MICHEL ÉMERY

Équations différentielles stochastiques lipschitziennes : étude de la stabilité

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 13 (1979), p. 281-293
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1979__13__281_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités

EQUATIONS DIFFERENTIELLES LIPSCHITZIENNES
ETUDE DE LA STABILITE

par M. EMERY

Cet exposé est consacré à l'étude de la stabilité de la solution de l'équation différentielle stochastique de Doléans-Dade et Protter

$$X_t = H_t + \int_0^t [F(X)]_{s-}\, dM_s$$

lorsqu'on perturbe simultanément les trois paramètres H, F et M. Les méthodes sont celles employées par Doléans-Dade et Protter pour résoudre l'équation; les résultats seront énoncés relativement à la topologie de la convergence compacte en probabilité et à la topologie des semimartingales étudiée dans l'exposé [3]. Pour éviter de renvoyer le lecteur à Protter [12], qui fait lui-même référence à l'article parfois obscur [4], nous reprendrons le sujet à son début; nous redémontrerons en passant le théorème d'existence et d'unicité de Doléans-Dade et Protter.

Les notations sont celles du "Cours sur les intégrales stochastiques" de Meyer, ainsi que de l'exposé [3] "Une topologie sur l'espace des semimartingales", dont nous supposerons connus les résultats. Rappelons que les conditions sont habituelles, que le mot <u>localement</u> est pour nous relatif à des arrêts à T- et que $\underline{\underline{D}}$ désigne l'espace des processus càdlàg adaptés, muni de la topologie de la convergence compacte en probabilité, et $\underline{\underline{SM}}$ l'espace des semimartingales, muni de la topologie introduite dans [3]. Toutefois, pour $Z \in \underline{\underline{D}}$, la notation Z^* désignera ici la <u>variable aléatoire</u> finie ou non $\sup_t |Z_t|$ (et non un processus croissant).

DEFINITION. <u>Soit</u> $a > 0$. <u>On appelle</u> Lip(a) <u>l'ensemble des applications</u> F <u>de</u> $\underline{\underline{D}}$ <u>dans</u> $\underline{\underline{D}}$, <u>non nécessairement linéaires</u>, <u>mais</u>

1) <u>non anticipantes</u>: <u>pour tout temps d'arrêt</u> T, <u>et pour tous</u> X <u>et</u> Y <u>de</u> $\underline{\underline{D}}$ <u>tels que</u> $X^{T-} = Y^{T-}$, <u>on a</u> $(FX)^{T-} = (FY)^{T-}$;

2) a-<u>lipschitziennes</u>: $(FX - FY)^* \leq a\,(X-Y)^*$.

Par exemple, si $f(\omega,t,x)$ est une application de $\Omega \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

$\underline{\underline{F}}_t$-mesurable en ω pour t et x fixés,

càdlàg en t pour ω et x fixés,

et a-lipschitzienne en x pour ω et t fixés,

la fonctionnelle F donnée par $FX_t(\omega) = f(\omega,t,X_t(\omega))$ est dans Lip(a) (voir [1], [2]). Mais, plus généralement, F peut faire intervenir tout le passé de X avant t.

Si F est dans Lip(a), on n'a pas nécessairement $(FX)^{T-} = F(X^{T-})$; on conviendra des notations $FX_- = (FX)_-$, $FX^{T-} = (FX)^{T-}$, etc ...

Voici les énoncés que nous avons en vue:

THÉOREME 0. <u>Soit</u> $a > 0$.

a) <u>Pour</u> $H \in \underline{\underline{D}}$, $F \in \mathrm{Lip}(a)$, $M \in \underline{\underline{SM}}$, <u>il existe un et un seul</u> $X \in \underline{\underline{D}}$ <u>tel que</u>

$$X = H + FX_- \cdot M ;$$

<u>si de plus</u> $H \in \underline{\underline{SM}}$, $X \in \underline{\underline{SM}}$.

b) <u>Les deux applications ainsi définies de</u> $\underline{\underline{D}} \times \mathrm{Lip}(a) \times \underline{\underline{SM}}$ <u>dans</u> $\underline{\underline{D}}$ <u>et de</u> $\underline{\underline{SM}} \times \mathrm{Lip}(a) \times \underline{\underline{SM}}$ <u>dans</u> $\underline{\underline{SM}}$ <u>sont continues</u>.

THEOREME 0'. <u>Les résultats du théorème 0 restent vrais lorsqu'on y remplace la constante de Lipschitz</u> a <u>par une variable aléatoire</u> $\underline{\underline{F}}$<u>-mesurable p.s. finie</u>.

Dans le b), la topologie dont est muni Lip(a) est la topologie de la convergence simple associée à la topologie de $\underline{\underline{D}}$.

