SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CATHERINE DOLÉANS-DADE
PAUL-ANDRÉ MEYER

Un petit théorème de projection pour processus à deux indices

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 13 (1979), p. 204-215
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1979__13__204_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1977/78

UN PETIT THEOREME DE PROJECTION POUR PROCESSUS A DEUX INDICES

par Catherine Doléans-Dade et P.A. Meyer

Cet exposé (qui pose plus de problèmes qu'il n'en résout) a été présenté au séminaire de Strasbourg, et discuté avec R. Cairoli à Lausanne. Pour la rédaction définitive, nous avons utilisé aussi un travail non publié de E. Merzbach et M. Zakai. Nous remercions tous ceux qui ont contribué à améliorer ce travail.

L'exposé se rattache, d'une part à l'exposé antérieur (une remarque sur le calcul stochastique dépendant d'un paramètre), et d'autre part aux exposés généraux de ce volume sur la théorie des processus à deux indices. Nous avons cependant cherché à rédiger de telle sorte, que l'exposé puisse être lu de manière à peu près indépendante.

Nos notations sont celles de Cairoli et Walsh, à quelques détails près. Sur un espace probabilisé $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ complet, on se donne deux filtrations $(\underline{\underline{F}}^1_s)_s$, $(\underline{\underline{F}}^2_t)_t$ satisfaisant aux conditions habituelles (nous conviendrons que pour $s<0$, $t<0$, $\underline{\underline{F}}^1_s = \underline{\underline{F}}^2_t$ est la tribu triviale). Nous posons $\underline{\underline{F}}_{st} = \underline{\underline{F}}^1_s \cap \underline{\underline{F}}^2_t$. Il est aussi commode de convenir que $\underline{\underline{F}}^1_\infty = \underline{\underline{F}}^2_\infty = \underline{\underline{F}}$, de sorte que $\underline{\underline{F}}_{s\infty} = \underline{\underline{F}}^1_s$, $\underline{\underline{F}}_{\infty t} = \underline{\underline{F}}^2_t$.

Nous faisons l'hypothèse fondamentale de commutation de Cairoli-Walsh

<u>Les opérateurs</u> $E^1_s = E[.|\underline{\underline{F}}^1_s]$ <u>et</u> $E^2_t = E[.|\underline{\underline{F}}^2_t]$ <u>commutent</u>

L'opérateur $E^1_s E^2_t$ est alors l'opérateur d'espérance conditionnelle $E[.|\underline{\underline{F}}_{st}]$. Si l'on introduit les opérateurs $E^1_{u-} = E[.|\underline{\underline{F}}^1_{u-}]$, $E^2_{v-} = E[.|\underline{\underline{F}}^2_{v-}]$, tous les opérateurs E^1_s, E^2_t, E^1_{u-}, E^2_{v-} commutent, et $E^1_{u-}E^2_t$, par exemple, est égal à $E[.|\underline{\underline{F}}^1_{u-} \cap \underline{\underline{F}}^2_t]$. Cette tribu, que nous noterons $\underline{\underline{F}}_{\underline{u}t}$ pour des raisons typographiques évidentes, est aussi égale à $\bigvee_{s<u} \underline{\underline{F}}_{st}$. On définit de même $\underline{\underline{F}}_{s\underline{v}}$, $\underline{\underline{F}}_{\underline{u}\,\underline{v}}$.

Les éléments de $\mathbb{R}^2$ sont désignés par des lettres <u>grasses</u> , la notation canonique étant $\mathbf{z}=(s,t)$, utilisée sans autre commentaire. On pose $\mathbf{0}=(0,0)$, $\boldsymbol{\infty}=(\infty,\infty)$. Un processus $(X_\mathbf{z})$ sur $\mathbb{R}^2_+$ est identifié à un processus sur $\mathbb{R}^2$, nul hors du premier quadrant. Un processus $(X_\mathbf{z})$ à deux paramètres est dit <u>évanescent</u> si pour presque tout ω on a identiquement $X_\cdot(\omega)=0$.

