SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

MICHEL ÉMERY

Une topologie sur l'espace des semimartingales

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 13 (1979), p. 260-280
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1979__13__260_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités

UNE TOPOLOGIE SUR L'ESPACE DES SEMIMARTINGALES

par M. EMERY

L'étude de la stabilité des solutions des équations différentielles stochastiques a conduit Protter à énoncer dans [9] un résultat de continuité des solutions par rapport à la convergence des semimartingales au sens local dans $\underline{\underline{H}}^p$. Mais cette convergence ne provient pas d'une topologie, et cela alourdit les énoncés: il faut extraire des sous-suites. Dans cet exposé, nous munirons l'espace des semimartingales d'une topologie métrisable liée aux convergences localement dans $\underline{\underline{H}}^p$, dont nous montrerons qu'elle est complète, et qu'elle est conservée par quelques-unes des opérations qui agissent sur les semimartingales. Nous réservons pour un exposé ultérieur des résultats (inspirés de ceux de Protter) de stabilité des solutions des équations différentielles stochastiques par rapport à cette topologie.

ESPACES $\underline{\underline{D}}$ ET $\underline{\underline{S}}^p$; CONVERGENCE COMPACTE EN PROBABILITE.

Tous les processus seront définis sur un même espace filtré vérifiant les conditions habituelles $(\Omega,\underline{\underline{F}},P,(\underline{\underline{F}}_t)_{t\geq 0})$; deux processus indistinguables seront considérés comme égaux. On notera $\underline{\underline{T}}$ l'ensemble des temps d'arrêt, $\underline{\underline{D}}$ l'ensemble des processus càdlàg adaptés, $\underline{\underline{SM}}$ celui des semimartingales.

DEFINITION. <u>Pour</u> $X\in\underline{\underline{D}}$, <u>on pose</u>

$$r_{cp}(X) = \sum_{n>0} 2^{-n}\, E[\,1\wedge \sup_{0\leq t\leq n}|X_t|\,] \quad ,$$

<u>et on appelle</u> distance de la convergence compacte en probabilité <u>la distance sur</u> $\underline{\underline{D}}$, <u>bornée par</u> 1, <u>donnée par</u> $d_{cp}(X,Y) = r_{cp}(X-Y)$.

Dans la suite, par abus de langage, nous désignerons aussi par $\underline{\underline{D}}$ l'espace topologique ainsi obtenu. Les instants constants n qui apparaissent dans la définition de d_{cp} peuvent être remplacés par des temps d'arrêt:

Pour qu'une suite (X^n) converge dans $\underline{\underline{D}}$ vers une limite X, il faut et il suffit qu'il existe des temps d'arrêt T_k qui croissent vers l'infini p.s. et tels que, sur chaque intervalle $[\![0,T_k[\![$, X^n tende vers X uniformément en probabilité.

Pour $X \in \underline{\underline{D}}$ et $T \in \underline{\underline{T}}$, on définit de nouveaux processus de $\underline{\underline{D}}$ par

$$X_t^* = \sup_{s \leq t} |X_s| \quad ,$$

$$X^T \;=\; X\, I_{[\![0,T]\!]} \;+\; X_T\, I_{]\!]T,\infty[\![} \quad \text{(arrêt à T)} ,$$

$$X^{T-} \;=\; X\, I_{[\![0,T[\![} \;+\; X_{T-}\, I_{[\![T,\infty[\![} \quad \text{(arrêt à T-)} ;$$

par convention, $X_{0-} = 0$ et $X^{T-} = 0$ sur $\{T=0\}$. L'arrêtée à T ou à T- d'une semimartingale est une semimartingale. Le mot <u>localement</u> peut avoir deux sens, suivant que l'on s'intéresse à des phénomènes ayant lieu sur des intervalles stochastiques fermés ou ouverts à droite. Ici, sauf dans l'expression <u>martingale locale</u> et sauf mention du contraire, nous dirons qu'une propriété a lieu <u>localement</u> s'il existe des intervalles stochastiques $[\![0,T_n[\![$ qui croissent vers $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ et sur lesquels la propriété a lieu. Par exemple, tout processus X de $\underline{\underline{D}}$ est localement borné (prendre $T_n = \inf\{t: |X_t| \geq n\}$). On peut même dire mieux ([2]):

LEMME 1. <u>Soit (X^n) une suite de processus càdlàg adaptés. Il existe des temps d'arrêt T_m qui croissent vers l'infini tels que chacun des processus $(X^n)^{T_m-}$ soit borné</u>.

<u>Démonstration</u>. Posons $S_k^n = \inf\{t: |X_t^n| \geq k\}$. Pour chaque n, $(S_k^n)_{k \geq 0}$ est une suite de temps d'arrêt qui croît vers l'infini. Il existe donc un entier $k(n,p)$ tel que $P(S^n_{k(n,p)} < p) < 2^{-n-p}$. Posons $T_m = \inf\limits_{n \geq 1, p \geq m} S^n_{k(n,p)}$. Pour chaque n, T_m est majoré par $S^n_{k(n,m)}$, donc $(X^n)^{T_m -}$ est borné. D'autre part, la suite T_m est évidemment croissante. Sa limite est infinie, car

$$P(T_m < m) \;\leq\; \sum_{n \geq 1, p \geq m} P(T^n_{k(n,p)} < m)$$

$$\leq\; \sum_{n \geq 1, p \geq m} P(T^n_{k(n,p)} < p) \;\leq\; 2^{-m+1} \quad . \blacksquare$$

Meyer a déduit de ce lemme le résultat suivant (qui ne sera pas utilisé dans la suite):

COROLLAIRE. Soit (X^n) une suite dans $\underline{\underline{D}}$. Il existe alors des réels strictement positifs c_n tels que la série $\Sigma c_n X_n$ (et même la série $\Sigma c_n |X_n|$) converge dans $\underline{\underline{D}}$.

Démonstration. D'après le lemme, il existe des temps T_m croissant vers l'infini et tels que, pour tout n, $a_m^n = \sup |X^n| I_{[\![0,T_m[\![}$ soit fini. Posons maintenant $c_n = 1/(2^n a_n^n)$. Pour chaque m, on a, sur $[\![0,T_m[\![$,

$$\forall n \geq m \quad c_n |X^n| \leq c_n a_m^n \leq c_n a_n^n \leq 2^{-n} ,$$

d'où, toujours sur $[\![0,T_m[\![$, la convergence uniforme de la série $\Sigma c_n |X^n|$. Il est alors clair que les limites ainsi obtenues pour chaque m se recollent en un processus $Y \in \underline{\underline{D}}$. ∎

Remarque: Une autre démonstration, moins directe mais pouvant s'étendre à $\underline{\underline{SM}}$, déduit ce résultat de ce que $\underline{\underline{D}}$ et $\underline{\underline{SM}}$ sont des e.v.t. complets (voir plus loin).

DEFINITION. Soit $1 \leq p < \infty$.

a) On appelle $\underline{\underline{S}}^p$ l'espace de Banach des processus $X \in \underline{\underline{D}}$ tels que

$$\|X\|_{\underline{\underline{S}}^p} = \|X_\infty^*\|_{L^p} < \infty .$$

b) On dit qu'une suite (X^n) de processus de $\underline{\underline{D}}$ converge localement dans $\underline{\underline{S}}^p$ vers $X \in \underline{\underline{D}}$ s'il existe des temps d'arrêt T_m qui croissent vers l'infini et tels que, pour chaque m, $\|(X^n-X)^{T_m-}\|_{\underline{\underline{S}}^p}$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini.

Remarquons que, s'il en est ainsi, le lemme 1 permet, quitte à diminuer les T_m, de les choisir tels que, de plus, X^{T_m-} et tous les $(X^n)^{T_m-}$ soient dans $\underline{\underline{S}}^p$.

