK peuvent avoir des sauts communs. D'après le lemme I.2,

$$[JH, JK]_t = \sum_{s \leq t} \Delta X_{i_s} (X_{j_s} - X_{i_s}) 1_{\{s \in \overline{G}\}} \tag{14}$$

car si $s \notin \overline{G}$ on a $\Delta(JH)_s = H_{j_s} - H_{i_s} = 0$, et si $s \in \overline{G}$ on a $i_s \in G$, donc $\Delta K_{i_s} = 0$, $\Delta(JK)_s = K_{j_s} - K_{i_s} = X_{j_s} - X_{i_s}$, $\Delta(JH)_s = \Delta H_{i_s} = \Delta X_{i_s}$.

b) Supposons que X appartienne à $\underline{\underline{M}}^2$; alors H et K appartiennent à $\underline{\underline{M}}^2$ et sont orthogonales, HK appartient à $\underline{\underline{M}}^1$, donc J(HK) appartient à $\underline{\underline{M}}^1$, et [JH, JK] est une martingale locale. La proposition 5 nous donne alors par addition que $\langle JX \rangle$ est la somme des compensateurs prévisibles de [JH] et [JK]. Le premier est $\langle JH \rangle = (1_G * \langle H \rangle)^{(B)} = J(1_G * \langle H \rangle) = J(1_G * \langle X \rangle)$. D'autre part, on a $[JK]=JW$ d'après (13), où W est le processus croissant

(15) $$W_t = \sum_{\substack{s\in M^{\rightarrow} \\ D_s \leq t}} (X_{D_s} - X_s)^2$$ où $M^{\rightarrow}$ est l'ensemble des extrémités gauches d'intervalles contigus à M

Donc on a $\langle JK\rangle = W^{(B)}$. Rapprochant les formules

$$\langle JX\rangle = J(\, 1_G * \langle X\rangle\,) + (1_{G^c} * \langle X\rangle)^{(B)} \quad \text{(addition de (11) et (12))}$$

$$\langle JX\rangle = J(1_G * \langle X\rangle) + W^{(B)} \quad \text{(qui vient d'être établie)}$$

on obtient que

(16) $$W^{(B)} = (1_{G^c} * \langle X\rangle)^{(B)}.$$

5. Un exemple.

Considérons sur un même espace probabilisé complet deux filtrations. La première, notée $(\underline{\underline{U}}_t)$, satisfait aux conditions habituelles. La seconde, notée $(\underline{\underline{V}}_t)$, est la filtration naturelle d'un subordinateur (j_t) sans partie continue, tel que $j_0=0$. On suppose que $\underline{\underline{U}}_\infty$ et $\underline{\underline{V}}_\infty$ sont indépendantes, et l'on pose $\underline{\underline{F}}_t=(\underline{\underline{U}}_t \otimes \underline{\underline{V}}_t)_+ \vee \underline{\underline{N}}$, où $\underline{\underline{N}}$ est la tribu engendrée par les ensembles négligeables. Il est très facile de vérifier que toute martingale (locale) par rapport à $(\underline{\underline{U}}_t)$ est encore une martingale (locale) par rapport à $(\underline{\underline{F}}_t)$.

Soit X une telle martingale, que nous supposons pour simplifier de carré intégrable. Comme (j_t) est purement discontinu, son inverse à droite (C_t) ne croît que sur un ensemble M négligeable au sens de Lebesgue, et l'ensemble G est négligeable au sens de Lebesgue. Si $\langle X\rangle$ est absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue[1], on a donc $1_G * X=0$, et les propositions 4 et 5 nous disent que

- JX est purement discontinue, et même une "martingale de sauts".
- $[JX]_t = \sum_{s\leq t} (X_{j_s} - X_{i_s})^2$.

III. APPLICATIONS AUX PROCESSUS DE MARKOV

1. Le cas général

Nous désignons maintenant par (ξ_t) un processus de Hunt, d'espace d'états E ; la loi initiale est notée μ . Nous allons appliquer les résultats précédents en prenant pour (C_t) une fonctionnelle additive continue de ξ, de support fin $\bar{E}$. Il est bien connu que le processus changé de temps associé $\bar{\xi}_t=\xi_{j_t}$ est un processus de Markov d'espace d'états $\bar{E}$; c'est encore un processus de Hunt si $\bar{E}$ est projectif (cf. [1]), hypothèse que nous ferons dans la suite. L'ensemble M des points de croissance de C est indistinguable de $\{t : \xi_t \in \bar{E}\}$, et l'ensemble G est égal à $M \setminus M^{\leftarrow}$, où $M^{\leftarrow}$ est

1. Cette hypothèse est elle vraiment nécessaire ?

l'ensemble des extrémités droites d'intervalles contigus à M. On rappelle que $\overline{E}$, support fin d'une fonctionnelle additive continue, est un ensemble "finement parfait", et que M est un ensemble parfait aléatoire.