La notion de <u>processus adapté</u> se comprend d'elle même. La tribu <u>prévisible</u> sur $\mathbb{R}^2\times\Omega$ est engendrée par les processus de la forme

(1) $$X_\mathbf{z}(\omega) = I_{]\mathbf{a},\boldsymbol{\infty}[}(\mathbf{z})I_H(\omega) \quad \text{avec } \mathbf{a}\in\mathbb{R}^2,\ H\in\underline{\underline{F}}_\mathbf{a}$$

et par les ensembles évanescents. Les processus adaptés continus à gauche sont prévisibles[1].

Désignons par $\mathcal{P}^2$ la tribu prévisible sur $\mathbb{R}_+\times\Omega$ (ou $\mathbb{R}\times\Omega$) associée à la filtration $(\underline{\underline{F}}_t^2)$. Nous appelons <u>tribu 2-prévisible</u> sur $\mathbb{R}^2\times\Omega$ la tribu engendrée par les ensembles évanescents, et par les processus $(X_{\mathbf{z}})$ tels que $(s,(t,\omega)) \mapsto X_{st}(\omega)$ soit $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R})\times\mathcal{P}^2$-mesurable. On définirait de même les tribus 2-optionnelle, 1-prévisible, 1-optionnelle. Un processus qui est à la fois 1-prévisible et 2-prévisible est dit <u>biprévisible</u> (on définit de même les processus bioptionnels[1], mais nous ne nous en servirons guère).

Comme d'habitude, une <u>mesure aléatoire</u> est un noyau positif $\mu(\omega,d\mathbf{z})$ de Ω dans $\mathbb{R}^2$. Nous ne considérerons ici que des mesures aléatoires portées par $\mathbb{R}_+^2$, et <u>intégrables</u>, i.e. telles que $E[\mu(1)]<\infty$. Ce mot sera omis désormais. Le <u>processus croissant</u> associé à μ est donné par

$$A_{\mathbf{z}}(\omega) = \mu(\omega, [0,\mathbf{z}]) \text{ si } \mathbf{z}\in\mathbb{R}_+^2 \text{ ; sinon, } A_{\mathbf{z}}(\omega) = 0 .$$

Il n'est peut être pas inutile de rappeler que le sens du mot croissant est plus fort que le sens usuel de croissance au sens de l'ordre sur $\mathbb{R}^2$. La mesure aléatoire μ est dite <u>adaptée</u> si le processus $(A_{\mathbf{z}})$ est adapté. On dit que $H\subset \mathbb{R}^2\times\Omega$ est μ-<u>négligeable</u> si $E[\mu(H)]=0$.

DEFINITION. <u>La mesure aléatoire</u> μ <u>est dite</u> prévisible <u>si</u>

$\forall s$, <u>le processus</u> $(A_{st})_t$ <u>est prévisible par rapport à</u> $(\underline{\underline{F}}_{\infty t})_t$,

$\forall t$, <u>le processus</u> $(A_{st})_s$ <u>est prévisible par rapport à</u> $(\underline{\underline{F}}_{s\infty})_s$.

Comme A est continu à droite, cela revient à dire que le processus croissant A associé à μ est <u>biprévisible</u>. Noter que A_{st} est mesurable par rapport à $\underline{\underline{F}}_{\infty t}$ et $\underline{\underline{F}}_{s\infty}$, donc par rapport à $\underline{\underline{F}}_{st}$. Nous verrons plus loin que A est en fait prévisible, mais ce n'est pas un résultat évident, et il ne vaut que sous l'hypothèse de commutation.

EXEMPLE 1. Soit $\sigma\in\mathbb{R}_+$, et soit T un temps d'arrêt prévisible de la famille $(\underline{\underline{F}}_{\sigma t})_t$. Alors $\mu=\varepsilon_{(\sigma,T)}$ est une mesure aléatoire prévisible. En effet, $A_{st}=I_{\{s\geq\sigma,\, t\geq T\}}$; pour s fixé, on a $A_{st}=0$ si $s<\sigma$, $A_{st}=I_{\{t\geq T\}}$ si $s\geq\sigma$, et dans les deux cas $(A_{st})_t$ est prévisible par rapport à $(\underline{\underline{F}}_{\infty t})_t$. Pour t fixé on a $A_{st}(\omega) = I_{[\sigma,\infty[}(s)I_H(\omega)$ avec $H=\{t\geq T\}\in\underline{\underline{F}}_{\sigma\infty}$, qui est de même prévisible par rapport à $(\underline{\underline{F}}_{s\infty})_s$.

