Paul-André Meyer

Représentations multiplicatives de sousmartingales, d'après Azéma

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 13 (1979), p. 240-249
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1979__13__240_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1977/78

REPRESENTATIONS MULTIPLICATIVES DE SOUSMARTINGALES

d'après J. Azéma, par P.A. Meyer

1. Sur un espace probabilisé filtré $(\Omega,\underline{\underline{F}},P,(\underline{\underline{F}}_t))$ habituel, considérons une sousmartingale positive et continue à droite $Y=(Y_t)_{0\leq t\leq\infty}$. Soit (B_t) le processus croissant prévisible, nul en 0, pouvant sauter à l'infini, qui engendre la surmartingale $X_t=E[Y_\infty|\underline{\underline{F}}_t]-Y_t$; alors on a aussi $Y_t=E[U_t|\underline{\underline{F}}_t]$, où U est le processus $B_t+Y_\infty-B_\infty$, qui est croissant, mais non adapté, et non positif en général. Il est naturel de se demander si Y est projection optionnelle d'un processus croissant (C_t), également non adapté, mais positif, et majoré par Y_∞. C'est ce que l'on montre dans les articles [3] et [4], sous une forme explicite un peu bizarre. On est donc amené à se demander si les processus étranges que l'on construit ainsi peuvent être caractérisés par une propriété intrinsèque. Azéma vient de démontrer dans l'article [1], entre autres choses, qu'il en est bien ainsi. Nous nous proposons ici d'exposer le résultat d'Azéma dans le langage habituel de la théorie générale des processus, autrement dit, sans opérateurs de meurtre. Non pas que les opérateurs de meurtre présentent un inconvénient quelconque, mais simplement à titre d'exercice.

2. Nous allons commencer par une longue introduction, pour présenter les différentes notions. La plus ancienne présentation du sujet est celle de [3]. On y considère le cas particulier d'une sousmartingale Y telle que $Y_\infty=1$, et on y obtient une représentation de la surmartingale $X=1-Y$ sous la forme

(1) $$X_t = E[C_{\infty\infty}-C_{t\infty}|\underline{\underline{F}}_t] \qquad (C_{\infty\infty}=1)$$

où le processus croissant $(C_{t\infty})$, non adapté, est défini de la manière suivante. On désigne par B le processus croissant prévisible engendrant X, par $\dot{X}$ la projection prévisible de X. On sait qu'alors $\Delta B=X_--\dot{X}\leq 1-\dot{X}$. Pour tout couple (s,t) tel que $0\leq s<t\leq\infty$, on peut alors poser

(2) $$C_{st} = \exp\Big(-\int_{]s,t]}\frac{dB^c_u}{1-\dot{X}_u}\Big)\prod_{s<u\leq t}\Big(1-\frac{\Delta B_u}{1-\dot{X}_u}\Big)$$

où B^c est la partie continue de B. On convient que $C_{st}=1$ si $t\leq s$. Les propriétés suivantes sont, ou évidentes, ou établies dans [3],[4] :

(3a) $C_{st}C_{tu}=C_{su}$ si $s<t<u$, $C_{st}=1$ si $s\geq t$.

(3b) Pour tout s, $(C_{st})_t$ est un processus décroissant prévisible

(3c) Pour tout t, $(C_{st})_s$ est un processus croissant continu à droite (non adapté).

Une idée importante du travail d'Azéma consiste à déplacer l'attention du processus usuel $(C_{t\infty})_t$ qui intervient dans (1), vers le processus à deux indices (C_{st}). Nous poserons la définition suivante :

DEFINITION. Un processus (C_{st}) à deux indices satisfaisant aux propriétés (3) sera appelé système multiplicatif dans cet exposé (en abrégé, SM).

En toute rigueur, on devrait dire SM prévisible, mais nous n'en rencontrerons pas d'autre ici, et nous omettrons ce mot. Il va de soi que deux processus à deux indices (C_{st}) et (C'_{st}) sont dits indistinguables si, pour presque tout ω , on a identiquement $C_{\cdot\cdot}(\omega)=C'_{\cdot\cdot}(\omega)$; les assertions d'unicité ci-dessous seront à prendre en ce sens. On notera avec soin que le processus croissant (3b) n'est pas nécessairement continu à droite (ou à gauche) : nous y reviendrons.