Avant d'attaquer les démonstrations, rendons à César ce qui est à César. Lorsque FX est du type $f(\omega,t,X_t(\omega))$, le a) est dû à Doléans-Dade ([1],[2]) et à Protter ([10],[11]) — chez Protter, H ne dépend pas de t ni f de ω — . C'est Meyer qui a remarqué que l'hypothèse plus faible $F \in \mathrm{Lip}(a)$ est suffisante; une méthode différente est employée par Métivier et Pellaumail ([6]). Pour le b), le cas continu a été abordé par Protter ([10]), le cas où M est fixe a été étudié dans [4]; Protter, dans [11], a obtenu, en perturbant M, le résultat de stabilité localement dans $\underline{\underline{H}}^p$; c'est lui qui a observé que la solution est stable en tant que semimartingale. La généralisation de l'existence et de l'unicité au cas où la constante de Lipschitz dépend de ω se fait, selon une idée de Lenglart ([5]), à l'aide d'un théorème de Jacod et Meyer([9]).

Tout ce que nous ferons subir à l'équation de Doléans-Dade et Protter reste vrai pour des systèmes d'équations

$$X^j = H^j + \sum_{i=1}^{m} (F^{ij}X^i)_-\cdot M^i \ , \quad 1 \leq j \leq n \ ;$$

ceci peut se voir par exemple à l'aide du formalisme des matrices carrées développé dans [4].

LE LEMME FONDAMENTAL

Rappelons tout d'abord quelques inégalités, relatives aux espaces $\underline{\underline{S}}^2$, $\underline{\underline{H}}^2$, $\underline{\underline{S}}^\infty$ et $\underline{\underline{H}}^\infty$ définis dans [7], d'utilisation constante dans la suite: Pour X et Y dans $\underline{\underline{D}}$, M dans $\underline{\underline{SM}}$, F dans Lip(a) et T dans $\underline{\underline{T}}$,

(1) $\quad \|M\|_{\underline{\underline{S}}^2} \leq 3\,\|M\|_{\underline{\underline{H}}^2}$ (inégalité de Doob) ;

(2) $\quad \|X_-\cdot M\|_{\underline{\underline{H}}^2} \leq \|X\|_{\underline{\underline{S}}^\infty}\,\|M\|_{\underline{\underline{H}}^2}$;

(3) $\quad \|X_-\cdot M\|_{\underline{\underline{H}}^2} \leq \|X\|_{\underline{\underline{S}}^2}\,\|M\|_{\underline{\underline{H}}^\infty}$;

(4) $\quad \|X_-\cdot M\|_{\underline{\underline{S}}^2} \leq 3\,\|X\|_{\underline{\underline{S}}^2}\,\|M\|_{\underline{\underline{H}}^\infty}$;

(5) $\quad \|FX-FY\|_{\underline{\underline{S}}^2} \leq a\,\|X-Y\|_{\underline{\underline{S}}^2}$;

(6) $\quad \|FX^{T-}\|_{\underline{\underline{S}}^2} \leq \|F0\|_{\underline{\underline{S}}^2} + a\,\|X^{T-}\|_{\underline{\underline{S}}^2}$ (ici, 0 est le processus nul).

Les quatre premières sont dans [7], (5) répète la définition de Lip(a), et la dernière résulte de (5) et de

$$\|FX^{T-}\|_{\underline{\underline{S}}^2} = \|F(X^{T-})^{T-}\|_{\underline{\underline{S}}^2} \leq \|F(X^{T-})\|_{\underline{\underline{S}}^2} \ .$$

LEMME 1. Soient $H \in \underline{\underline{S}}^2$, $F \in \mathrm{Lip}(a)$ telle que $F0 = 0$, et $M \in \underline{\underline{H}}^\infty$ telle que $\|M\|_{\underline{\underline{H}}^\infty} \leq \frac{1}{6a}$. L'équation

$$X = H + FX_{-} \cdot M$$

admet alors dans $\underline{\underline{S}}^2$ une solution et une seule. Celle-ci vérifie

$$\|X\|_{\underline{\underline{S}}^2} \leq 2 \|H\|_{\underline{\underline{S}}^2} .$$

Démonstration. L'application de $\underline{\underline{S}}^2$ dans lui-même qui à X associe $H + FX_{-} \cdot M$ est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne en vertu des inégalités (4) et (5), d'où (théorème du point fixe) l'existence et l'unicité. Elle envoie 0 sur H, d'où l'estimation. ∎

Ce lemme est à l'origine de l'idée suivante, clé de la méthode de Doléans-Dade: Puisqu'on sait contrôler l'équation quand M est petite, on va découper le temps en intervalles sur lesquels M varie peu, et résoudre l'équation par petits morceaux que l'on recollera ensuite.