Voici quelques propriétés élémentaires des mesures prévisibles.

1) <u>Le processus</u> $(A_{st})_t$ <u>est en fait prévisible par rapport à</u> $(\underline{\underline{F}}_{st})_t$, et on a bien sûr la même propriété vis à vis de l'autre indice. En effet, soit Y une v.a. $\underline{\underline{F}}_{s\infty}$-mesurable bornée, et soit (Y_t) une version càdlàg. de la martingale $E[Y|\underline{\underline{F}}_{st}]$; il s'agit de vérifier que

---

1. Nous ne définirons pas la tribu optionnelle.

$$E[YA_{s\infty}] = E[\int_{[0,\infty[} Y_{t-}dA_{st}]$$

Mais d'autre part on a $Y=E^1_{\underline{s}}[Y]$, donc $Y_t=E_{\underline{s}t}Y = E^2_t E^1_{\underline{s}}Y = E^2_t Y$, et cette relation se déduit alors du fait que $(A_{st})_t$ est prévisible par rapport à $(\underline{\underline{F}}_{\infty t})_t$.

2) Si μ est une mesure aléatoire prévisible, et si X est un processus prévisible borné, la mesure aléatoire $X.\mu$ est prévisible.

En effet, on se ramène par classes monotones à traiter le cas des processus prévisibles de la forme (1), pour lesquels le résultat est évident.

Nous arrivons maintenant à une propriété importante, pour laquelle nous devons introduire les opérateurs de projection 1-prévisible et 2--prévisible Π^1 et Π^2, définis dans l'exposé précédent. Comme nous ne voulons pas imposer la lecture de cet exposé, nous nous placerons sous des hypothèses un peu plus restrictives, où tout peut se faire de manière élémentaire. Supposons que $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ soit un bon espace (par exemple, que $\underline{\underline{F}}$ soit la P-complétée d'une tribu lusinienne). Il existe alors une famille (p^1_s) de noyaux de $(\Omega,\underline{\underline{F}})$ dans $(\Omega,\underline{\underline{F}})$ telle que, pour tout processus (X_s) - à un seul paramètre - mesurable et borné, le processus

$$(s,\omega) \mapsto \int p^1_s(\omega,dw)X_s(w)$$

soit une version de la projection prévisible de X par rapport à $(\underline{\underline{F}}^1_s)_s$. Nous pouvons aussi supposer que l'application $(s,\omega)\mapsto p^1_s(\omega,.)$ est mesurable (sans adjonction des ensembles évanescents en (s,ω)). Pour tout processus mesurable borné $(X_{\mathbf{z}})$ à deux indices, désignons alors par Π^1X le processus mesurable borné à deux indices

$$(s,t,\omega)\mapsto \int p^1_s(\omega,dw)X_{st}(w) \ .$$

On définit de même le noyau Π^2. On a alors

PROPOSITION 1. Pour que la mesure aléatoire μ soit prévisible, il faut et il suffit que l'on ait pour tout processus mesurable borné X

$$E[\mu(X)] = E[\mu(\Pi^1X)] = E[\mu(\Pi^2X)] \ . \tag{2}$$

DEMONSTRATION. Il suffit de traiter le cas où X est de la forme $X_{\mathbf{z}}(\omega) = I_{]\boldsymbol{\zeta},\infty[}(\mathbf{z})Y(\omega)$, où Y est bornée, et $\boldsymbol{\zeta}=(\sigma,\tau)\in\mathbb{R}^2$. Le processus Π^1X est alors indistinguable de

$$X'_{\mathbf{z}}(\omega) = I_{]\boldsymbol{\zeta},\infty[}(\mathbf{z})Y_{s-}(\omega)$$

où (Y_s) est une version càdlàg. de la martingale $E[Y|\underline{\underline{F}}^1_s]$. Dans ces conditions, on peut écrire sans hypothèse sur μ

$$E[\mu(X)] = E[\int_{[0,\infty[} YdB_s] \quad \text{où } B_s=(A_{s\infty}-A_{s\tau})I_{\{s\geq\sigma\}}$$

et de même $\quad E[\mu(X')] = E[\int_{[0,\infty[} Y_{s-}dB_s]$.