Revenons à (1) . Au lieu de l'écrire sous cette forme, rappelons nous que $X=1-Y$, avec $Y_\infty=1$, et écrivons (1) de la manière suivante, qui jouera un grand rôle dans la suite

(4) $$E[C_{t\infty}Y_\infty|\underline{\underline{F}}_t] = Y_t$$

D'une manière générale, étant donnés un SM (C_{st}) et une sousmartingale positive (Y_t), nous dirons que ces deux processus sont associés si l'on a (4). Nous allons un peu renforcer cette propriété, de manière à éliminer le rôle particulier de l'infini. Le processus $(C_{t\infty}Y_\infty)$ étant continu à droite d'après (3c), majoré par Y_∞ puisque le SM est borné par 1, sa projection optionnelle est continue à droite, et (4) exprime qu'elle est égale à (Y_t). Autrement dit, pour tout t.a. T

(5) $$E[C_{T\infty}Y_\infty|\underline{\underline{F}}_T] = Y_T \quad (1)$$

Soit $s\in[0,\infty]$, et soit $R=T\vee s$. Dans la relation $E[C_{R\infty}Y_\infty|\underline{\underline{F}}_R]=Y_R$, multiplions les deux membres par C_{sR} , $\underline{\underline{F}}_R$-mesurable d'après (3b), remplaçons $C_{sR}C_{R\infty}$ par $C_{s\infty}$, conditionnons par $\underline{\underline{F}}_s$ en tenant compte à nouveau de (4). Il vient

(6) $$E[C_{sR}Y_R|\underline{\underline{F}}_s] = E[C_{s\infty}Y_\infty|\underline{\underline{F}}_s] = Y_s \quad \text{si } s\leqq R$$

Introduisons le nouveau SM
$$C'_{st}(\omega) = C_{s,t\wedge T(\omega)}(\omega)$$
(dit arrêté à T) et la sousmartingale $Y'=Y^T$ arrêtée à T. Nous avons $C'_{s\infty}=C_{sT}I_{\{s<T\}}+I_{\{s\geqq T\}} = C_{sR}I_{\{s<R\}}+I_{\{s\geqq R\}}$, et la relation (6) s'écrit
$$E[C'_{s\infty}Y'_s|\underline{\underline{F}}_s] = Y'_s$$
c'est à dire une relation de même forme que (4), exprimant que le SM arrêté (C'_{st}) est associé à la sousmartingale arrêtée Y'. Lorsque T est une constante t, nous avons simplement

1. Ainsi Y est projection optionnelle de $(C_{t\infty}Y_\infty)_t$, croissant et $\leqq Y_\infty$

(6') $\quad E[C_{st}Y_t|\underline{\underline{F}}_s] = Y_s$ si $s\leq t$.

Soit T un temps d'arrêt tel que $s\leq T\leq t$. De la même manière que nous avons établi (6) , nous déduisons de (6')

(6") $\quad E[C_{Tt}Y_t|\underline{\underline{F}}_T] = Y_T$

Multiplions des deux côtés par C_{sT} , qui est $\underline{\underline{F}}_T$-mesurable, et utilisons la relation $C_{sT}C_{Tt} = C_{st}$; il vient

(7) $\quad E[C_{st}Y_t|\underline{\underline{F}}_T] = C_{sT}Y_T$ si $s\leq T\leq t$ [1]

Le processus $(C_{st}Y_t)_{t\geq s}$ est donc une martingale optionnelle, qui satisfait au théorème d'arrêt. Elle est donc continue à droite, bien que le processus $(C_{st})_{t\geq s}$ ne soit pas continu à droite a priori.

3. Précisément, nous poursuivons cette description des SM en étudiant la continuité à droite des processus décroissants prévisibles $(C_{st})_t$.

Soient s et t tels que s<t, et supposons que $C_{s,t+}>0$. Choisissons v>t tel que $C_{sv}>0$, et écrivons que $C_{su}=C_{sv}/C_{uv}$ pour s<u<v. D'après (3c), $(C_{uv})_u$ est continu à droite, donc $(C_{su})_u$ est continu à droite au point t. Autrement dit, le processus prévisible $(C_{st})_t$ est "presque" continu à droite : il possède au plus un point où la continuité à droite est en défaut, et l'on a en ce point

$$s\leq t \ , \ C_{s,t+} > 0 \ , \ C_{st}>0 \ \text{[2]}$$

(cela peut se produire aussi pour t=s, avec $C_{ss}=1$,$C_{s,s+}=0$). Posons alors

$$D_s = \inf\{t>s : C_{st}=0\}$$

avec la convention que $\inf(\emptyset)=\infty^+>\infty$, un "second infini" que nous devons introduire du fait que nos processus sont indexés par $[0,\infty]$. Si r est un rationnel tel que $s<r<D_s$, on a $D_s=D_r$, donc la réunion des graphes $[D_s]$ est aussi la réunion des graphes $[D_r]$, r rationnel. Et l'ensemble des "points de discontinuité" ci-dessus peut être énuméré par les temps d'arrêt de la forme T_A , où $T=D_r$ (r rationnel) et $A=\{C_{r,D_r}>0\}$.