DEFINITION. Soit $\varepsilon > 0$. On dit qu'une semimartingale M peut être découpée en tranches plus petites que ε, et l'on écrit $M \in D(\varepsilon)$, si M est dans $\underline{\underline{H}}^\infty$, et s'il existe une suite finie de temps d'arrêt $0 = T_0 \leq T_1 \leq \dots \leq T_k$ tels que $M = M^{T_k -}$ et que, pour $1 \leq i \leq k$,

$$\| (M - M^{T_{i-1}})^{T_i -} \|_{\underline{\underline{H}}^\infty} \leq \varepsilon .$$

Remarquer que l'expression dont on prend la norme n'est autre que l'accroissement de M sur l'intervalle $]\!]T_{i-1}, T_i[\![$. Cette définition exige que les sauts de M aux instants T_i soient bornés ($M \in \underline{\underline{H}}^\infty$), mais ils peuvent être grands.

PROPOSITION 1. Soit M une semimartingale.

a) Si $M \in D(\varepsilon)$, pour tout temps d'arrêt T, $M^T \in D(\varepsilon)$ et $M^{T-} \in D(2\varepsilon)$.

b) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des temps d'arrêt T arbitrairement grands tels que M^{T-} soit dans $D(\varepsilon)$.

Démonstration. Le a) résulte facilement des inégalités

$$\|M^T\|_{\underline{\underline{H}}^\infty} \leq \|M\|_{\underline{\underline{H}}^\infty} , \quad \|M^{T-}\|_{\underline{\underline{H}}^\infty} \leq 2 \|M\|_{\underline{\underline{H}}^\infty} .$$

Pour le b), remarquons d'abord que, si M^1 et M^2 sont deux semimartingales respectivement découpées en tranches plus petites que ε par des suites T^1_i et T^2_j de temps d'arrêt, le a) entraîne que M^1+M^2 est découpée en tranches plus petites que 2ε par la suite obtenue en réordonnant les points T^1_i, T^2_j.

Décomposons M en une martingale locale N à sauts bornés par ε et un processus à variation finie A (théorème de Doléans-Dade et Yen: [8]). Il suffit de démontrer séparément la proposition pour N et A. Pour A, pas de difficulté: on définit la suite T_k par $T_0=0$,

$$T_{k+1} = \inf\{t \geqq T_k : \int_{]T_k,t]} |dA_s| \geqq \varepsilon \quad \text{ou} \quad \int_0^t |dA_s| \geqq k\} ,$$

et, pour tout k, A^{T_k-} est dans $D(\varepsilon)$. Pour N, c'est à peine plus délicat: on définit la suite T_k par $T_0=0$,

$$T_{k+1} = \inf\{t \geqq T_k : [N,N]_t - [N,N]_{T_k} \geqq \varepsilon^2 \quad \text{ou} \quad [N,N]_t \geqq k\} ;$$

pour tout k, N^{T_k-} est dans $\underline{\underline{H}}^\infty$. Comme la semimartingale $(N-N^{T_k})^{T_{k+1}-}$ peut être décomposée en

$$(N^{T_{k+1}}-N^{T_k}) \quad - \quad \Delta N_{T_{k+1}} \, I_{\{T_{k+1}>T_k\}} \, I_{[\![T_{k+1},\infty[\![} \quad ,$$

sa norme dans $\underline{\underline{H}}^\infty$ est majorée par

$$\| \, ([N,N]_{T_{k+1}} - [N,N]_{T_k})^{\frac{1}{2}} \quad + \quad |\Delta N_{T_{k+1}}| \, \|_{L^\infty}$$

$$= \quad \| \, (\Delta N^2_{T_{k+1}} + [N,N]_{T_{k+1}-} - [N,N]_{T_k})^{\frac{1}{2}} \quad + \quad |\Delta N_{T_{k+1}}| \, \|_{L^\infty}$$

$$\leqq \quad (\varepsilon^2 + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} \quad + \quad \varepsilon \quad .$$

Donc, pour tout k, N^{T_k-} est dans $D((1+\sqrt{2})\varepsilon)$. ∎

LEMME 2 (Lemme fondamental). <u>Soient</u> $H \in \underline{\underline{S}}^2$, $F \in \mathrm{Lip}(a)$ <u>telle que</u> $F0=0$, <u>et</u> $M \in D(\frac{1}{6a})$. <u>L'équation</u> $X = H + FX_-\cdot M$ <u>admet alors dans</u> $\underline{\underline{S}}^2$ <u>une solution</u> X <u>et une seule</u>, <u>et on a l'estimation</u> $\|X\|_{\underline{\underline{S}}^2} \leqq b\,\|H\|_{\underline{\underline{S}}^2}$, <u>où</u> b <u>ne dépend que de</u> a <u>et</u> M.