Soit f un potentiel régulier sur E, que nous supposerons borné pour fixer les idées ; f est engendré par une fonctionnelle additive continue (A_t), et le processus $X_t = f(\xi_t)+A_t$ est une martingale de carré intégrable pour la loi P_μ. La restriction $\overline{f}=f|_{\overline{E}}$ est alors un potentiel pour le processus $(\overline{\xi}_t)$, dont la fonctionnelle additive $\overline{A}_t$ associée est égale à $A_t^{(B)}-A_0^{(B)}$ (une fonctionnelle additive est nulle en 0). Nous simplifierons un peu en supposant μ portée par $\overline{E}$ (ainsi $j_0=0$, $A^{(B)}=\overline{A}$). Nous supposons maintenant que f est harmonique hors de $\overline{E}$, i.e. que A est portée par $\overline{E}$. Alors $JA=A^{(B)}=\overline{A}$ (fin du §I), $\overline{f}$ est un potentiel régulier sur $\overline{E}$, et la martingale changée de temps $\overline{X}=JX$ est égale à $\overline{f}(\overline{\xi}_t)+\overline{A}_t$. On a d'après (11)

$$(17)\qquad \langle\overline{X}^c\rangle_t = \int_0^{j_t} 1_G(s)d\langle X^c\rangle_s = \int_0^{j_t} 1_{\overline{E}}(\xi_s)d\langle X^c\rangle_s$$

Une formule analogue a été établie en théorie du potentiel : cf [10], III.1.1. On remarquera que la partie martingale continue de $\overline{X}$ est aussi la partie martingale continue de la semimartingale $\overline{f}\circ\overline{\xi}_t$.

REMARQUE. Il arrive assez fréquemment, en théorie des processus de Markov, que l'on ait $d\langle X\rangle_t \ll dt$ pour toute martingale de carré intégrable X. On a alors $\int_0^{\cdot} 1_G(s)d\langle X^c\rangle_s=0$ dès que $\int_0^{\cdot} 1_G(s)ds=0$, c'est à dire dès que $\overline{E}$ est un ensemble de potentiel nul (ce qui est une hypothèse normale pour une "frontière"). La martingale changée de temps $\overline{X}$ est alors purement discontinue, et c'est même une martingale de sauts si X est continue. Cela s'applique en particulier au cas où ξ est un mouvement brownien, $\overline{E}$ la frontière d'un "bon" ouvert.

Interprétons maintenant la formule (16). Le processus croissant W de (15) vaut, puisque A est constante sur les intervalles fermés contigus à M

$$(18)\qquad W_t = \sum_{\substack{s\in M^{\rightarrow}\\ D_s\leq t}} (f(\xi_{D_s})-f(\xi_s))^2$$

Nous avons aussi

$$[X^d]_t = \Sigma_{s\leq t}\,\Delta X_s^2 = \Sigma_{s\leq t}\,(f(\xi_s)-f(\xi_{s-}))^2$$

où nous avons utilisé la continuité de A, et le fait que $f(\xi_{s-})=(f\circ\xi)_{s-}$ (ξ est un processus de Hunt). Par conséquent

$$\langle X^d\rangle_t = \int_0^t\int_E (f(\xi_s)-f(z))^2 N(\xi_s,dz)dK_s$$

où (N,K) est un système de Lévy de ξ. De la même manière, $\overline{\xi}$ étant un processus de Hunt, on peut écrire

$$(19)\qquad < (JX)^d>_t = < \overline{X}^d>_t = \int_0^t\int_{\overline{E}} ((f(\overline{\xi}_s)-f(z))^2\overline{N}(\overline{\xi}_s,dz)d\overline{K}_s$$

où $(\overline{N},\overline{K})$ est un système de Lévy de $\overline{\xi}$ (et où on a simplement écrit f au lieu de $\overline{f}$). Ainsi la formule (12) nous donne, compte tenu de (16)

$$(20)\qquad \int_0^t\int_{\overline{E}} (f(\overline{\xi}_s)-f(z))^2\overline{N}(\overline{\xi}_s,dz)d\overline{K}_s$$
$$= \int_0^{j_t}\int_{E} (f(\xi_s)-f(z))^2N(\xi_s,dz)1_{\overline{E}}(\xi_s)dK_s^{(1)} + W_t^{(B)}$$

W étant défini par (18). Cette formule peut aussi se déduire de l'expression suivante du système de Lévy de $\overline{\xi}$, facile à établir à partir des résultats de I.3 et I.4 ci-dessus : soient f et g deux fonctions positives sur E, à supports disjoints. Soit H le processus croissant

$$H_t = \sum_{\substack{s\in \vec{M} \\ D_s\leq t}} f(\xi_{D_s})g(\xi_s)$$

Alors

$$(21)\qquad \int_0^t g(\overline{\xi}_{s-})\overline{N}f(\overline{\xi}_s)d\overline{K}_s = \int_0^{j_t} g(\xi_{s-})Nf(\xi_s)1_{\overline{E}}(\xi_s)dK_s + H_t^{(B)} .$$

Des formules analogues ont été établies en théorie des processus de Markov : voir par exemple [5], [6], [13], [14].