Voici un exemple de SM qui illustre bien le défaut de continuité à droite. Soit H un ensemble prévisible contenu dans $]0,\infty]$. Nous posons pour $0\leq s<t\leq\infty$

$$C_{st}(\omega)=0 \text{ si } H(\omega)\cap]s,t] \neq \emptyset \quad , \quad C_{st}=1 \text{ sinon}$$

(3a) et (3c) sont très faciles à vérifier. D'autre part, on a pour t>s

$$C_{st}(\omega) = I_{]s,\delta_s]\setminus H}(t,\omega) \ , \text{ avec } \delta_s(\omega)= \inf\{u>s : (u,\omega)\in H\}$$

et l'ensemble $]s,\delta_s]\setminus H$ est prévisible.

1. Inversement, cela entraîne (4) lorsque $t=\infty$, T=s.
2. Une petite étude séparée est nécessaire pour le cas s=t.

4. Nous démontrons rapidement le théorème d'existence, qui était déjà contenu dans [3] et [4] (au vocabulaire près).

THEOREME 1. Toute sousmartingale positive $(Y_t)_{0\leq t\leq\infty}$ admet un SM associé.

DEMONSTRATION. Nous désignons par B le processus croissant prévisible, nul en 0, pouvant sauter à l'infini, engendrant la surmartingale $X_t = E[Y_\infty | \underline{\underline{F}}_t]-Y_t$ $(X_\infty=0)$. Nous reprenons le processus (2) sous la forme plus générale

$$C_{st}= \exp(-\int_{]s,t]} \frac{dB^c_u}{\dot{Y}_u})\prod_{s<u\leq t}(1-\frac{\Delta B_u}{\dot{Y}_u})$$

On vérifie d'abord que les termes du produit sont tous ≤ 1, de sorte que cas v.a. sont bien définies. Ensuite, on raisonne dans le cas où Y est minorée par $\varepsilon>0$; il est alors évident que (C_{st}) est un SM. Posons $\mu_t=\exp(-\int_{]0,t]}\ldots)\prod_{0<u\leq t}(1-\ldots)$, de sorte que $C_{t\infty}=\mu_\infty/\mu_t$. La mesure $d\mu_t$ sur $]0,\infty]$ est prévisible, et $\frac{d\mu_t}{\mu_{t-}} = -\frac{dB_t}{\dot{Y}_t}$. Nous avons alors

$$E[C_{t\infty}Y_\infty|\underline{\underline{F}}_t] = \frac{1}{\mu_t}E[\mu_\infty Y_\infty|\underline{\underline{F}}_t] = \frac{1}{\mu_t}E[Y_\infty\mu_t+\int_t^\infty Y_\infty d\mu_s|\underline{\underline{F}}_t]$$

La mesure $d\mu_s$ étant prévisible, nous pouvons remplacer Y_∞ par n'importe quel processus ayant même projection prévisible. Or $E[Y_\infty|\underline{\underline{F}}_u]=E[B_\infty|\underline{\underline{F}}_u]+Y_s-B_s$, donc le processus $\dot{Y}_s+B_\infty-B_s$ possède cette propriété. Intégrant par parties, nous obtenons

$$\ldots = \frac{1}{\mu_t}E[Y_\infty\mu_t+\int_t^\infty\dot{Y}_sd\mu_s+\int_t^\infty(B_\infty-B_s)d\mu_s\;|\underline{\underline{F}}_t]$$
$$= \frac{1}{\mu_t}E[Y_\infty\mu_t+\int_t^\infty\dot{Y}_sd\mu_s+\int_t^\infty\mu_{s-}dB_s-(B_\infty-B_t)\mu_t\;|\underline{\underline{F}}_t]$$

les deux intégrales disparaissent, μ_t sort, et il reste $E[Y_\infty-B_\infty+B_t|\underline{\underline{F}}_t]=Y_t$.

Pour passer au cas général, nous remplaçons Y par $Y+\varepsilon$ (ce qui ne change pas B). Les processus correspondants (C^ε_{st}) tendent en décroissant vers (C_{st}) lorsque $\varepsilon\downarrow 0$, et les propriétés (3a, 3b,3c) passent bien à la limite, ainsi que la relation $E[C^\varepsilon_{t\infty}(Y_\infty+\varepsilon)|\underline{\underline{F}}_t] = Y_t+\varepsilon$.