La topologie de $\underline{\underline{D}}$ est liée aux convergences localement dans $\underline{\underline{S}}^p$ par le résultat suivant, dont une démonstration figure dans [3], et qui illustre la souplesse de l'arrêt à T–.

PROPOSITION 1. Soient $1 \leq p < \infty$, (X^n) une suite dans $\underline{\underline{D}}$, X un élément de $\underline{\underline{D}}$.

a) Si la suite (X^n) converge vers X dans $\underline{\underline{D}}$, il en existe une sous-suite qui converge vers X localement dans $\underline{\underline{S}}^p$.

b) Si la suite (X^n) converge vers X localement dans $\underline{\underline{S}}^p$, elle converge vers X dans $\underline{\underline{D}}$.

Cette proposition sera d'un usage constant dans la suite: elle fournit une caractérisation de la topologie de $\underline{\underline{D}}$ parfois plus maniable que la distance d_{cp}. On peut la reformuler ainsi: Pour que X^n converge vers X dans $\underline{\underline{D}}$, il faut et il suffit que, de toute sous-suite $X^{n'}$, on puisse extraire une sous-sous-suite $X^{n''}$ qui converge vers X localement dans $\underline{\underline{S}}^p$. Elle entraîne en particulier que les convergences localement dans $\underline{\underline{S}}^p$ dépendent moins de p que l'on ne pourrait le croire: si une suite converge localement dans $\underline{\underline{S}}^p$, on peut en extraire une sous-suite qui, pour tout q fini, converge localement dans $\underline{\underline{S}}^q$ vers la même limite.

Avant d'en venir aux semimartingales, mentionnons encore deux propriétés de l'espace $\underline{\underline{D}}$. La topologie de $\underline{\underline{D}}$ ne change pas si l'on substitue à P une probabilité équivalente (car la convergence en probabilité n'en est pas affectée). Enfin, $\underline{\underline{D}}$ est complet:

PROPOSITION 2. <u>L'espace métrique</u> $(\underline{\underline{D}},d_{cp})$ <u>est complet</u>.

<u>Démonstration</u>. Soit X^n le terme général d'une série dans $\underline{\underline{D}}$ telle que la série $\sum_n r_{cp}(X^n)$ converge. Nous allons établir que $\sum_n X^n$ converge dans $\underline{\underline{D}}$. Pour tout t entier, la série $\sum_n E[1\wedge(X^n)^*_t]$ converge, donc les sommes partielles de la série $\sum_n (X^n)^*_t$ forment une suite de Cauchy pour la convergence en probabilité. On en déduit que, hors d'un ensemble évanescent, la série $\sum_n (X^n)^*$ converge vers un processus croissant $A\in\underline{\underline{D}}$. Posons $T_k = \inf\{t\geq 0\colon A_t\geq k\}$. La série des $(X^n)^{T_k-}$ converge, pour tout k, dans l'espace complet $\underline{\underline{S}}^1$, puisque

$$\sum_n \|(X^n)^{T_k-}\|_{\underline{\underline{S}}^1} = \sum_n \|(X^n)^*_{T_k-}\|_{L^1} = \sum_n E[(X^n)^*_{T_k-}] \leq k < \infty .$$

Soit Y^k sa somme. Les processus Y^k se recollent en un processus Y, et la convergence de $\sum_n X^n$ vers Y a lieu localement dans $\underline{\underline{S}}^1$, donc dans $\underline{\underline{D}}$. ∎

ESPACE $\underline{\underline{SM}}$; CONVERGENCE DES SEMIMARTINGALES

Le but de ce paragraphe est de munir l'espace $\underline{\underline{SM}}$ des semimartingales d'une topologie qui soit en un sens compatible avec l'intégration stochastique: elle ne devra pas seulement prendre en compte les valeurs M_t prises par les semimartingales, mais aussi, en quelque sorte, les accroissements infinitésimaux dM_t.

DEFINITION. Pour $M \in \underline{\underline{SM}}$, on pose

$$r_{sm}(M) = \sup_{|X| \leq 1} r_{cp}(X \cdot M) ,$$

où le sup porte sur l'ensemble des processus prévisibles bornés par 1. On appelle topologie des semimartingales la topologie sur $\underline{\underline{SM}}$ définie par la distance bornée par 1 $d_{sm}(M,N) = r_{sm}(M-N)$.

Ici et dans la suite, le point symbolise l'intégration stochastique:

$$(X \cdot M)_t = \int_0^t X_s \, dM_s \quad .$$

Comme pour $\underline{\underline{D}}$, nous appellerons encore $\underline{\underline{SM}}$ l'espace topologique ainsi obtenu.

La topologie de $\underline{\underline{SM}}$ est très forte, plus forte encore que la topologie de la convergence compacte en probabilité (prendre X=1 dans la définition de r_{sm}). Si, par exemple, Ω ne comporte qu'un seul point, les semimartingales sont les mesures de Radon sur $\mathbb{R}_+$, et la convergence des semimartingales s'identifie à la convergence des mesures en norme sur tout compact. Remarquons cependant que pour les processus indépendants du temps, les topologies de $\underline{\underline{D}}$ et $\underline{\underline{SM}}$ s'identifient à la convergence en probabilité.

LEMME 2. La distance d_{sm} fait de $\underline{\underline{SM}}$ un espace vectoriel topologique.

Démonstration. Soient λ un réel et M une semimartingale. Si $|\lambda| \leq 1$, il est clair sur la définition de r_{sm} que $r_{sm}(\lambda M) \leq r_{sm}(M)$. On en déduit que, pour λ quelconque, $r_{sm}(\lambda M) \leq r_{sm}(|\lambda|M) \leq (1+e(\lambda))r_{sm}(M)$, où $e(\lambda)$ est la partie entière de $|\lambda|$ (utiliser l'inégalité triangulaire).

Soient maintenant (λ_n) une suite de réels et (M^n) une suite de semimartingales, de limites respectives λ et M. Il s'agit de vérifier que $\lambda_n M^n$ tend vers λM. On écrit

$$r_{sm}(\lambda_n M^n - \lambda M) \leq r_{sm}(\lambda_n(M^n - M)) + r_{sm}((\lambda_n - \lambda)M).$$

Le premier terme est majoré par $\sup_m (1+e(\lambda_m))r_{sm}(M^n - M)$, et tend donc vers zéro. Il reste à voir que, pour M fixée, $r_{sm}(\mu_n M)$ tend vers zéro si les réels μ_n tendent vers zéro. Mais si l'on avait $\overline{\lim_n}\, r_{sm}(\mu_n M) > \varepsilon > 0$, il existerait des processus prévisibles X^n bornés par 1 tels que $\overline{\lim_n}\, r_{cp}(X^n \cdot \mu_n M) > \varepsilon$, donc que $\overline{\lim_n}\, r_{cp}(\mu_n X^n \cdot M) > \varepsilon$. Or ceci est incompatible avec le lemme suivant, qui achève donc la démonstration.

SOUS-LEMME. Soit M une semimartingale. L'application linéaire $X \longmapsto X\cdot M$ est continue de l'espace des processus prévisibles bornés (muni de la convergence uniforme) dans $\underline{\underline{D}}$.

Démonstration. Nous utilisons l'espace $\underline{\underline{H}}^2$ de semimartingales (voir [6]). Il existe des temps d'arrêt T arbitrairement grands pour lesquels M^{T-} est dans $\underline{\underline{H}}^2$. On écrit l'inégalité (démontrée dans [6])

$$\|(X\cdot M)^{T-}\|_{\underline{\underline{S}}^2} = \|X\cdot(M^{T-})\|_{\underline{\underline{S}}^2} \leq 3\,\|X^*_\infty\|_{L^\infty}\,\|M^{T-}\|_{\underline{\underline{H}}^2} \quad ,$$

et on en déduit que si des processus prévisibles X^n tendent vers zéro uniformément, les $X^n\cdot M$ tendent vers zéro localement dans $\underline{\underline{S}}^2$, donc dans $\underline{\underline{D}}$. ■

Passons maintenant à une propriété importante de l'espace $\underline{\underline{SM}}$:

THEOREME 1. L'espace $\underline{\underline{SM}}$ est complet.