<u>Démonstration</u>. Nous noterons $m = \|M\|_{\underline{\underline{H}}^\infty}$, $h = \|H\|_{\underline{\underline{S}}^2}$, et nous supposerons que M est découpée en k tranches plus petites que $\frac{1}{6a}$ par une suite de temps d'arrêt $0 = T_0 \leqq T_1 \leqq \ldots \leqq T_k$. L'idée est très simple: résoudre successivement l'équa-

tion sur les intervalles $[\![0,T_i[\![$, $[\![0,T_i]\!]$, $[\![0,T_{i+1}[\![$, en obtenant de proche en proche une estimation de la solution. Le passage de $[\![0,T_i[\![$ à $[\![0,T_i]\!]$ se fera par un calcul explicite du saut, le passage de $[\![0,T_i]\!]$ à $[\![0,T_{i+1}[\![$ à l'aide du lemme 2. Un petit détail: il ne faudra pas oublier les ω pour lesquels $T_{i+1} = T_i$.

Nous allons donc étudier successivement les équations

$$E_i: \qquad X = H^{T_i -} + FX_- \cdot M^{T_i -} \qquad (0 \leq i \leq k) \quad .$$

Pour $i = 0$, pas de problème: l'équation s'écrit $X = 0$, elle admet une solution et une seule, de norme dans $\underline{\underline{S}}^2$ $x^0 = 0$. Supposons que l'équation E_i admette, dans $\underline{\underline{S}}^2$, une solution et une seule, X^i, de norme x^i. Nous allons montrer qu'il en est de même de E_{i+1} et calculer x^{i+1} en fonction de x^i. Pour simplifier les notations, nous poserons, pour tout processus U de $\underline{\underline{D}}$, $D_i U = (U - U^{T_i})^{T_{i+1}-}$.

L'équation $X = H^{T_i} + FX_- \cdot M^{T_i}$ a, dans $\underline{\underline{S}}^2$, une solution et une seule Y^i, qui vaut $X^i + (\Delta H_{T_i} + FX^i_{T_i -}\Delta M_{T_i}) I_{[\![T_i,\infty[\![}$, et dont la norme y^i est majorée par $x^i + 2h + ax^i m$ (inégalité (6)). Comme toute solution X de E_{i+1} doit doit vérifier $X^{T_i} = Y^i$ sur $[\![0,T_{i+1}[\![$, le changement d'inconnue $Z = X - (Y^i)^{T_{i+1}-}$ transforme E_{i+1} en l'équation

$$Z = D_i H + F(Y^i + Z)_- \cdot D_i M \quad .$$

Celle-ci s'écrit, en posant $G^i = F(Y^i + \cdot) - FY^i$,

$$Z = (D_i H + FY^i_- \cdot D_i M) + G^i Z_- \cdot D_i M \quad .$$

Puisque G^i est dans Lip(a) avec $G^i 0 = 0$, et que $\|D_i M\|_{\underline{\underline{H}}^\infty} \leq \frac{1}{6a}$, le lemme 1 permet de résoudre cette équation: Elle admet, dans $\underline{\underline{S}}^2$, une solution Z^i et une seule, de norme $z^i \leq 2 \| D_i H + FY^i_- \cdot D_i M \|_{\underline{\underline{S}}^2} \leq 2(2h + 3ay^i \frac{1}{6a}) = 4h + y^i$ (inégalités (4) et (5)).

On en conclut que l'équation E_{i+1} admet, dans $\underline{\underline{S}}^2$, une solution et une seule, $X^{i+1} = Z^i + (Y^i)^{T_{i+1}-}$, de norme

$$x^{i+1} \leq z^i + y^i \leq 4h + 2y^i \leq 8h + 2(1+am)x^i \quad .$$

En itérant ceci de $i = 0$ à $k-1$, on obtient, en tenant compte de $x^0 = 0$, que E_k a, dans $\underline{\underline{S}}^2$, une solution et une seule, X^k, dont la norme vérifie

$$x^k \leq 8\,\frac{(2+2am)^k - 1}{1+2am}\,h \quad .$$

Il reste à remarquer que, puisque $M = M^{T_k-}$, l'équation $X = H + FX_-\cdot M$ a, dans $\underline{\underline{S}}^2$, une solution et une seule, $X = X^k + H - H^{T_k-}$; sa norme est majorée par $x^k + 2h$, d'où le lemme, avec $b = 2 + 8\,\frac{(2+2am)^k - 1}{1+2am}$. ▬

EXISTENCE, UNICITE, STABILITE.