5. Nous passons à l'unicité, qui est beaucoup plus délicate. Nous allons prouver d'abord un résultat partiel, amélioré plus loin (th.3).

THEOREME 2 . Soient (C_{st}) et $(\overline{C}_{st})$ deux SM associés à la même sousmartingale (Y_t). Alors les processus à deux indices $(C_{st}Y_t)$ et $(\overline{C}_{st}Y_t)$ sont indistinguables.

Il suffit de montrer que $C_{s\infty}Y_\infty=\overline{C}_{s\infty}Y_\infty$ p.s. pour s rationnel. En effet, en conditionnant par $\underline{\underline{F}}_t$ nous avons d'après (7) $C_{st}Y_t=\overline{C}_{st}Y_t$ p.s. pour $s\in\mathbb{Q}$, $t\in\mathbb{Q}$, $t>s$, puis pour $s\in\mathbb{Q}$, $t\in\mathbb{R}$, $t>s$ par continuité à droite (dernières lignes de 2), et enfin pour $s\in\mathbb{R}$, $t\in\mathbb{R}$ d'après (3c), puis (3a).

Ensuite, nous nous ramenons à traiter le cas où Y est comprise entre 0 et 1, avec $Y_\infty=1$. En effet, supposons le théorème 2 établi dans ce cas, et démontrons le dans le cas général. Introduisons la martingale $M_t=E[Y_\infty|\underline{\underline{F}}_t]$, et la loi $Q=Y_\infty P/E[Y_\infty]$. Il est bien connu que pour toute v.a. Z on a

$$E_Q[Z|\underline{\underline{F}}_t] = E_P[ZY_\infty|\underline{\underline{F}}_t]/M_t \quad Q\text{-p.s.}$$

La relation $E[C_{t\infty}Y_\infty|\underline{\underline{F}}_t]=Y_t$ entraîne donc

$$E_Q[C_{t\infty}|\underline{\underline{F}}_t] = Y_t/M_t \quad Q\text{-p.s.}$$

Introduisons la sousmartingale $Y'_t=Y_t/M_t$, $Y'_\infty=1$, pour la loi Q ; d'après le cas particulier admis plus haut, la relation $E_Q[C_{t\infty}|\underline{\underline{F}}_t]= E_Q[\overline{C}_{t\infty}|\underline{\underline{F}}_t]=Y'_t$ entraîne l'égalité Q-p.s. des v.a. $C_{s\infty}$ et $\overline{C}_{s\infty}$, i.e. l'égalité P-p.s. des v.a. $C_{s\infty}Y_\infty$ et $\overline{C}_{s\infty}Y_\infty$.

<u>On suppose donc que</u> $Y_\infty=1$ <u>dans la suite de la démonstration, et on pose</u> $X=1-Y$

LEMME 1. <u>Si la v.a.</u> $C_{0\infty}$ <u>est</u> >0 P-<u>p.s.</u>, <u>la relation</u>

(8) $$E[C_{t\infty}|\underline{\underline{F}}_t] = Y_t \quad (t>0)$$

<u>caractérise uniquement le processus</u> $(C_{t\infty})_t$.

DEMONSTRATION. Pour simplifier les notations, nous posons $C_{t\infty}=c_t$, $C_{0t}= m_t$. Le processus (m_t) est prévisible, et la relation $C_{0\infty}=m_tc_t$ nous donne

$$0 = m_{t-}dc_t+c_tdm_t$$

de sorte que la mesure $dc_t/c_t = -dm_t/m_{t-}$ est prévisible. Ecrivons la relation (8) sous la forme

$$E[1-c_t|\underline{\underline{F}}_t] = 1-Y_t = X_t = E[B_\infty-B_t|\underline{\underline{F}}_t]$$

Les processus croissants (c_t) et (B_t) ont donc même projection duale prévisible, et l'on a pour tout processus prévisible positif φ_s indexé par $]0,\infty]$

(*) $$E[\int_0^\infty \varphi_s dc_s] = E[\int_0^\infty \varphi_s dB_s]$$

Introduisons d'autre part la mesure prévisible $dA_s= \dot{Y}_s dc_s/c_s$. D'après (8), le processus $m_tY_t = E[C_{0\infty}|\underline{\underline{F}}_t]$ ne s'annule jamais, sa projection prévisible $m_t\dot{Y}_t$ non plus, et le processus $c_t/\dot{Y}_t$ a une projection prévisible égale à 1. On a donc

(**) $$E[\int_0^\infty \varphi_s dA_s] = E[\int_0^\infty \varphi_s \frac{c_s}{\dot{Y}_s} dA_s] = E[\int_0^\infty \varphi_s dc_s]$$

Rapprochant (*) de (**), nous voyons que dA=dB , donc (c_t) est tel que

$$dc_s/c_s = dB_s/\dot{Y}_s \quad \text{sur }]0,\infty] , \quad c_\infty=1$$

Cette équation a une solution unique sur $]0,\infty]$, et la valeur en 0 s'en déduit par continuité à droite.