Démonstration. Soit (M^n) une suite de Cauchy pour d_{sm}. Pour tout processus X prévisible borné, $(X\cdot M^n)$ est une suite de Cauchy dans l'espace complet $\underline{\underline{D}}$. Appelons J(X) sa limite, et posons $M = J(1)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe k tel que, pour $n \geqq k$, $r_{sm}(M^n - M^k) < \varepsilon$; il existe $\eta \leqq 1$ tel que, pour tout processus prévisible X borné par η, $r_{cp}(X\cdot M^k) < \varepsilon$ (il s'agit simplement du sous-lemme ci-dessus appliqué à la semimartingale M^k). On en déduit, toujours pour X prévisible borné par η, que, pour $n \geqq k$,

$$\begin{aligned} r_{cp}(X\cdot M^n) &\leqq r_{cp}(X\cdot(M^n - M^k)) + r_{cp}(X\cdot M^k) \\ &\leqq r_{sm}(M^n - M^k) + r_{cp}(X\cdot M^k) < 2\varepsilon \quad , \end{aligned}$$

d'où, à la limite, $r_{cp}(J(X)) \leqq 2\varepsilon$. L'application linéaire J est continue de l'espace des processus prévisibles bornés muni de la convergence uniforme dans $\underline{\underline{D}}$; d'autre part, elle coïncide, sur les processus prévisibles élémentaires $I_{A\times]s,t]}$ (où $A \in \underline{\underline{F}}_s$), avec l'intégration stochastique par rapport à M. Un théorème de Dellacherie et Mokobodzki ([11]) permet alors d'affirmer que M est une semimartingale, et que J(X) vaut $X\cdot M$ pour tout X prévisible borné.

Posons $N^n = M^n - M$. Nous savons que, pour tout X prévisible borné, $X\cdot N^n$ tend vers zéro dans $\underline{\underline{D}}$. Pour achever la démonstration, il suffit d'établir que N^n tend vers zéro dans $\underline{\underline{SM}}$, c'est-à-dire que la limite, soit 4a, de la suite de Cauchy dans $\mathbb{R}_+$ $r_{sm}(N^n)$, est nulle. Si elle ne l'est pas, il existe un entier m tel que, pour tout $n \geq m$, $r_{sm}(N^n - N^m) < a$; on en tire

$$r_{sm}(N^m) > r_{sm}(N^n) - a ,$$

et, à la limite, $r_{sm}(N^m) \geq 3a$. Il existe alors X prévisible borné par 1 tel que $r_{cp}(X \cdot N^m) \geq r_{sm}(N^m) - a \geq 2a$. On peut maintenant écrire, pour $n \geq m$,

$$\begin{aligned} r_{cp}(X \cdot N^n) &\geq r_{cp}(X \cdot N^m) - r_{cp}(X \cdot (N^m - N^n)) \\ &\geq 2a - r_{sm}(N^m - N^n) \geq 2a - a = a . \end{aligned}$$

Ainsi, $X \cdot N^n$ ne tend pas vers zéro dans $\underline{\underline{D}}$, ce qui est absurde. ■

ESPACES $\underline{\underline{H}}^p$ DE SEMIMARTINGALES

Soit $1 \leq p < \infty$; si N est une martingale locale et A un processus à variation finie, on pose

$$j^p(N,A) = \| [N,N]_\infty^{\frac{1}{2}} + \int_0^\infty |dA_s| \|_{L^p} .$$

Rappelons que $\underline{\underline{H}}^p$ désigne l'espace des semimartingales M telles que

$$\|M\|_{\underline{\underline{H}}^p} = \inf_{M=N+A} j^p(N,A)$$

est finie (l'inf porte sur toutes les décompositions de M en une martingale locale N et un processus à variation finie A). Toute semimartingale de $\underline{\underline{H}}^p$ est spéciale. Comme nous ne nous intéressons qu'aux exposants p finis, on obtient une norme équivalente en prenant simplement $j^p(\overline{N},\overline{A})$, où $M = \overline{N} + \overline{A}$ est la décomposition canonique de M (sur tout ceci, voir [6]).

LEMME 3. <u>Soit</u> $1 \leq p < \infty$. <u>L'espace</u> $\underline{\underline{H}}^p$ <u>est un espace de Banach</u>.

<u>Démonstration</u>. D'après ce qui précède, $\|M\| = \|\overline{N}\|_{\underline{\underline{H}}^p} + \|\overline{A}\|_{\underline{\underline{A}}^p}$ est une norme équivalente à la norme $\underline{\underline{H}}^p$, où $\overline{N} + \overline{A}$ est la décomposition canonique de M et où $\underline{\underline{A}}^p$ est l'espace des processus prévisibles à variation dans L^p (muni de la norme $\|A\|_{\underline{\underline{A}}^p} = \| \int_0^\infty |dA_s| \|_{L^p}$). Il est classique que l'espace $\underline{\underline{H}}^p$ des martingales est complet. Il reste à vérifier que $\underline{\underline{A}}^p$ l'est aussi.

Lorsque p = 1, $\underline{\underline{A}}^p$ s'identifie à l'espace des P-mesures bornées sur la tribu prévisible (avec la norme des mesures), d'où le résultat. Pour p quelconque, soit (A^n) une suite dans $\underline{\underline{A}}^p$ telle que $\sum_n \|A^n\|_{\underline{\underline{A}}^p} < \infty$. La série $\sum_n A_n$ converge dans $\underline{\underline{A}}^1$ vers une limite A, et, lorsque m tend vers l'infini, la v.a. $\sum_{n\geq m} \int_0^\infty |dA_s|$, qui tend vers zéro dans L^1 en restant dominée par la v.a. de L^p $\sum_n \int_0^\infty |dA_s^n|$, tend aussi vers zéro dans L^p: $\sum_n A_n$ converge donc vers A dans $\underline{\underline{A}}^p$. ■

On peut remarquer, avec Yor, que ce résultat est aussi une conséquence immédiate du théorème 4 de [10].

Pour énoncer la proposition 1, il a fallu donner un sens à la notion de convergence localement dans $\underline{\underline{S}}^p$. Les lignes qui suivent visent à introduire la convergence localement dans $\underline{\underline{H}}^p$, en montrant en particulier (lemme 4 b) que les deux définitions naturelles de cette convergence sont équivalentes.

DEFINITION. <u>Soit</u> $1 \leq p < \infty$, <u>et soit</u> T <u>un temps d'arrêt</u>. <u>On appelle</u> $\underline{\underline{H}}^p(T-)$ <u>l'espace des semimartingales</u> M <u>pour lesquelles</u>

$$\|M\|_{\underline{\underline{H}}^p(T-)} = \inf_{L^{T-}=M^{T-}} \|L\|_{\underline{\underline{H}}^p}$$

<u>est fini, où l'inf porte sur toutes les semimartingales</u> L <u>qui coincident avec</u> M <u>sur</u> $[\![0,T[\![$.

LEMME 4. <u>Soient</u> $1 \leq p < \infty$, $T \in \underline{\underline{T}}$, $M \in \underline{\underline{SM}}$. <u>Alors</u>

a) $\|M^T\|_{\underline{\underline{H}}^p} \leq \|M\|_{\underline{\underline{H}}^p}$; $\|M^{T-}\|_{\underline{\underline{H}}^p} \leq 2\,\|M\|_{\underline{\underline{H}}^p}$;

b) $\|M\|_{\underline{\underline{H}}^p(T-)} \leq \|M^{T-}\|_{\underline{\underline{H}}^p} \leq 2\,\|M\|_{\underline{\underline{H}}^p(T-)}$;

c) $\|M\|_{\underline{\underline{H}}^p(T-)} = \inf_{M=N+A} j^p(N^T, A^{T-})$.