THEOREME 1 (Doléans-Dade, Protter). Soient H dans $\underline{\underline{D}}$, M dans $\underline{\underline{SM}}$, F dans $Lip(a)$ pour un $a > 0$. L'équation $X = H + FX_-\cdot M$ admet, dans $\underline{\underline{D}}$, une solution et une seule.

Démonstration. En réécrivant l'équation sous la forme

$$X = (H + FO_-\cdot M) + GX_-\cdot M$$

on se ramène à étudier le cas où $FO = 0$.

On choisit des temps T arbitrairement grands tels que H^{T-} soit dans $\underline{\underline{S}}^2$ et M^{T-} dans $D(\frac{1}{12a})$. On peut alors résoudre dans $\underline{\underline{S}}^2$, à l'aide du lemme précédent, chacune des équations ${}^TX = H^{T-} + F({}^TX)_-\cdot M^{T-}$. Grâce à l'unicité dans $\underline{\underline{S}}^2$, les solutions sont compatibles: il existe un processus càdlàg adapté X tel que, pour chaque T, $X^{T-} = {}^TX$. Ceci fournit une solution de l'équation.

Si Y est une autre solution, il existe des temps d'arrêt S arbitrairement grands tels que $(X-Y)^{S-}$ soit borné. Les temps $R = \inf(S,T)$ sont arbitrairement grands; X^{R-} et Y^{R-} sont solutions dans $\underline{\underline{S}}^2$ de l'équation en Z $Z = H^{R-} + FZ_-\cdot M^{R-}$. Mais (proposition 1) M^{R-} est dans $D(\frac{1}{6a})$. L'unicité dans le lemme 2 donne $X^{R-} = Y^{R-}$, d'où, en fin de compte, $X = Y$. ▬

LEMME 3. Soient a et c deux réels positifs. On considère l'équation E: $X = H + FX_-\cdot M$ et la suite d'équations E_n: $X^n = H^n + F^nX^n_-\cdot M^n$. On suppose que

1) H et, pour tout n, H^n sont dans $\underline{\underline{S}}^2$ (respectivement $\underline{\underline{H}}^2$); H^n tend vers H dans $\underline{\underline{S}}^2$ (respectivement $\underline{\underline{H}}^2$);

2) F *et, pour tout* n, F^n *sont dans* $\mathrm{Lip}(a)$; *pour tout* $Z \in \mathbf{D}$ *et tout* $n \in \mathbb{N}$, $(F^n Z)^* \leq c$; $F^n X$ *tend vers* FX *dans* $\mathbf{S}^2$ (*où* X *est la solution de* E);

3) $M \in D(\frac{1}{6a})$; *pour tout* n, M^n *est dans* $\mathbf{H}^2$; M^n *tend vers* M *dans* $\mathbf{H}^2$.

Alors la solution X^n *de l'équation* E_n *converge vers* X *dans* $\mathbf{S}^2$ (*respectivement* $\mathbf{H}^2$).

Démonstration. Posons

$$K^n = (FX - F^n X)_- \cdot M + F^n X^n_- \cdot (M - M^n) \quad ,$$

$$G^n(\cdot) = F^n X - F^n(X - \cdot) \quad .$$

Les semimartingales K^n sont dans $\mathbf{H}^2$ et tendent vers zéro dans $\mathbf{H}^2$, puisque

$$\|K^n\|_{\mathbf{H}^2} \leq \|FX - F^n X\|_{\mathbf{S}^2} \|M\|_{\mathbf{H}^\infty} + \|F^n X^n\|_{\mathbf{S}^\infty} \|M - M^n\|_{\mathbf{H}^2}$$

(inégalités (3) et (2)) et que les $F^n X^n$ sont uniformément bornés. D'autre part, pour tout n, G^n est dans $\mathrm{Lip}(a)$ et nul en 0.

L'identité

$$X - X^n = H - H^n + (FX - F^n X)_- \cdot M + (F^n X - F^n X^n)_- \cdot M + F^n X^n_- \cdot (M - M^n)$$

montre que $X - X^n$ est la solution de l'équation E', où Z est l'inconnue:

$$Z = (H - H^n + K^n) + G^n Z_- \cdot M \quad ;$$

le lemme fondamental entraîne donc $\|X - X^n\|_{\mathbf{S}^2} \leq b \, \|H - H^n + K^n\|_{\mathbf{S}^2}$, où b ne dépend pas de n. On en déduit que, si H^n tend vers H dans $\mathbf{S}^2$, X^n tend vers X dans $\mathbf{S}^2$, et la première assertion du lemme est établie.