LEMME 2 . <u>Soient</u> (C_{st}) <u>et</u> $(\overline{C}_{st})$ <u>deux SM associés à la même sousmartingale</u> Y, <u>avec</u> $Y_\infty=1$. <u>Supposons qu'il existe un temps d'arrêt</u> T <u>tel que</u>

- <u>pour</u> $t<T$, $C_{t\infty}=\overline{C}_{t\infty}=0$
- <u>pour</u> $t>T$, <u>sur</u> $\{T<\infty\}$, $C_{t\infty}>0$ <u>et</u> $\overline{C}_{t\infty}>0$

<u>Alors les processus</u> $(C_{t\infty})$ <u>et</u> $(\overline{C}_{t\infty})$ <u>sont indistinguables</u>.

DEMONSTRATION. On reprend le raisonnement précédent entre $T+\varepsilon$ et ∞. L'égalité s'étend à $[T,\infty]$ par continuité à droite, puis à gauche de T puisque tout y est nul. Nous ne donnerons pas les détails.

Voici l'idée de la fin de la démonstration : on pose

(9) $$L = \sup\{ s>0 : C_{s\infty}=0 \} \qquad (\sup \emptyset = 0)$$

On va montrer que L peut être caractérisé en termes de Y, autrement dit, que L est le même pour (C_{st}) et $(\overline{C}_{st})$. On voudrait appliquer le lemme 2 à L, mais L n'est pas un temps d'arrêt. Qu'à cela ne tienne : on va montrer que L est une << v.a. honnête >> , autrement dit la fin d'un ensemble optionnel, et adjoindre L comme temps d'arrêt à la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$, ce qui nous donnera une famille élargie $(\underline{\underline{G}}_t)$. Puis l'on montrera que les deux SM (C_{st}) et $(\overline{C}_{st})$ sont encore associés à la même sousmartingale relativement à la nouvelle famille $(\underline{\underline{G}}_t)$, et le lemme 2 permettra de conclure la démonstration.

<u>6</u>. Il nous reste donc à décrire de manière assez approfondie la manière dont un SM s'annule. A côté de L, nous introduirons les v.a.

(9') $$L_t = \sup\{ s>0 : C_{st}=0 \}$$

On a $L_s \leq L_t$ si $s\leq t$ (en particulier, $L_s \leq L_\infty = L$), et aussi $L_s \leq s$. D'autre part, L_t est $\underline{\underline{F}}_t$-mesurable.
Sur l'ensemble $\{L<t\}$, on a $C_{t\infty}>0$, donc les relations $C_{s\infty}=0$ et $C_{st}=0$ sont équivalentes pour $s<t$. Autrement dit, on a $L=L_t$ sur $\{L<t\}$, et comme L_t est $\underline{\underline{F}}_t$-mesurable, on tombe sur la définition des <u>v.a. honnêtes</u> (voir [2] par exemple). Il est connu (même réf.) qu'une v.a. est honnête si et seulement si elle est la fin d'un ensemble optionnel.

LEMME 3. <u>Le processus croissant</u> $(L_t)_{t>0}$ <u>est prévisible</u>.
DEMONSTRATION. Soit A^s l'ensemble prévisible $\{(t,\omega) : t>s, C_{st}(\omega)=0\}$. L'intersection des A^s pour s rationnel est un ensemble prévisible U, qui s'écrit $U=\{(t,\omega) : \forall s<t , C_{st}(\omega)=0\}$. Il est très facile de voir que
$$L_t = L_{t-}I_{U^c} + tI_U$$
qui est bien prévisible. En effet, si l'on a $L_{t-}<L_t$, soit $a\in]L_{t-},L_t[$;

Pour tout s tel que $a<s<t$ on a $C_{as}>0$ puisque $a>L_{s-}$, et $C_{at}=0$, donc $C_{st}=0$, donc $t\in U$, et $L_t=t$.