Dans le c), l'inf porte sur les décompositions de M en une martingale locale et un processus à variation finie A; remarquer l'arrêt à T de N et à T- de A. Le b) entraîne en particulier que si $\|M\|_{\underline{\underline{H}}^p(T-)} = 0$, M est nulle sur $[\![0,T[\![$.

<u>Démonstration</u>. a) La première inégalité résulte de $j^p(N^T,A^T) \leq j^p(N,A)$; la seconde de $\|M^T - M^{T-}\|_{\underline{\underline{H}}^p} \leq j^p(0, M^T - M^{T-}) = \|\Delta M_T\|_{L^p} \leq \|M\|_{\underline{\underline{H}}^p}$.

b) La première inégalité est évidente, la seconde résulte de

$$\|M^{T-}\|_{\underline{\underline{H}}^p} = \inf_{L^{T-}=M^{T-}} \|L^{T-}\|_{\underline{\underline{H}}^p} \leq 2 \inf_{L^{T-}=M^{T-}} \|L\|_{\underline{\underline{H}}^p} .$$

c) Soit $M = N + A$ une décomposition de M, et notons Σ l'ensemble des processus de la forme $\varphi\, I_{[\![T,\infty[\![}$, où φ est une v.a. $\underline{\underline{F}}_T$-mesurable ($T$ est toujours le temps d'arrêt fixé dans l'énoncé). On peut alors écrire la suite d'égalités, dont la première est une conséquence du a):

$$\begin{aligned}
\|M\|_{\underline{\underline{H}}^p(T-)} &= \inf_{L^{T-}=M^{T-}} \|L^T\|_{\underline{\underline{H}}^p} = \inf_{B\in\Sigma} \|M^T + B\|_{\underline{\underline{H}}^p} \\
&= \inf_{B\in\Sigma} \inf_{M^T=N+A} j^p(N, A+B) \\
&= \inf_{B\in\Sigma} \inf_{M=N+A} j^p(N^T, A^T+B) \\
&= \inf_{M=N+A} \inf_{B\in\Sigma} \left\| \, [N,N]_T^{\frac{1}{2}} + \int_0^{T-} |dA_s| + |\Delta(A+B)_T| \, \right\|_{L^p} \\
&= \inf_{M=N+A} \left\| \, [N,N]_T^{\frac{1}{2}} + \int_0^{T-} |dA_s| \, \right\|_{L^p} \quad . \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

L'analogue, pour les semimartingales, du lemme 1 est le résultat suivant:

LEMME 5. <u>Soit</u> (M^n) <u>une suite de semimartingales</u>. <u>Il existe des temps d'arrêt</u> T_k <u>croissant vers l'infini tels que</u>, <u>pour tout</u> n <u>et tout</u> k, $M^n \in \underline{\underline{H}}^p(T_k)$.

(Pour une analogie complète avec le lemme 1, il faudrait vérifier — et cela ne présente aucune difficulté — que c'est encore vrai pour p infini.)

<u>Démonstration</u>. Une conséquence du théorème de Doléans-Dade et Yen ([7]) est que toute semimartingale se décompose en une martingale locale à sauts bornés par 1 et un processus à variation finie. On choisit une telle décomposition $N^n + A^n$ de chaque semimartingale M^n, et il ne reste alors qu'à choisir (grâce au lemme 1) les T_k tels que, sur $[\![0,T_k[\![$, les processus $[N^n,N^n]$ et $\int_0^{\cdot}|dA_s^n|$ soient tous bornés. Comme le saut en T de $[N^n,N^n]$ est borné par 1, le lemme 4 c) permet de conclure que chaque M^n est dans $\underline{\underline{H}}^p(T_k-)$. $\blacksquare$

DEFINITION. <u>Soit</u> $1 \leq p < \infty$. <u>On dit qu'une suite</u> (M^n) <u>de semimartingales</u> converge localement dans $\underline{\underline{H}}^p$ <u>vers</u> $M \in \underline{\underline{SM}}$ <u>s'il existe des temps d'arrêt</u> T_k <u>croissant vers l'infini tels que</u>, <u>pour tout</u> k, $\|M^n - M\|_{\underline{\underline{H}}^p(T_k-)}$ <u>tende vers zéro</u>.

Nous pouvons maintenant énoncer, pour les semimartingales, une propriété semblable à la proposition 1 pour les processus càdlàg:

THEOREME 2. Soient $1 \leq p < \infty$, (M^n) une suite de semimartingales, M une semimartingale.

a) Si la suite (M^n) converge vers M dans $\underline{\underline{SM}}$, il en existe une sous-suite qui converge vers M localement dans $\underline{\underline{H}}^p$.

b) Si la suite (M^n) converge vers M localement dans $\underline{\underline{H}}^p$, elle converge vers M dans $\underline{\underline{SM}}$.

Comme pour la proposition 1, les deux assertions de l'énoncé peuvent se regrouper en une condition nécessaire et suffisante de convergence dans $\underline{\underline{SM}}$.

La démonstration du théorème fait appel à deux lemmes. Le premier démontrera le théorème lorsque $\underline{\underline{SM}}$ est muni d'une autre distance; nous verrons ensuite qu'elle est équivalente à d_{sm}.

LEMME 6. Si, pour $M \in \underline{\underline{SM}}$, on pose

$$r^p(M) = \inf_{M=N+A} \left[\sup_{T \in \underline{\underline{T}}} \|\Delta N_T\|_{L^p} + r_{cp}([N,N]^{\frac{1}{2}} + \int |dA_s|) \right] ,$$

la quantité $d^p(M,N) = r^p(M-N)$ est une distance sur $\underline{\underline{SM}}$, et le théorème 2 est vrai lorsque la distance d_{sm} sur $\underline{\underline{SM}}$ y est remplacée par la distance d^p.

Démonstration.

1) La fonction r^p est à valeurs finies (et même ≤ 1). En effet, on peut (théorème de Doléans-Dade et Yen: [7]) choisir une décomposition $N+A$ de M telle que les sauts de N soient bornés par ε, et r_{cp} est bornée par 1.

2) L'inégalité triangulaire résulte facilement de

$$[N+N',N+N']^{\frac{1}{2}} \leq [N,N]^{\frac{1}{2}} + [N',N']^{\frac{1}{2}} .$$

3) Avant de finir de vérifier que d^p est une distance, montrons que si $r^p(M^n - M)$ tend vers zéro, une sous-suite $(M^{n'})$ de (M^n) tend vers zéro localement dans $\underline{\underline{S}}^p$. Grâce au lemme 5, on peut, par translation, se ramener au cas où $M=0$. Il existe alors des décompositions $N^n + A^n$ de M^n telles que

$$\sup_{T \in \underline{\underline{T}}} \|\Delta N^n_T\|_{L^p} + r_{cp}([N^n,N^n]^{\frac{1}{2}} + \int |dA_s|) \longrightarrow 0 .$$

La proposition 1 permet d'extraire une sous-suite (que nous noterons encore M^n) telle que $[N^n,N^n]^{\frac{1}{2}} + \int |dA^n_s|$ tende vers zéro localement dans $\underline{\underline{S}}^p$: pour des T arbitrairement grands, $[N^n,N^n]^{\frac{1}{2}}_{T-} + \int_0^{T-} |dA^n_s|$ tend vers zéro dans L^p.

On en déduit

$$\|M^n\|_{\underline{\underline{H}}^p(T-)} \leqq \| [N^n,N^n]_T^{\frac12} + \int_0^{T-}|dA_s^n| \|_{L^p}$$

$$\leqq \| [N^n,N^n]_{T-}^{\frac12} + \int_0^{T-}|dA_s^n| \|_{L^p} + \|\Delta N_T^n\|_{L^p} ,$$

donc M^n tend vers zéro dans $\underline{\underline{H}}^p(T-)$.