2. La formule de Douglas

Nous pouvons maintenant revenir à la formule de Douglas citée dans l' introduction . Nous ne cherchons pas à préciser ni à affaiblir les conditions de régularité - en fait, on peut toujours écrire une "formule de Douglas" pour une fonction harmonique d'énergie finie dans un ouvert D, en considérant sa frontière de Martin - mais nous voulons seulement montrer que cette formule est naturellement associée au changement de temps, et donner une interprétation probabiliste de la mesure de Naim $\Theta(dx,dy)$.

Soit donc D un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de frontière régulière δ, et soit V un voisinage ouvert borné de $\overline{D}$. Nous désignons par (ξ_t) le mouvement brownien dans V (i.e. tué à la sortie de V), par G le noyau potentiel correspondant (si λ est une mesure, $G\lambda$ est le potentiel de Green de λ). Nous prenons pour μ la mesure associée au potentiel capacitaire de D : $G\mu(x) = E_x\{T_D<\zeta\}$ pour tout $x\in V$; μ est positive et bornée, et $G\mu=1$ sur $\overline{D}$.

Nous prenons pour f un potentiel borné dans V, harmonique dans D, avec la convention usuelle $f(\xi_t)=0$ pour $t\geq\zeta$ (d'une manière générale, nous écrivons t au lieu de $t\wedge\zeta$ dans les formules ci-dessous). La fonctionnelle

1. $1_G(s) = 1_{\overline{E}}(\xi_s)$ dK-p.s., puisque K est continue.

additive A qui engendre f est portée par $V\setminus D$. Nous prendrons pour (C_t) un temps local de $V\setminus D$, c'est à dire une fonctionnelle additive continue de (ξ_t) dont le support fin est $V\setminus D$; avec les notations précédentes, on a donc $V\setminus D = \overline{E}$. Comme la mesure initiale μ est portée par la frontière de D, on a $J_0=0$ p.s..

L'énergie de f, considérée comme fonction harmonique dans D, est égale à l'intégrale de Dirichlet $\int_D \|\mathrm{grad} f(x)\|^2 dx$; or la mesure μG est égale sur D à la mesure de Lebesgue, et cette énergie vaut donc aussi

$$(22)\quad \int_{V\times V} \mu(dy)G(y,x)dx\, \|\mathrm{grad} f(x)\|^2 1_D(x) = $$
$$= E_\mu[\int_0^\infty \|\mathrm{grad} f(\xi_s)\|^2 1_D(\xi_s)\, ds\,]$$

(d'après la symétrie de la fonction de Green).

Posons d'autre part $X_t=f(\xi_t)+A_t$. La formule d'Ito nous donne

$$(23)\qquad \langle X\rangle_t = \langle X^c\rangle_t = \int_0^t \|\mathrm{grad} f(\xi_s)\|^2 ds$$

et nous recopions la formule (17)

$$(24)\qquad \langle \overline{X}^c\rangle_t = \int_0^{j_t} 1_{V\setminus D}(\xi_s)\|\mathrm{grad} f(\xi_s)\|^2 ds$$

Donc

$$E[\int_0^{j_t} 1_D(\xi_s)\|\mathrm{grad} f(\xi_s)\|^2 ds] = E[\langle X\rangle_{j_t} - \langle \overline{X}^c\rangle_{j_t}] = E[\langle \overline{X}_t\rangle - \langle \overline{X}^c\rangle_t]$$
$$= E[\langle \overline{X}^d\rangle_t]$$

qui vaut d'après la formule (19)

$$E[\int_0^t\int_{V\setminus D} ((f(\overline{\xi}_s)-f(z))^2\overline{N}(\overline{\xi}_s,dz)\, d\overline{K}_s\,]^{(1)}$$

En fait, l'intégration sur $V\setminus D$ peut être remplacée par une intégration sur δ, car le système de Lévy ne charge que δ du fait de la continuité de ξ. Faisant tendre t vers l'infini, on déduit de (22) la valeur suivante de l'énergie de f

$$E_\mu[\int_0^\infty\int_\delta (f(\overline{\xi}_s)-f(z))^2\overline{N}(\overline{\xi}_s,dz)d\overline{K}_s] = \int_{\delta\times\delta} (f(y)-f(z))^2\Theta(dy,dz)$$

où Θ est la mesure positive sur $\delta\times\delta$ privé de la diagonale, donnée par

$$(25)\qquad \iint h(y,z)\Theta(dy,dz) = E_\mu[\int_0^\infty\int_\delta h(\overline{\xi}_s,z)\overline{N}(\overline{\xi}_s,dz)d\overline{K}_s\,]$$

où h est borélienne positive, nulle sur la diagonale.