Le lemme suivant est le point crucial de la démonstration.

LEMME 4. Soit (C_{st}) un SM associé à Y, avec $Y_\infty=1$. Considérons les ensembles

$$H = \{(t,\omega) : t>0,\ Y_{t-}=0\}$$
(10)
$$\hat{H} = \{(t,\omega) : t>0,\ Y_{t-}=0 \text{ ou } Y_t=0 \}$$

Alors H est (à un ensemble évanescent près) le plus grand ensemble prévisible contenu dans $]0,L]$, $\hat{H}$ est de même le plus grand ensemble optionnel contenu dans $]0,L]$, et L est la fin de $\hat{H}$.

Pour tout processus prévisible $(\varphi_s)_{s>0}$ on a $E[\varphi_L c_{L\infty} I_{\{L>0\}}] = E[\int_0^\infty \varphi_s H_s dC_{s\infty}]$, où $(H_s)_{s>0}$ est l'indicatrice de H.

DEMONSTRATION. Nous écrivons $c_s=C_{s\infty}$. Nous démontrons successivement

1) H est à gauche de L : soit F la fin de H, soit $U_t=I_{\{t\geq F\}}$, soit (V_t) la projection duale prévisible de (U_t). On a $Y_t=E[c_t|\underline{\underline{F}}_t]$, et on en déduit que Y_- est projection prévisible de c_- . Alors

$$E[\int_0^\infty c_{s-}dV_s] = E[\int_0^\infty Y_{s-}dV_s] = E[\int_0^\infty Y_{s-}dU_s] = E[Y_{F-}I_{\{F>0\}}]=0$$

Donc la fonction c_{s-} est nulle p.p. pour la mesure dV_s . L'ensemble fermé à gauche $\{c_{s-}=0\}$ contient donc le support gauche Σ de dV_s ; Σ étant prévisible et portant dV_s porte aussi dU_s , donc contient $[F]$. Autrement dit, $[F]$ (graphe dans $]0,\infty]$) est contenu dans $]0,L]$, i.e. $F\leq L$, ce qu'on cherchait.

2) Soit J prévisible à gauche de L, alors $J\subset H$. Il suffit de montrer d'après le théorème de section prévisible, que pour tout temps prévisible T à valeurs dans $]0,\infty]$ on a $Y_{T-}=0$ p.s. sur $\{T\in J\}$. Or

$$E[Y_{T-},T\in J] = E[c_{T-},T\in J] = 0$$

puisque $c_-=0$ sur $J\subset]0,L]$.

3) En particulier, l'ensemble prévisible $\{ t : L_t=t\}$ (lemme 3) est à gauche de L, donc contenu dans H.

4) $\hat{H}$ est à gauche de L . Il suffit de montrer que $\hat{H}\setminus H$ est à gauche de L. Or $\hat{H}\setminus H$ est contenu dans une réunion dénombrable de graphes de t.a., et il suffit donc de montrer que , pour tout t.a. T, on a p.s. $T\leq L$ sur $\{T\in\hat{H}\setminus H\}$. Or c'est évident, car

$$E[c_T I_{\{T\in\hat{H}\setminus H\}}] = E[Y_T I_{\{T\in\hat{H}\setminus H\}}]=0$$

5) Soit K optionnel à gauche de L, alors $K\subset\hat{H}$. Il suffit de montrer que pour tout t.a. T à valeurs dans $]0,\infty]$, l'événement $A=\{T\in K\setminus H\}$ est p.s. contenu dans $\{T\in\hat{H}\}$. Or soit $\omega\in A$; puisque $T(\omega)=t\notin H$, nous avons $L_t<t$ d'après 3), donc il existe $s<t$ tel que $C_{st}>0$. Mais alors on a $C_{t\infty}=0$,

car le contraire entraînerait $C_{s\infty}=C_{st}C_{t\infty}>0$, absurde puisque $s<L$. Autrement dit, on a $c_T=0$ p.s. sur A, et alors

$$E[Y_T,A] = E[c_T,A] = 0$$

et $Y_T=0$ p.s. sur A .

6) L est une v.a. honnête, donc la fin d'un ensemble optionnel, donc la fin du plus grand ensemble optionnel situé à sa gauche, donc la fin de $\hat{H}$

7) Notons que H est fermé à gauche, $\hat{H}$ fermé, et $\hat{H}\backslash H$ est réunion de graphes de temps d'arrêt T_n . Le graphe d'un tel T_n est un optionnel situé à gauche de L, mais pas dans H, et il résulte de 5) ci-dessus que $C_{T_n}=0$. Autrement dit

Le graphe de L est situé dans $\hat{H}$, et là où il n'est pas dans H on a $c_L=0$.