4) Pour montrer que d^p est une distance, il reste à vérifier qu'elle sépare les points. Mais si $r^p(M)=0$, le point 3) ci-dessus entraîne que la suite constante $M^n=M$ converge vers zéro dans $\underline{\underline{H}}^p(T-)$ pour des T arbitrairement grands; d'où $\|M\|_{\underline{\underline{H}}^p(T-)}=0$, et $M^{T-}=0$. Donc M est nulle.

5) Pour terminer la démonstration du lemme, il reste à voir que si M^n converge vers zéro localement dans $\underline{\underline{H}}^p$, $r^p(M^n)$ tend vers zéro. Soient t un entier et ε un réel strictement positifs. Il existe un temps d'arrêt T tel que $\|M^n\|_{\underline{\underline{H}}^p(T-)} \longrightarrow 0$ et assez grand pour que $P(T\leqq t)<\varepsilon$. On choisit une décomposition N^n+A^n de chaque semimartingale M^n telle que $j^p((N^n)^T,(A^n)^{T-})$ tende vers zéro; par recollement, on peut aussi la supposer choisie telle que les sauts de N^n sur $]\!]T,\infty[\![$ soient bornés par $1/n$ (théorème de Doléans-Dade et Yen).

Posons maintenant

$$B^n = [(N^n)^T,(N^n)^T]^{\frac12} + \int|d(A^n)_s^{T-}| ,$$

$$C^n = [N^n,N^n]^{\frac12} + \int|dA_s^n| .$$

La suite B^n tend vers zéro dans $\underline{\underline{S}}^p$, donc $r_{cp}(B^n)$ tend vers zéro; B^n-C^n étant nul sur $[\![0,T[\![$, $r_{cp}(B^n-C^n)$ est majoré par $\varepsilon+2^{-t}$ (définition de r_{cp}), et $\overline{\lim_n}\, r_{cp}(C^n) \leqq \varepsilon+2^{-t}$. D'autre part, $\sup_{S\in\underline{\underline{T}}} \|\Delta N_S^n\|_{L^p}$ tend vers zéro, car

$$\sup_{S\in\underline{\underline{T}}} \|\Delta N_S^n\|_{L^p} \leqq \sup_{S\leqq T} \|\Delta N_S^n\|_{L^p} + \sup_{S>T} \|\Delta N_S^n\|_{L^p}$$

$$\leqq \| [N^n,N^n]_T^{\frac12} \|_{L^p} + \frac1n .$$

De $r^p(M^n) \leqq r_{cp}(C^n) + \sup_S \|\Delta N_S^n\|_{L^p}$ (définition de r^p), on déduit alors que $\overline{\lim_n}\, r^p(M^n) \leqq \varepsilon+2^{-t}$, qui est arbitrairement petit. ∎

Avant de montrer que les distances d^p et d_{sm} sont équivalentes, ce qui achèvera la démonstration du théorème 2, un second lemme est consacré à l'étude de la distance d^p.

LEMME 7. La distance d^p fait de $\underline{\underline{SM}}$ un espace vectoriel topologique complet.

Démonstration. Pour montrer que d^p fait de $\underline{\underline{SM}}$ un e.v.t. (seule la continuité de $(\lambda,M) \longrightarrow \lambda M$ n'est pas évidente), on se ramène au cas de $\underline{\underline{H}}^p$ grâce au critère de convergence établi dans le lemme 6: une suite (M^n) tend vers M pour d^p si et seulement si de toute sous-suite $M^{n'}$, on peut extraire une sous-sous-suite $M^{n''}$ qui tend vers M localement dans $\underline{\underline{H}}^p$.

Passons maintenant à la complétude. Il s'agit, étant donnée une suite de Cauchy (M^n) pour d^p, d'en extraire une sous-suite qui converge. Quitte à la remplacer par une sous-suite, on peut supposer que $r^p(M^{n+1}-M^n) \leq 2^{-n-1}$, donc $M^{n+1}-M^n$ admet une décomposition N^n+A^n telle que, en posant

$$B^n = [N^n,N^n]^{\frac{1}{2}} + \int^{\cdot}|dA^n_s| \quad ,$$

on ait

$$\sup_{T\in\underline{\underline{T}}} \|\Delta N^n_T\|_{L^p} \leq 2^{-n} \quad ; \quad r_{cp}(B^n) \leq 2^{-n} \quad .$$

La série $\sum_n B^n$ est alors convergente dans l'espace complet $\underline{\underline{D}}$, et son reste, le processus croissant $R^n = \sum_{m\geq n} B^m$, tend vers zéro dans $\underline{\underline{D}}$. Il existe donc, d'après la proposition 1, des temps T_k croissant vers l'infini et une sous-suite $f(n)$ tels que $\lim_n \|R^{f(n)}_{T_k-}\|_{L^p} = 0$ pour tout k. Grâce au lemme 5, on peut, quitte à diminuer un peu les T_k, supposer que tous les M^n sont dans $\underline{\underline{H}}^p(T_k-)$. Le procédé diagonal de Cantor nous donne une sous-sous-suite $h(n)=g\circ f(n)$ telle que, pour tout k, $\sum_n \|R^{h(n)}_{T_k-}\|_{L^p} < \infty$.

On en tire, en omettant désormais l'indice k,

$$\sum_n \| \sum_{m=h(n)+1}^{m=h(n+1)} B^m_{T-} \|_{L^p} = \sum_n \|R^{h(n)}_{T-} - R^{h(n+1)}_{T-}\|_{L^p} < \infty \quad .$$

Comme $\|\Delta N^n_T\| \leq 2^{-n}$, on en déduit, puisque

$$\begin{aligned}
\|M^{h(n+1)}-M^{h(n)}\|_{\underline{\underline{H}}^p(T-)} &\leq j^p\Big(\sum_{h(n)+1}^{h(n+1)} (N^m)^T, \sum_{h(n)+1}^{h(n+1)} (A^m)^{T-} \Big) \\
&\leq \| \Sigma \, ([N^m,N^m]^{\frac{1}{2}}_T + \int_0^{T-}|dA^m_s|) \|_{L^p} \\
&\leq \| \Sigma \, ([N^m,N^m]^{\frac{1}{2}}_{T-} + \int_0^{T-}|dA^m_s|) + \Sigma|\Delta N^m_T| \, \|_{L^p} \\
&\leq \| \Sigma \, B^m_{T-} \|_{L^p} + 2^{-h(n)} \quad ,
\end{aligned}$$

que la série $\sum_n \|M^{h(n+1)} - M^{h(n)}\|_{\underline{\underline{H}}^p(T-)}$ est convergente.

La sous-suite $(M^{h(n)})$ est donc de Cauchy dans $\underline{\underline{H}}^p(T-)$, et les semimartingales $(M^{h(n)})^{T-}$ forment une suite de Cauchy dans $\underline{\underline{H}}^p$. Quand T croît vers l'infini, les limites de ces suites se recollent en une même semimartingale M, et la convergence de $M^{h(n)}$ vers M a lieu localement dans $\underline{\underline{H}}^p$, donc (lemme 6) pour la distance d^p. ∎

Démonstration du théorème 2. (Le principe nous en a été suggéré par Dellacherie). Compte tenu du lemme 6, il ne reste qu'à vérifier que les distances d_{sm} et d^p sont équivalentes. Ces deux distances font chacune de $\underline{\underline{SM}}$ un espace vectoriel topologique complet, et elles sont plus fortes que la restriction à $\underline{\underline{SM}}$ de d_{cp} (pour d^p, cela résulte du lemme 6 et de la proposition 1, avec le fait que la norme $\underline{\underline{H}}^p$ est plus forte que la norme $\underline{\underline{S}}^p$). Soit $\delta = d^p + d_{sm}$. Toute suite de Cauchy pour δ est une suite de Cauchy pour d^p et d_{sm}, avec la même limite (car dans les deux cas, c'est la limite pour d_{cp}); elle est donc convergente pour δ, et δ fait aussi de $\underline{\underline{SM}}$ un espace vectoriel topologique complet. Le théorème du graphe fermé ([1]) permet alors d'affirmer que les distances comparables δ et d^p (respectivement δ et d_{sm}) définissent la même topologie, d'où, par transitivité, le résultat. ∎

ETUDE D'UN CONTRE-EXEMPLE

Avant de passer à l'étude des propriétés de la topologie de $\underline{\underline{SM}}$, donnons, à l'aide d'un exemple emprunté à Kazamaki ([4]), des propriétés qu'elle ne possède pas.