Si μ est prévisible, on voit que (B_s) est prévisible par rapport à $(\underline{\underline{F}}_{s\infty})_s$, donc $E[\mu(X)]=E[\mu(X')]$. Inversement, si $E[\mu(X)]=E[\mu(X')]$ quels que soient Y et ζ, le processus $(A_{s\infty}-A_{s\tau})$ est compatible avec la projection prévisible par rapport à $(\underline{\underline{F}}_{s\infty})_s$, donc prévisible. Prenant $\tau<0$, on voit que $(A_{s\infty})_s$ est prévisible. De même pour l'autre indice.

Sous une forme un peu différente, la proposition suivante (qui est la clef de cette note, malgré sa simplicité) a été aussi remarquée par Merzbach et Zakai, à qui nous empruntons l'important corollaire.

PROPOSITION 2. <u>Soit</u> X <u>un processus mesurable borné</u>. <u>Alors le processus</u> $\Pi^2\Pi^1X$ <u>est</u> (<u>indistinguable de</u>) <u>prévisible</u>.

DEMONSTRATION. Nous commençons par le cas où X est de la forme

$$X_{st}(\omega) = X_s(\omega) = I_{]\sigma,\infty[}(s)Y(\omega) \quad (\sigma\in\mathbb{R},\ Y\ \underline{\underline{F}}_\sigma\text{-mesurable bornée})$$

Désignons alors par $Y_t(\omega)$ une version càdlàg. de la martingale $E[Y|\underline{\underline{F}}_{s\infty}]$. Le processus Π^2X est égal (à un processus évanescent près) à

$$X'_{st}(\omega) = I_{]\sigma,\infty[}(s)Y_{t-}(\omega)$$

Ce processus est adapté et continu à gauche, donc prévisible. Utilisant un raisonnement de classes monotones, nous en déduisons

> Si $X_{st}(\omega)=X_s(\omega)$, où (X_s) est prévisible par rapport à $(\underline{\underline{F}}_{s\infty})_s$ et borné, alors Π^2X est prévisible.

Ce résultat s'étend alors aussitôt à $X_{st}(\omega)=I_{]\tau,\infty[}(t)\xi_s(\omega)$, où (ξ_s) est prévisible par rapport à $(\underline{\underline{F}}_{s\infty})_s$. Un nouveau raisonnement de classes monotones étend cela à tous les processus mesurables par rapport à $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R})\times\mathcal{P}^1$, c'est à dire tous les processus 1-prévisibles. Il ne reste plus qu'à noter que, si X est mesurable borné, Π^1X est 1-prévisible.

COROLLAIRE. <u>Tout processus biprévisible</u> X <u>est</u> (<u>indistinguable de</u>) <u>prévisible</u>.

En effet, X est indistinguable de Π^2X, puis de $\Pi^1\Pi^2X$.

Il faut ici faire une remarque : nous avons établi ce corollaire sous l'hypothèse de commutation. Mais sa validité (contrairement à celle de l'hypothèse de commutation) n'est pas altérée si l'on remplace la loi P par une loi équivalente.

REMARQUE. Il est instructif de regarder ce qui se produit dans le cas <u>optionnel</u>. Partons d'un processus élémentaire de la forme

$$X_{st}(\omega) = X_s(\omega) = I_{[\![S,\infty[\![}(s,\omega)$$

où S est un temps d'arrêt de la famille $(\underline{\underline{F}}_{s\infty})_s$. Désignons par (σ_t^2) la famille des noyaux donnant sur $\mathbb{R}\times\Omega$ la projection optionnelle par rapport à la famille $(\underline{\underline{F}}_{\infty t})_t$. La projection 2-optionnelle de X est alors

$$X'_{st}(\omega) = \int \sigma^2_t(\omega,dw)X_s(w)$$

Pour t fixé, ce processus est croissant et continu à droite en s (sans ensemble exceptionnel). Pour s fixé, c'est une martingale en t , indistinguable d'un processus continu à droite. Mais par ailleurs, ce processus ne jouit d'aucune propriété évidente qui montrerait qu'il est càdlàg., ou même simplement 1-optionnel. Voir toutefois la dernière page.