Mais alors, comme la mesure dc_s est nulle sur $]0,L]$, on a pour tout processus $(\varphi_s)_{s>0}$ (prévisible ou non)

$$E[\varphi_L c_L I_{\{L>0\}}] = E[\int_0^\infty \varphi_s \hat{H}_s dc_s] = E[\int_0^\infty \varphi_s H_s dc_s]$$

où (H_s), $(\hat{H}_s)$ sont les indicatrices des ensembles correspondants.

Nous pouvons maintenant achever d'établir le théorème 2. Considérons deux SM (C_{st}) et $(\overline{C}_{st})$ tels que

$$Y_t = E[c_t|\underline{\underline{F}}_t] = E[\overline{c}_t|\underline{\underline{F}}_t] \quad , \text{ avec } c_t=C_{t\infty} \ , \ \overline{c}_t=\overline{C}_{t\infty}$$

Nous avons alors pour tout processus prévisible $(\varphi_s)_{s>0}$

$$(11) \qquad E[\int_0^\infty \varphi_s dc_s] = E[\int_0^\infty \varphi_s d\overline{c}_s]$$

(intégrales avec 0 exclu, ∞ compris, $c_\infty=\overline{c}_\infty=1$).

Il résulte du lemme 4 que la variable aléatoire L <u>est la même pour les deux SM</u> (puisqu'elle est la fin de $\hat{H}$, qui ne dépend que de Y). De plus, si φ est prévisible, il en est de même de $\varphi_s H_s$ et l'on a donc

$$(12) \qquad E[\varphi_L c_L I_{\{L>0\}}] = E[\varphi_L \overline{c}_L I_{\{L>0\}}]$$

Soit maintenant $(\underline{\underline{G}}_t)$ la plus petite famille de tribus contenant $(\underline{\underline{F}}_t)$ et pour laquelle L est un temps d'arrêt. On montre très aisément que tout processus prévisible par rapport à $(\underline{\underline{G}}_t)$ s'écrit sur $]0,\infty]$

$$(13) \qquad \varphi_s = a_s I_{\{s<L\}} + b_s I_{\{s\geq L\}}$$

(a_s) et (b_s) étant prévisibles par rapport à $(\underline{\underline{F}}_t)$. Voir par exemple [2] . Mais alors il résulte de (11) et (12) que (c étant nulle sur $]0,L[$)

$$E[\int_0^\infty \varphi_s dc_s] = E[\int_0^\infty \varphi_s d\overline{c}_s]$$

Autrement dit, $E[1-c_s|\underline{\underline{G}}_s]=E[1-\overline{c}_s|\underline{\underline{G}}_s]$, et les deux SM sont associés à une même sousmartingale par rapport à $(\underline{\underline{G}}_t)$, et L est à présent un temps d'arrêt. On conclut alors par le lemme 2.

7. Nous allons maintenant perfectionner le théorème 2, en caractérisant de manière unique un SM (C_{st}) associé à Y .

THEOREME 3. Il existe un SM (C_{st}) unique, associé à Y et possédant la propriété suivante : si $s<u$, et si $Y_{u-}=0$, alors $C_{su}=0$ (donc si $s<t$, et s'il existe $u\in]s,t]$ tel que $Y_{u-}=0$, on a $C_{st}=0$).

Pour établir l'existence, nous partons d'un SM quelconque (γ_{st}) associé à Y , nous posons $k_{st}=0$ si $s<t$, et s'il existe $u\in]s,t]$ tel que $Y_{u-}=0$, $k_{st}=1$ sinon (de sorte que (k_{st}) est un SM d'après 3), et nous posons enfin $C_{st}=\gamma_{st}k_{st}$. Il s'agit de vérifier que (C_{st}) est associé à Y , ou encore, comme on l'a remarqué en 2 , que le processus $(C_{st}Y_t)_t$ est une martingale continue à droite sur $[s,\infty]$. Or le processus $(\gamma_{st}Y_t)$ est une martingale continue à droite sur cet intervalle. Tant qu'il n'y a sur $]s,t]$ aucun point u où $Y_{u-}=0$, elle est égale à $(C_{st}Y_t)$. Soit $v=\inf\{u : Y_{u-}=0\}$; à partir de l'instant v, la martingale $(\gamma_{st}Y_t)$ garde la valeur 0, et elle est alors égale aussi à $(C_{st}Y_t)$. Pour finir, les deux processus $(C_{st}Y_t)$ et $(\gamma_{st}Y_t)$ sont donc indistinguables.