Soit, sur $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$, (T_n) une suite indépendante de v.a. de lois exponentielles d'espérances $E[T_n]=\mu_n$; on munit Ω de la plus petite filtration qui satisfasse aux conditions habituelles et fasse de chaque T_n un temps d'arrêt. On supposera que les μ_n croissent suffisamment vite vers l'infini pour que $S_n = \inf_{m\geq n} T_m$ tende vers l'infini (ceci a lieu dès que $\sum_n 1/\mu_n < \infty$). Soient A le processus croissant défini par $A_t = t$, et M^n la martingale obtenue en compensant un saut d'amplitude $-\mu_n$ à l'instant T_n:

$$M^n = A\, I_{[\![0,T_n[\![} + (T_n - \mu_n)\, I_{[\![T_n,\infty[\![} \quad .$$

Fixons n. Sur l'intervalle $[\![0,S_n[\![$, on a, pour $m \geq n$, $M^n = A$. Les martingales M^m tendent vers le processus croissant A dans $\underline{\underline{H}}^p(S_n-)$ pour chaque n, donc aussi dans $\underline{\underline{SM}}$.

Cet exemple permet de répondre par la négative à trois questions sur l'espace $\underline{\underline{SM}}$.

1) L'espace des martingales locales n'est pas fermé dans $\underline{\underline{SM}}$. (L'espace des processus à variation finie non plus: déjà dans l'espace $\underline{\underline{H}}^2$ des martingales, des processus à variation finie peuvent tendre vers une limite qui ne l'est pas.)

2) La décomposition canonique des semimartingales spéciales n'est pas une opération continue pour la topologie des semimartingales.

3) La quantité $r(M) = \inf_{M=N+B} r_{cp}([N,N]^{\frac{1}{2}} + \int |dB_s|)$, que l'on obtient en supprimant le terme de sauts dans la définition de r^p (voir le lemme 6), et dont on pourrait se demander si elle ne définit pas la même topologie que d^p et d_{sm}, n'est pas une distance: elle en sépare pas les points. En effet, toujours avec $A_t = t$, on peut écrire

$$r(A) \leqq r_{cp}([M^n,M^n]^{\frac{1}{2}} + \int |d(A-M^n)_s|) \quad .$$

Comme les processus $[M^n,M^n]$ et $A-M^n$ sont nuls sur $[\![0,S_n[\![$, ceci entraîne $r(A) = 0$, et la fonction r ne sépare pas A de 0.

QUELQUES RESULTATS DE CONTINUITE

Un théorème de stabilité dans $\underline{\underline{SM}}$ pour les équations différentielles stochastiques, qui constitue la principale application (et justification!) de la topologie de $\underline{\underline{SM}}$, sera démontré dans un prochain exposé; nous regroupons ici d'autres énoncés en relation avec cette topologie.

Dans l'énoncé qui suit, on suppose Y borné sur des intervalles <u>fermés</u> $[\![0,T_k]\!]$ (sinon, on ne saurait pas définir les intégrales stochastiques).

PROPOSITION 3. Soient X un processus prévisible, (X^n) une suite de processus prévisibles qui tendent vers X en restant dominés par un même processus (prévisible) Y localement borné. Alors, pour toute semimartingale M, les intégrales stochastiques $X^n\cdot M$ tendent vers $X\cdot M$ dans $\underline{\underline{SM}}$.

Démonstration. Le processus X étant dominé par Y, $X^n - X$ est dominé par $2Y$; on peut donc supposer que $X=0$. Par arrêt (à $T+$), on peut supposer que Y est une constante.

Soit alors $\varepsilon > 0$. Il existe une décomposition $N+A$ de M telle que les sauts de N sont plus petits que ε/Y. On écrit alors, pour un p quelconque,

$$r^p(X^n\cdot M) \;\leq\; r_{cp}(\,[X^n\cdot N, X^n\cdot N]^{\frac{1}{2}} + \int |X^n_s|\,|dA_s|\,) \;+\; \sup_T \;\|X^n_T\,\Delta N_T\|_{L^p} \;.$$

Le terme de sauts est plus petit que ε; il reste à vérifier que les processus $\int (X^n_s)^2 d[N,N]_s$ et $\int |X^n_s|\,|dA_s|$ tendent vers zéro dans $\underline{\underline{D}}$. Démontrons-le pour le premier, l'autre se traitant de manière analogue. Par arrêt (à $T-$), on peut supposer $[N,N]_\infty$ borné, auquel cas, par convergence dominée, les v.a. $\int_0^\infty (X^n_s)^2\, d[N,N]_s$ convergent vers zéro dans L^1. Les processus $\int (X^n_s)^2 d[N,N]_s$ tendent donc vers zéro dans $\underline{\underline{S}}^1$, et a fortiori dans $\underline{\underline{D}}$. ∎

PROPOSITION 4. L'application de $C^2 \times \underline{\underline{SM}}$ dans $\underline{\underline{SM}}$ qui à (f,M) fait correspondre $f\circ M$ est continue.

Dans cet énoncé, l'espace C^2 des fonctions deux fois continûment dérivables doit être muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de la fonction et de ses dérivées jusqu'à l'ordre 2. Cette proposition, ainsi que le lemme ci-dessous, se généralisent sans difficulté au cas vectoriel.

Voici un avatar de la formule du changement de variable:

LEMME 8. Soient f une fonction C^2, M une semimartingale. Alors

$$f(M_t) \;=\; f(M_0) \;+\; \int_0^t f'(M_{s-})\,dM_s \;+\; \int_0^t \Big(\int_0^1 x\,f''(M_s - x\Delta M_s)\,dx\Big)\, d[M,M]_s \,.$$

Démonstration. On décompose dans cette formule le processus croissant $[M,M]$ en sa partie continue $\langle M^c, M^c\rangle$ et sa partie de sauts $\Sigma\, \Delta M_s^2$. Nous laissons le lecteur vérifier que l'on retrouve ainsi le terme du second ordre et le terme de sauts de la formule usuelle. ∎

Démonstration de la proposition 4. Nous supposons que M^n tend vers M dans $\underline{\underline{SM}}$, et f_n vers f dans C^2. Nous voulons montrer que $f_n \circ M^n$ tend vers $f \circ M$ dans $\underline{\underline{SM}}$. Par identification de la limite, il suffit de le démontrer pour une sous-suite. D'autre part, la convergence dans $\underline{\underline{SM}}$ étant une notion locale, on a le droit de se restreindre à des intervalles $[\![0,T[\![$ arbitrairement grands.

Par arrêt à T−, nous supposons donc que M et $[M,M]$ sont bornées, et, quitte à extraire une sous-suite, que M^n tend vers M dans $\underline{\underline{H}}^2$ (et a fortiori dans $\underline{\underline{S}}^2$). Les v.a. $(M^n - M)^*_\infty$ tendent alors vers zéro dans L^2. Une nouvelle extraction de sous-suite les fait tendre vers zéro p.s. Les temps d'arrêt

$$T_k = \inf\{t \geqq 0 : \exists n \geqq k \quad |M^n_t - M_t| \geqq 1\}$$

tendent maintenant vers l'infini, et, en s'arrêtant à T_k- et en se restreignant à la sous-suite $(k,k+1,k+2,\dots)$ de $\mathbb{N}$, on est ramené au cas où toutes les M^n sont bornées par une même constante $c = \sup|M| + 1$. En multipliant f et les f_n par une même fonction C^2 à support compact qui vaut 1 sur $[-c,c]$, on peut supposer que f, f' et f" sont bornées et uniformément continues, et que f_n, f'_n et f''_n tendent vers f, f' et f" uniformément sur $\mathbb{R}$.