Si, en outre, H et les H^n sont dans $\mathbf{H}^2$, X et les X^n sont des semimartingales; FX et les $F^n X^n$ étant bornés et M et les M^n étant dans $\mathbf{H}^2$, X et les X^n sont dans $\mathbf{H}^2$. Dans le cas où H^n tend vers H dans $\mathbf{H}^2$, l'équation E' entraîne

$$\|X - X^n\|_{\mathbf{H}^2} \leq \|H - H^n\|_{\mathbf{H}^2} + \|K^n\|_{\mathbf{H}^2} + a \, \|X - X^n\|_{\mathbf{S}^2} \|M\|_{\mathbf{H}^\infty}$$

(inégalités (3) et (5) avec $G^n 0 = 0$), et l'on voit que X^n tend vers X non seulement dans $\mathbf{S}^2$, mais aussi dans $\mathbf{H}^2$. ∎

THEOREME 2. *Soit* $a > 0$. *On considère l'équation* E: $X = H + FX_- \cdot M$ *et la suite d'équations* E_n: $X^n = H^n + F^n X^n_- \cdot M^n$, *où* H *et les* H^n *sont dans* $\mathbf{D}$ (*respectivement dans* $\mathbf{SM}$), F *et les* F^n *dans* $\mathrm{Lip}(a)$ *et* M *et les* M^n *dans* $\mathbf{SM}$.

<u>On suppose que</u> H^n <u>tend vers</u> H <u>dans</u> $\underline{\underline{D}}$ (<u>respectivement</u> $\underline{\underline{SM}}$), <u>que</u> F^nX <u>tend vers</u> FX <u>dans</u> $\underline{\underline{D}}$ <u>et que</u> M^n <u>tend vers</u> M <u>dans</u> $\underline{\underline{SM}}$.

<u>Alors</u> X^n <u>tend vers</u> X <u>dans</u> $\underline{\underline{D}}$ (<u>respectivement</u> $\underline{\underline{SM}}$).

Les théorèmes 1 et 2 donnent un résultat un peu plus fin que le théorème 0 annoncé au début: on n'exige pas que F^nZ tende vers FZ pour tout $Z \in \underline{\underline{D}}$, mais seulement pour la solution X de l'équation E (cette amélioration est due à Meyer).

<u>Démonstration</u>. La règle du jeu est simple: compte tenu de la proposition 1 et du théorème 2 de [3], il s'agit, par arrêt à T- et par extraction d'une sous-suite, de se ramener au cas où les hypothèses du lemme 3 sont réalisées; par identification de la limite le théorème sera alors établi. Nous utiliserons les opérateurs de troncation $B^x \in \mathrm{Lip}(1)$ définis pour $x \geq 0$ par

$B^xX \;=\; \inf[x\,,\,\sup(-x,X)]$.

Par arrêt, on peut se ramener au cas où $|FX|$ est borné par un réel c, H et H^n sont dans $\underline{\underline{S}}^2$ (respectivement $\underline{\underline{H}}^2$), M est dans $D(\frac{1}{12a})$ et M^n tend vers M dans $\underline{\underline{H}}^2$. On considère la nouvelle équation

$$Y^n \;=\; H^n \;+\; B^{a+c+1}F^nY^n_-\cdot M^n \quad ;$$

grâce au lemme 3, Y^n tend vers X dans $\underline{\underline{S}}^2$ (respectivement $\underline{\underline{H}}^2$). Par extraction d'une sous-suite, on se ramène maintenant au cas où $(Y^n-X)^*$ et $(F^nX-FX)^*$ tendent vers zéro p.s. Posons

$$T_k \;=\; \inf\,\{\; t \geq 0\colon\, \exists m \geq k \;\; |Y^m_t - X_t| \,+\, |F^mX_t - FX_t| \,\geq\, 1\;\} \quad .$$

Les T_k forment une suite croissante de temps d'arrêt telle que $P\{T_k=\infty\} \to 1$. Par arrêt à T_k-, on peut supposer que, pour n assez grand ($n \geq k$), $(Y^n-X)^*$ et $(F^nX-FX)^*$ sont bornés par 1. (Toutes les autres propriétés ci-dessus restent vraies, à ceci près que M n'est plus nécessairement dans $D(\frac{1}{12a})$ mais dans $D(\frac{1}{6a})$; l'emploi du lemme 3 est encore justifié.) Nous écrivons maintenant

$$\begin{aligned} |F^nY^n| \;&\leq\; |F^nY^n - F^nX| \;+\; |F^nX - FX| \;+\; |FX| \\ &\leq\; a\,(Y^n-X)^* \;+\; (F^nX-FX)^* \;+\; (FX)^* \;\leq\; a+1+c \quad . \end{aligned}$$

Donc $B^{a+c+1}F^nY^n = F^nY^n$, et Y^n est la solution de $Y^n = H^n + F^nY^n_-\cdot M^n$; d'où, toujours pour n assez grand, $Y^n = X^n$, ce qui permet de conclure. ▬

COROLLAIRE. L'exponentiation de Doléans-Dade, qui à $M \in \underline{\underline{SM}}$ fait correspondre la solution de l'équation $X_t = 1 + M_0 + \int_{]0,t]} X_{s-}\, dM_s$, est continue de $\underline{\underline{SM}}$ dans $\underline{\underline{SM}}$.