Pour établir l'unicité, considérons deux SM (C_{st}) et $(\overline{C}_{st})$ satisfaisant à l'énoncé. Comme on l'a déjà remarqué, il suffit de vérifier que pour tout s rationnel les processus $(C_{st})_{t\geqq s}$ et $(\overline{C}_{st})_{t\geqq s}$ sont indistinguables, et nous traiterons le cas où s=0.

Posons $T = \inf\{t>0 : Y_t=0 \text{ ou } Y_{t-}=0\}$, $A=\{Y_{T-}>0\}$, $B=\{Y_{T-}=0\}$.
Nous pouvons affirmer que $C_{0t}(\omega)=\overline{C}_{0t}(\omega)$
- pour $t=0$ (les deux membres sont égaux à 1)
- pour $0<t<T$ (indistinguabilité des processus $(C_{0t}Y_t)$ et $(\overline{C}_{0t}Y_t)$, Y étant >0 sur $]0,T[$).
- pour $t\geqq T$ sur B, car sur B $Y_{T-}=0$ (hypothèse faite sur C et $\overline{C}$).
- pour $t>T$ sur A ; en effet, si $Y_{T-}>0$, c'est que $Y_T=0$. Ou bien Y_t est nulle sur un intervalle $[T,T+\varepsilon[$, Y_{t-} y est nulle aussi, et donc $0 = C_{su}=\overline{C}_{su}$ pour $u>T$ d'après l'hypothèse . Ou bien il existe des $t_n\downarrow T$ tels que $Y_{t_n}>0$; mais $(C_{0r}Y_r)_r$ est une martingale positive, qui garde la valeur 0 à partir de r=T, donc $C_{0t_n}=0$ pour tout n, et $C_{0t}=0$ pour $t>T$. De même pour $\overline{C}$.
- Reste donc seulement à vérifier que $C_{0T}=\overline{C}_{0T}$ sur A. Nous reprenons la démonstration classique d'unicité. Posons $C_{0t}=c_t$, et écrivons que c_tY_t est une martingale M_t , et que $Y_t=N_t+B_t$, où N est une martingale.

$$d(c_tY_t) = c_tdY_t+Y_{t-}dc_t= dM_t$$ (formule d'intégration par parties due à Yoeurp, le processus décroissant (c_t) étant prévisible). Donc

$$c_tdB_t + Y_{t-}\, dc_t = dM_t-c_tdN_t$$

Le côté droit est une martingale, le côté gauche est prévisible, donc

$c_t dB_t + Y_{t-} dc_t = 0$. Appliquant cela à l'instant T sur A, nous obtenons

$$(c_{T-}+\Delta c_T)\Delta B_T + Y_{T-}\Delta c_T = 0 \quad \text{ou } \Delta c_T = -c_{T-}\Delta B_T / Y_{T-}+\Delta B_T$$

Comme on a $c_{T-}=\bar{c}_{T-}$, on a aussi $\Delta c_T=\Delta\bar{c}_T$, et enfin l'égalité cherchée $c_T=\bar{c}_T$.

BIBLIOGRAPHIE

[1]. AZEMA (J.). Représentation multiplicative d'une surmartingale bornée. ZfW 45, 1978, p.191-212.

[2]. DELLACHERIE (C.) et MEYER (P.A.). A propos du travail de Yor sur le grossissement des tribus. Séminaire de Probabilités XII. Lecture Notes in M. 649, Springer 1978.

[3]. MEYER (P.A.). Une représentation de surmartingales. Séminaire de Probabilités VIII. Lecture Notes in M. 381, Springer 1974.

[4]. MEYER (P.A.) et YOEURP (C.). Sur la décomposition multiplicative des sousmartingales positives. Séminaire de Probabilités X. Lecture Notes in M. 511, Springer 1976.

NOTE APRES LA REDACTION

Azéma m'a fait remarquer que le théorème d'unicité 3 est à la fois plus fort et moins fort que celui qui figure dans [1] : plus fort, parce qu'on établit une indistinguabilité à deux indices ; moins fort, parce que le théorème (3.3) de [1] ne suppose pas donné un système multiplicatif, mais seulement un processus décroissant (m_t) à un indice tel que $(m_t Y_t)$ soit une martingale. Le lecteur qui veut étudier la question de près fera donc bien de regarder les deux articles, celui d'Azéma et cet exposé. Il est d'ailleurs toujours préférable de se reporter à l'article original !