Nous allons maintenant établir la convergence de chacun des trois termes apparaissant dans la formule du lemme 8.

1^{er} terme: Comme f_n tend vers f uniformément et M^n_0 vers M_0 p.s., $f_n \circ M^n_0$ tend vers $f \circ M_0$ p.s. donc en probabilité.

2^{me} terme: En remarquant que

$$|f'_n \circ M^n - f' \circ M| \leqq \sup_{\mathbb{R}} |f'_n - f'| + \sup_{\mathbb{R}} |f''| \, |M^n - M| \quad ,$$

on obtient la convergence de $f'_n \circ M^n$ vers $f \circ M$ dans $\underline{\underline{S}}^2$, puis, grâce aux inégalités démontrées dans [6], que

$$\|f'_n \circ M^n_- \cdot M^n - f' \circ M_- \cdot M\|_{\underline{\underline{H}}^1}$$

$$\leqq \|f'_n \circ M^n - f' \circ M\|_{\underline{\underline{S}}^2} \|M^n\|_{\underline{\underline{H}}^2} + \|f' \circ M\|_{\underline{\underline{S}}^2} \|M^n - M\|_{\underline{\underline{H}}^2} \quad .$$

Ainsi, la convergence du 2^{me} terme a lieu dans $\underline{\underline{H}}^1$, donc dans $\underline{\underline{SM}}$.

3^{me} terme: Posons $N^n = M^n - M$, $X^n_t = f''_n(M^n_t - x\Delta M^n_t)$, $X_t = f''(M_t - x\Delta M_t)$.

La différence à étudier,

$$\int_0^t\int_0^1 x\, X_s^n\, dx\, d[M^n,M^n]_s \;-\; \int_0^t\int_0^1 x\, X_s\, dx\, d[M,M]_s \quad ,$$

se décompose en la somme $A_t + B_t$ de deux processus à variation finie, où

$$A_t \;=\; \int_0^t\int_0^1 x\, X_s^n\, dx\, d(2[M,N^n] + [N^n,N^n])_s \quad ,$$

$$B_t \;=\; \int_0^t\int_0^1 x\, (X_s^n - X_s)\, dx\, d[M,M]_s \quad .$$

Comme f_n'' converge uniformément vers la fonction bornée f'', la variation totale de A est majorée, à une constante près, par $2\int_0^\infty |d[M,N^n]|_s + [N^n,N^n]_\infty$. Mais, N^n tendant vers zéro dans $\underline{\underline{H}}^2$, $[N^n,N^n]_\infty$ tend vers zéro dans L^1, et, $[M,M]_\infty$ étant borné, l'inégalité de Kunita-Watanabe entraîne que $\int_0^\infty |d[M,N^n]_s|$ tend vers zéro dans L^2. Par conséquent, A tend vers zéro dans $\underline{\underline{H}}^1$, donc dans $\underline{\underline{SM}}$.

Passons à B. La converge uniforme de f_n'' vers la fonction uniformément continue et bornée f'' implique que, pour ω, x et s fixés, $X_s^n(\omega)$ tend vers $X_s(\omega)$ en restant borné (rappelons que $(M^n - M)_\infty^*$ tend vers zéro p.s.). Par convergence dominée, $[M,M]$ étant borné,

$$E\,[\, \int_0^\infty\int_0^1 x\, |X_s^n - X_s|\, dx\, d[M,M]_s \,]$$

tend vers zéro; il s'ensuit que $\int_0^\infty |dB_s|$ tend vers zéro dans L^1, et B tend vers zéro dans $\underline{\underline{H}}^1$ donc dans $\underline{\underline{SM}}$. ∎

Remarques. 1) Au cours de la démonstration, nous avons rencontré la continuité de l'application qui, à N, associe $[M,N]$. On vérifierait de même que $[M,N]$ et $\langle M^c,N^c\rangle$ dépendent continûment du couple (M,N), et que $[M,M]^{\frac{1}{2}}$ et $\langle M^c,M^c\rangle^{\frac{1}{2}}$ tendent vers zéro avec M. L'application linéaire $M \longmapsto M^c$ est donc continue de $\underline{\underline{SM}}$ dans $\underline{\underline{SM}}$.

2) Nous laissons le lecteur qui s'intéresserait aux intégrales multiplicatives stochastiques ([3]) démontrer que les applications qui à (f,M) associent $\int f(dM_s)$ et $\prod(1+f(dM_s))$ sont continues (f décrit l'espace des fonctions C^2 nulles en 0).

Nous allons maintenant étudier l'influence, sur la topologie de $\underline{\underline{SM}}$, de deux types de transformations qui laissent stable l'ensemble $\underline{\underline{SM}}$: les changements de temps et les changements de probabilité.

Rappelons qu'un changement de temps est un processus croissant brut C_t tel que, pour chaque t, C_t soit un temps d'arrêt. Nous noterons d'une barre l'opération de changement de temps: $\overline{X}_t = X_{C_t}$; $\overline{\underline{\underline{F}}}_t = \underline{\underline{F}}_{C_t}$; pour un temps d'arrêt T, $\overline{T} = \inf\{t : C_t \geq T\}$; $\overline{\underline{\underline{SM}}} = \underline{\underline{SM}}(\Omega,\underline{\underline{F}},P,(\overline{\underline{\underline{F}}}_t)_{t\geq 0})$; etc ...

PROPOSITION 5. <u>Soit</u> C_t <u>un changement de temps. L'application</u> $M \longmapsto \overline{M}$ <u>est continue de</u> $\underline{\underline{SM}}$ <u>dans</u> $\overline{\underline{\underline{SM}}}$.

<u>Démonstration</u>. On suppose que M^n converge vers M dans $\underline{\underline{SM}}$, et il s'agit, quitte à extraire une sous-suite, de vérifier que $\overline{M}^n$ converge vers $\overline{M}$ dans $\overline{\underline{\underline{SM}}}$. On peut supposer que la convergence de M^n vers M a lieu localement dans $\underline{\underline{H}}^1$: pour des temps d'arrêt T arbitrairement grands, $N^n = M^n - M$ tend vers zéro dans $\underline{\underline{H}}^1(T-)$. Le temps $\overline{T}$ tend vers l'infini avec T; en outre, en sous-entendant l'indice n,

$$(\overline{N})^{\overline{T}-} = \overline{N^{T-}} + (\overline{N}_{\overline{T}-} - N_{T-})\, I_{[\![\overline{T},\infty[\![}} \quad ,$$

de sorte que

$$\|\overline{N}\|_{\overline{\underline{\underline{H}}}^1(\overline{T}-)} \leq \|\overline{N^{T-}}\|_{\overline{\underline{\underline{H}}}^1} + 2\,\|N^{T-}\|_{\underline{\underline{S}}^1} \quad .$$

Puisque la norme $\underline{\underline{S}}^1$ est contrôlée par la norme $\underline{\underline{H}}^1$, il suffit, pour conclure, d'établir l'inégalité $\|\overline{X}\|_{\overline{\underline{\underline{H}}}^1} \leq c\,\|X\|_{\underline{\underline{H}}^1}$. Mais ceci résulte facilement du fait que les changements de temps conservent les martingales uniformément intégrables et du fait que la norme $\|M\| = \inf\limits_{M=L+A} E[L^*_\infty + \int_0^\infty |dA_s|]$ est équivalente à la norme $\underline{\underline{H}}^1$. ∎

PROPOSITION 6. a) <u>La topologie de</u> $\underline{\underline{SM}}$ <u>ne change pas lorsqu'on remplace</u> P <u>par une probabilité équivalente</u> Q.

b) <u>Plus généralement, si</u> Q <u>est absolument continue par rapport à</u> P, <u>la projection canonique de</u> $\underline{\underline{SM}}(P)$ <u>dans</u> $\underline{\underline{SM}}(Q)$ (<u>qui à toute semimartingale fait correspondre elle-même</u>) <u>est continue</u>.