Voici le résultat principal de cette note. Pour l'énoncer, il nous faut une définition :

DEFINITION. Un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2_+\times\Omega$ est dit prévisiblement évanescent s'il est prévisible, et négligeable pour toute mesure aléatoire prévisible.

L'exemple de mesure prévisible que l'on a donné plus haut montre que, si H est prévisiblement évanescent, pour tout σ fixé, l'ensemble aléatoire $H(\sigma,.,.)$, prévisible par rapport à $(\underline{\underline{F}}_{\sigma t})_t$, est évanescent. Autrement dit, un ensemble prévisiblement évanescent est séparément évanescent.

PROPOSITION 3. Soit $(Y_{\mathbf{z}})_{\mathbf{z}\in\mathbb{R}^2_+}$ un processus mesurable borné. Il existe un processus prévisible borné $(X_{\mathbf{z}})_{\mathbf{z}\in\mathbb{R}^2_+}$, unique à un processus prévisiblement évanescent près, tel que l'on ait

$$E[\mu(Y)] = E[\mu(X)]$$

pour toute mesure aléatoire prévisible μ.

DEMONSTRATION. L'existence est immédiate : il suffit de prendre $X=\Pi^2\Pi^1Y$, et d'appliquer les propositions 1 et 2.

Reste à établir l'unicité. Soient X et X' deux processus prévisibles bornés tels que $E[\mu(X)] = E[\mu(X')]$ pour toute mesure prévisible μ, et soit f l'indicatrice de l'ensemble prévisible $\{X<X'\}$; la mesure $f.\mu$ étant prévisible, on a aussi $E[f\mu(X)]=E[f\mu(X')]$, ou encore $E[\mu(fX)]=E[\mu(fX')]$, donc $\{X<X'\}$ est μ-négligeable. De même pour $\{X>X'\}$, et finalement $\{X\neq X'\}$ est prévisiblement évanescent.

Nous dirons que X est «la» projection prévisible de Y, et nous écrirons $X={}^pY$.

Le raisonnement de la proposition 3 donne aussi le résultat suivant : si X et X' sont prévisibles bornés, et si $E[\mu(X)]\leq E[\mu(X')]$ pour toute mesure prévisible μ, alors on a $X\leq X'$ hors d'un ensemble prévisiblement évanescent. On en déduit aussitôt les propriétés suivantes :

- Si Y et Y' sont mesurables bornés, et $Y\leq Y'$, alors ${}^pY\leq{}^pY'$ à un ensemble prévisiblement évanescent près.

- Si des Y^n positifs uniformément bornés tendent en croissant vers Y, alors ${}^p(Y^n)$ tend en croissant vers ${}^pY$ hors d'un ensemble prévisiblement évanescent.

Nous examinons maintenant les projections de mesures. Pour cela, nous devons étendre un peu la terminologie de la théorie générale des processus au cas bidimensionnel. Nous appellerons <u>P-mesure</u> une mesure bornée $\geqq 0$ sur $\mathbb{R}_+^2\times\Omega$ (ou sur $\mathbb{R}^2\times\Omega$ portée par $\mathbb{R}_+^2\times\Omega$) qui ne charge pas les ensembles évanescents. Comme pour les processus à un paramètre, il y a correspondance biunivoque entre P-mesures et mesures aléatoires, toute P-mesure Λ étant de la forme

$$\Lambda(X) = E[\mu(X)]$$

pour X mesurable borné, où μ est une mesure aléatoire. Nous dirons que Λ et μ sont <u>associées</u>, et nous noterons en général $\overline{\mu}$ la P-mesure associée à une mesure aléatoire μ.

PROPOSITION 4. <u>Soit</u> λ <u>une mesure aléatoire</u>. <u>Pour qu'il existe une mesure aléatoire prévisible</u> μ <u>telle que</u> $\overline{\mu}=\overline{\lambda}$ <u>sur la tribu prévisible</u>, <u>il faut et il suffit que</u> λ <u>néglige les ensembles prévisiblement évanescents</u>.

DEMONSTRATION. La condition est évidemment nécessaire. Inversement, si λ néglige les ensembles prévisiblement évanescents, l'application $Y\mapsto E[\lambda({}^pY)]$ est bien définie, et on voit sans peine que c'est la P-mesure $\overline{\mu}$ cherchée.