RESOLUTION APPROCHEE

Dans [4] figure un résultat de résolution approchée de l'équation de Doléans-Dade et Protter par la méthode des différences finies. Nous allons nous intéresser à la méthode des itérations successives, et généraliser un résultat qui n'est donné dans [4] que dans le cas particulier de l'équation exponentielle.

THEOREME 3. On considère l'équation $X = H + FX_-\cdot M$, où H est dans $\underline{\underline{D}}$, F dans Lip(a) et M dans $\underline{\underline{SM}}$. Pour tout $Y^0 \in \underline{\underline{D}}$, la suite (Y^n) de processus de $\underline{\underline{D}}$ définie par la relation $Y^{n+1} = H + FY^n{}_-\cdot M$ converge dans $\underline{\underline{D}}$ vers la solution X de l'équation. Plus précisément, $X - Y^n$ tend vers 0 dans $\underline{\underline{SM}}$.

Le théorème 3 justifie la définition de la topologie de $\underline{\underline{SM}}$: il fournit des suites pour lesquelles $\underline{\underline{SM}}$ est un cadre naturel de convergence.

Démonstration. Par arrêt, on se ramène au cas où Y^0 est borné, où M est découpée en tranches plus petites que $\alpha = \frac{1}{10a}$ par une suite de temps d'arrêt $0 = T_0 \leq \dots \leq T_k$, et où $H = H^{T_k-}$. Posons $m = \sup(\|M\|_{\underline{\underline{H}}^\infty}, 3\alpha)$.

Les processus $V^n = X - Y^n$ vérifient l'équation

$$V^n = (Y^{n+1} - Y^n) + G^n V^n{}_-\cdot M ,$$

où $G^n \in \mathrm{Lip}(a)$ est la fonctionnelle $F(\cdot + Y^n) - FY^n$. Le lemme fondamental donne $\|V^n\|_{\underline{\underline{S}}^2} \leq b\, \|Y^{n+1} - Y^n\|_{\underline{\underline{S}}^2}$, où b ne dépend pas de n. Nous allons établir que $Y^{n+1} - Y^n$ tend vers zéro dans $\underline{\underline{S}}^2$. La première partie du théorème en découlera, et la seconde résultera de

$$\|Y^{n+1} - X\|_{\underline{\underline{H}}^2} = \|(FY^n - FX)_-\cdot M\|_{\underline{\underline{H}}^2} \leq a\, \|Y^n - X\|_{\underline{\underline{S}}^2} \|M\|_{\underline{\underline{H}}^\infty} .$$

Soit donc Z^n le processus $Y^{n+1} - Y^n$; posons $z_i^n = \|(Z^n)^{T_i-}\|_{\underline{\underline{S}}^2}$ et, pour tout $U \in \underline{\underline{D}}$, $D_i U = (U - U^{T_i})^{T_{i+1}-}$. On a

$$z_{i+1}^{n+1} \leq z_i^{n+1} + \|\Delta Z_{T_i}^{n+1}\|_{L^2} + \|D_i Z^{n+1}\|_{\underline{\underline{S}}^2} \quad .$$

Mais les Z^n vérifient la relation de récurrence $Z^{n+1} = G^n Z^n_- \cdot M$, d'où

$$\Delta Z_{T_i}^{n+1} = G^n Z^n_{T_i-} \Delta M_{T_i} \quad ; \quad D_i Z^{n+1} = G^n Z^n_- \cdot D_i M \quad .$$

Les inégalités (6) et (4) permettent d'établir la relation de récurrence

$$z_{i+1}^{n+1} \leqq z_i^{n+1} + a\, z_i^n\, m + 3\, a\, z_{i+1}^n\, \alpha \quad .$$

Pour terminer la démonstration, nous allons montrer que cette relation implique la convergence vers zéro de z_k^n ($= \|Z^n\|_{\underline{\underline{S}}^2}$) quand n tend vers l'infini. Posons $p = am$, $q = 3a\alpha = \frac{3}{10} \leqq p$ (définition de m), $v_i^n = 3^{n+2i}\, p^i\, q^{n-i}$. Avec ces notations, la suite double v_i^n satisfait une relation de récurrence analogue à celle vérifiée par z_i^n, mais dans l'autre sens:

$$v_i^{n+1} + pv_i^n + qv_{i+1}^n = (3q + p + 9p)v_i^n < 27pv_i^n = v_{i+1}^{n+1} \quad .$$