<u>Démonstration</u>. a) On reprend exactement la démonstration du théorème 2: les topologies de $\underline{\underline{SM}}(P)$ et $\underline{\underline{SM}}(Q)$ sont toutes deux plus fortes que la topologie de $\underline{\underline{D}}$ (qui est la même pour P et Q); on en déduit que la distance $d^P_{sm} + d^Q_{sm}$ est complète, d'où le résultat.

b) Quitte à remplacer P par la probabilité équivalente $\frac{P+Q}{2}$, on peut supposer $Z_\infty = \frac{dQ}{dP}$ bornée. On notera Z_t la P-martingale $E[Z_\infty|\underline{\underline{F}}_t]$, $<Z,Z>$ le crochet prévisible de Z calculé pour P. Il existe des temps d'arrêt S qui croissent vers l'infini Q-p.s. tels que, sur $[\![0,S[\![$, $\frac{1}{Z}$ soit borné.

Soit M^n une suite de semimartingales convergeant vers zéro dans $\underline{\underline{SM}}(P)$. Nous cherchons à en extraire une sous-suite qui tende vers zéro dans $\underline{\underline{SM}}(Q)$. Quitte à remplacer M^n par une sous-suite, on peut trouver des temps d'arrêt R arbitrairement grands (pour P, donc aussi pour Q) tels que M^n tend vers zéro dans $\underline{\underline{H}}^4(R-;P)$. Les temps $T = \inf(R,S)$ sont arbitrairement grands pour Q et tels que M^n converge vers zéro dans $\underline{\underline{H}}^4(T-;P)$. Ecrivons la décomposition canonique $N^n + A^n$ de chaque $(M^n)^{T-}$ pour P.

Les v.a. $\int_0^T |dA_s^n|$ tendent vers zéro dans $L^4(P)$ donc dans $L^4(Q)$; ainsi, A^n tend vers zéro dans $\underline{\underline{H}}^4(Q)$, donc dans $\underline{\underline{SM}}(Q)$.

Pour vérifier que N^n tend aussi vers zéro dans $\underline{\underline{SM}}(Q)$, posons

$$B^n = \frac{1}{Z_-}\cdot<Z,N^n>$$

(où le crochet est calculé pour P). Le processus B^n est à variation finie, et est, comme N^n, arrêté à T. Le théorème de Girsanov-Lenglart([5]) dit que $(N^n - B^n) + B^n$ est pour Q la décomposition canonique de N^n. L'inégalité de Kunita-Watanabe entraîne

$$\left(\int_0^T |dB_s^n|\right)^2 \leqq <N^n,N^n>_T \cdot \int_0^T \frac{1}{Z_{s-}^2}\, d<Z,Z>_s \quad .$$

Comme N^n tend vers zéro dans $\underline{\underline{H}}^4(P)$, le premier facteur tend vers zéro dans $L^2(P)$ donc dans $L^2(Q)$; le second est borné dans $L^2(P)$, donc dans $L^2(Q)$. On en déduit que $\int_0^T |dB_s^n|$ tend vers zéro dans $L^2(Q)$, puis, à l'aide de l'inégalité

$$[N^n-B^n,N^n-B^n]_T^{\frac{1}{2}} \leqq [N^n,N^n]_T^{\frac{1}{2}} + \int_0^T |dB_s^n| \quad ,$$

que N^n tend vers zéro dans $\underline{\underline{H}}^2(Q)$ donc aussi dans $\underline{\underline{SM}}$. ∎

Donnons, pour finir, une dernière propriété, qui nous sera utile dans l'étude des équations différentielles. On sait, grâce à un théorème de Jacod et Meyer ([8]), que l'ensemble des lois de probabilité, sous lesquelles un processus donné $M \in \underline{\underline{D}}$ est une semimartingale, est dénombrablement convexe.

L'énoncé suivant, dans lequel on suppose toujours donné l'espace filtré $(\Omega,\underline{\underline{F}},P,(\underline{\underline{F}}_t)_{t\geq 0})$, montre que cela s'étend à la convergence des semimartingales:

PROPOSITION 7. Soient (M^n) une suite de semimartingales, M une semimartingale. Supposons donnée une suite (P_k) de probabilités telles que $\sum_k \lambda_k P_k = P$ (avec $\sum_k \lambda_k = 1$), et que, pour chaque k, M^n tende vers M dans $\underline{\underline{SM}}(P_k)$. Alors M^n tend vers M dans $\underline{\underline{SM}}(P)$.

Remarque: Le théorème de Jacod-Meyer permet d'affaiblir l'hypothèse: on pourrait supposer seulement que M^n et M sont des semimartingales pour les probabilités P_k.

Démonstration. On appellera Ω_k l'événement $\{dP_k/dP > 0\}$, et on notera d_k la distance d_{sm} calculée pour P_k.

Nous voulons montrer que $d_k(M^n-M) \to 0\ \forall k$ entraîne $d_{sm}(M^n-M) \to 0$. La réciproque étant vraie (proposition 6), il s'agit de vérifier que les topologies comparables définies sur $\underline{\underline{SM}}$ par les distances d_{sm} et $d = \sum_k 2^{-k} d_k$ sont les mêmes (d est bien une distance: elle sépare les points car elle est plus forte que $\sum_k d_{cp}^{P_k}$). Il suffit pour cela de vérifier que d est complète.

Soit donc N^n une suite de Cauchy pour d. Elle converge, pour chaque d_k, vers une semimartingale limite L^k. Mais, d_k étant plus forte que $d_{cp}^{P_k}$, il est clair que $L^k = L^{k'}$ sur $\Omega_k \cap \Omega_{k'}$. Le processus L qui, pour chaque k, coïncide avec L^k sur Ω_k est une semimartingale (théorème de Jacod et Meyer), et, comme $d_k(L,L^k) = 0$, L est limite pour chaque d_k, donc pour d, de la suite N^n. ■

REFERENCES

[1] N. BOURBAKI. Espaces vectoriels topologiques, chapitre 1. Hermann, Paris, 1966.

[2] Cl. DELLACHERIE. Quelques applications du lemme de Borel-Cantelli à la théorie des semimartingales. Séminaire de Probabilités XII, p.742.

[3] M. EMERY. Stabilité des solutions des équations différentielles stochastiques. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 41, 241-262, 1978.

[4] N.KAZAMAKI. Change of time, stochastic integrals, and weak martingales. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 22, 25-32, 1972.

[5] E. LENGLART. Transformation des martingales locales par changement absolument continu de probabilités. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 39, 65-70, 1977.

[6] P.A. MEYER. Inégalités de normes pour les intégrales stochastiques. Séminaire de Probabilités XII, p. 757.

[7] P.A. MEYER. Le théorème fondamental sur les martingales locales. Séminaire de Probabilités XI, p. 463.

[8] P.A. MEYER. Sur un théorème de C. Stricker. Séminaire de Probabilités XI, p. 482.

[9] Ph. PROTTER. $\underline{\underline{H}}^p$-Stability of solutions of stochastic differential equations. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 44, 337-352, 1978.

[10] M. YOR. Inégalités entre processus minces et applications. C. R. Acad. Sci. Paris, t. 286 (8 mai 1978).

[11] Théorème de Dellacherie-Mokobodzki. Dans ce volume.

IRMA (L.A. au C.N.R.S.)
7 rue René Descartes
F-67084 STRASBOURG-Cedex