Tout ce que nous avons fait ici pour un potentiel borné f dans V, harmonique dans D, s'étend aussitôt à une <u>différence</u> de tels potentiels.

Soit maintenant g une fonction de classe C^2 sur δ ; si δ est suffisamment régulière, g est la trace sur δ d'une fonction γ sur V, de classe C^2

---

1. Dans le cas qui nous occupe, on peut prendre $d\overline{K}_s=ds$.

et à support compact dans V ; γ est le potentiel de Green de la mesure (à support compact) $-\Delta\gamma=\lambda$, et la fonction

$$f(x)= H_{\delta}\gamma(x) = E_x[\ \gamma(\xi_{T_\delta})]$$

est le potentiel de Green de la mesure (bornée, portée par δ) balayée de λ sur δ . Donc f est une différence de potentiels bornés, et le calcul précédent s'applique à f. D'autre part, f coincide dans D avec le prolongement harmonique de g par l'intégrale de Poisson.

La formule de Douglas est donc établie pour les prolongements harmoniques de fonctions de classe C^2 sur δ ; il reste à l'étendre à toutes les fonctions harmoniques d'énergie finie dans D, ce que nous ne ferons pas ici.

Le même argument montre que Θ est une mesure de Radon sur $\delta\times\delta$ privé de la diagonale. En effet, si g est une fonction de classe C^2 sur δ, nous avons que $\iint_{\delta\times\delta}(g(y)-g(z))^2\Theta(dy,dz) < \infty$ d'après les lignes précédentes. Appliquant cela aux fonctions coordonnées d'indice 1,...,n et ajoutant, on voit que $\iint_{\delta\times\delta} \|y-z\|^2\Theta(dy,dz)<\infty$, donc Θ attribue une masse finie à tout compact de $\delta\times\delta$ disjoint de la diagonale.

REFERENCES

(1) BLUMENTHAL, R.M. GETOOR, R.K.: *"Markov processes and potentiel theory". N.Y. Academic Press (1968)* .

(2) DELLACHERIE, C. : *"Capacités et processus stochastiques". Springer Verlag (1972)* .

(3) DOOB, J.L. : *"Boundary properties of functions with finite Dirichlet integrals". Ann. Inst. Fourier Grenoble 12, 573-621 (1962).*

(4) DOUGLAS, J. : *"Solution of the problem of Plateau." Trans. Amer. Math soc. 33, 263-321 (1931)* .

(5) GETOOR, R.K. SHARPE, M.J. : *"Last exit times and additive fonctionnals". Annals of Prob. 1, 550-569 (1973)* .

(6) EL-KAROUI, N. REINHARD, H. : *"Compactification et balayage de processus droits". Astérisque 21 (1975)* .

(7) EL-KAROUI, N. WEIDENFELD, G. : *"Théorie générale et changement de temps". Séminaire de Probabilités XI. Lectures Notes n° 581. Springer Verlag (1977)* .

(8) KAZAMAKI, N. : *"Changes of time, stochastic integrals and weak martingales". Z. für Wahrs. Th. 22, 25-32 (1972) .*

(9) KUNITA, H. : *"Boundary conditions for multidimensional diffusion processes". Kyoto J. of Maths 1970, 273-335.*

(10) LE JAN, Y. : *"Mesures associées à une forme de Dirichlet - Applications". A paraître à la revue de la S.M.F.*

(11) LE JAN, Y. : *"Temps d'arrêt stricts et martingales de sauts." A paraître.*

(12) MEYER, P.A. : *"Un cours sur les intégrales stochastiques". Séminaire de Probabilités X. Lectures Notes n° 511. Springer Verlag (1976) .*

(13) MOTOO, M. : *"Application of additive functionnals to the boundary problem of Markov processes". 5th Berkeley symp. II Port 2,75-110(1967).*

(14) SILVERSTEIN, M. : *"Symetric Markov processes". Lectures Notes n° 426 Springer Verlag (1974) .*

Yves Le Jan
Laboratoire de Probabilités
Université Paris VI
2 Place Jussieu T.56
75230 Paris Cedex 05

(L.A. associé au CNRS)