Soit alors c un réel tel que, pour tout i de 0 à k, on ait $z_i^0 \leqq cv_i^0$. Comme z_0^n est nul, la relation $z_i^n \leqq cv_i^n$ a lieu pour tous les couples (n,i) tels que $n = 0$ ou $i = 0$. D'autre part, si elle a lieu pour (n,i), (n,i+1) et (n+1,i),

$$z_{i+1}^{n+1} \leqq z_i^{n+1} + pz_i^n + qz_{i+1}^n \leqq c(v_i^{n+1} + pv_i^n + qv_{i+1}^n) \leqq cv_{i+1}^{n+1} \quad ,$$

et elle a lieu pour le couple (n+1,i+1). Elle a donc lieu pour tous les couples (n,i) tels que $0 \leq i \leq k$ et en particulier pour les couples (n,k):

$$z_k^n \leqq c\, 3^{n+2k}\, (am)^k\, (3/10)^{n-k} = c\, (30am)^k\, (9/10)^n \quad ,$$

et z_k^n tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini. ▬

CAS OU LA CONSTANTE DE LIPSCHITZ a DEPEND DE ω

La définition de Lip(a) peut être généralisée en y remplaçant la constante a par une variable aléatoire:

THEOREMES 1', 2', 3'. Les théorèmes 1, 2 et 3 restent vrais lorsque l'on y substitue au réel a une variable aléatoire $a(\omega)$ $\underline{\underline{F}}$-mesurable finie p.s.

Démonstration. On emploie la méthode de localisation de Lenglart ([5]). Rappelons que si (Ω_k) est une suite d'événements non négligeables de $\underline{\underline{F}}$ de réunion Ω, en appelant P_k la probabilité P conditionnée par l'événement Ω_k,

1) tout processus $M \in \underline{\underline{D}}$ qui est une semimartingale pour chaque P_k est une semimartingale pour P (théorème de Jacod et Meyer, [9]);

2) si une suite (M^n) de semimartingales tend vers une même limite M dans tous les espaces $\underline{\underline{SM}}(P_k)$ simultanément, la convergence a aussi lieu dans $\underline{\underline{SM}}(P)$ (proposition 7 de [3]).

En appliquant ceci à $\Omega_k = \{\omega: a(\omega) \leq k\}$ (non négligeable pour k assez grand), et en utilisant le fait ([5]) que les intégrales stochastiques conservent la même valeur lorsqu'on les calcule pour P_k, les théorèmes 1', 2' et 3' se déduisent immédiatement des théorèmes 1, 2 et 3. ■

REFERENCES

[1] C. DOLEANS-DADE. On the existence and unicity of solitions of stochastic integral equations. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 36, 93-101, 1976.

[2] C. DOLEANS-DADE et P.A. MEYER. Equations différentielles stochastiques. Séminaire de Probabilités XI, p. 581.

[3] M. EMERY. Une topologie sur l'espace des semimartingales. Dans ce volume.

[4] M. EMERY. Stabilité des solutions des équations différentielles stochastiques; application aux intégrales multiplicatives. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 41, 241-262, 1978.

[5] E. LENGLART. Sur la localisation des intégrales stochastiques. Séminaire de Probabilités XII, p. 53.

[6] M. METIVIER et J. PELLAUMAIL. On a stopped Doob's inequality and general stochastic equations. Rapport interne N° 28, Ecole Polytechnique de Paris, Fevrier 1978.

[7] P.A. MEYER. Inégalités de normes pour les intégrales stochastiques. Séminaire de Probabilités XII, p. 757.

[8] P.A. MEYER. Le théorème fondamental sur les martingales locales. Séminaire de Probabilités XI, p. 463.

[9] P.A. MEYER. Sur un théorème de C. Stricker.
Séminaire de Probabilités XI, p. 482.

[10] Ph. PROTTER. On the existence, uniqueness, convergence and explosions of solutions of systems of stochastic integral equations.
Ann. of Prob. 5, 243-261, 1977.

[11] Ph. PROTTER. Right-continuous solutions of systems of stochastic integral equations. J. Multivariate Analysis 7, 204-214, 1977.

[12] Ph. PROTTER. $\underline{\underline{H}}^p$-Stability of solutions of stochastic differential equations.
Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 44, 337-352, 1978.

IRMA (L.A. au C.N.R.S.)
7 rue René Descartes
F-67084 STRASBOURG-Cedex