Si la condition de la proposition 2 est satisfaite, nous dirons que la mesure aléatoire λ admet la projection prévisible $\mu=\lambda^p$ (ou que la P-mesure $\overline{\lambda}$ admet la projection prévisible $\overline{\mu}$).

COROLLAIRE. <u>Pour que toute</u> P-<u>mesure admette une projection prévisible</u>, <u>il faut et il suffit que les ensembles prévisiblement évanescents soient évanescents</u>.

DEMONSTRATION. La condition est évidemment suffisante. Inversement, supposons que toute P-mesure admette une projection prévisible, et soit H un ensemble prévisiblement évanescent. Alors H est négligeable pour toute P-mesure, et cela entraîne que H est évanescent (d'après le théorème de section ordinaire, sans adaptation : noter que $\mathbb{R}_+^2$ et $\mathbb{R}_+$ sont isomorphes en tant qu'espaces mesurables).

COROLLAIRE. <u>Pour que les ensembles prévisiblement évanescents soient évanescents</u>, <u>il faut et il suffit que l'on ait</u> $\Pi^1\Pi^2Y=\Pi^2\Pi^1Y$ <u>aux ensembles évanescents près</u>, <u>pour tout processus mesurable borné</u> Y.

DEMONSTRATION. Si Y est un processus mesurable borné, $\Pi^1\Pi^2Y$ et $\Pi^2\Pi^1Y$ sont deux versions de ${}^pY$, et ne diffèrent donc que sur un ensemble prévisiblement évanescent ; si les ensembles prévisiblement évanescents sont évanescents, on a donc $\Pi^1\Pi^2Y=\Pi^2\Pi^1Y$ aux ensembles évanescents près. Inversement, si cette propriété est satisfaite, soit λ une mesure aléatoire ; on définit une mesure aléatoire μ en posant $\overline{\mu}(Y)=E[\lambda(\Pi^1\Pi^2Y)]=E[\lambda(\Pi^2\Pi^1Y)]$; $\overline{\mu}$ coincide avec $\overline{\lambda}$ sur la tribu prévisible, et $\overline{\mu}$ est prévisible, donc λ admet une projection prévisible, et on conclut par le corollaire précédent.

REMARQUE. Plus précisément, une mesure qui ne charge pas les ensembles de la forme $\{\Pi^1\Pi^2Y\neq\Pi^2\Pi^1Y\}$ admet une projection prévisible, donc ne charge pas les ensembles prévisiblement évanescents. Supposons que la tribu $\underline{\underline{F}}$ soit séparable aux ensembles de mesure nulle près, et soit (Y^n) une suite de v.a. bornées engendrant $\underline{\underline{F}}$ par classes monotones, aux ensembles de mesure nulle près. Identifions chaque v.a. Y^n à un processus dépendant seulement de ω, non de s et t. Il est facile de voir, par classes monotones, que tout ensemble $\{\Pi_1^1\Pi^2Y\neq\Pi^2\Pi^1Y\}$ est contenu dans $H=\bigcup_n\{\Pi^1\Pi^2Y^n\neq\Pi^2\Pi^1Y^n\}$ aux ensembles évanescents près. On peut montrer aussi que H est (aux ensembles évanescents près) le plus grand ensemble prévisiblement évanescent non évanescent.

PROJECTIONS DUALES

On aborde les problèmes de cet exposé de manière plus concrète en étudiant, non pas les projections de processus, mais les projections duales de processus croissants.

Soit α une mesure aléatoire, et soit $(A_{\mathbf{z}})$ le processus croissant associé à α. Pour tout s, le processus $(A_{st})_t$ est un processus croissant intégrable, qui admet une projection duale prévisible par rapport à la famille $(\underline{\underline{F}}_{\infty t})_t$. Notons la provisoirement $(B^1_{st})_t$. Si l'on a s<s', la différence $(A_{s't}-A_{st})_t$ est un processus croissant ; par projection duale sur la filtration $(\underline{\underline{F}}_{\infty t})_t$, nous voyons que $(B^1_{s't}-B^1_{st})_t$ est encore un processus croissant.

Soit $\mathbf{D}$ l'ensemble des $\mathbf{z}\in\mathbb{R}^2$ à coordonnées rationnelles. Soit H l'ensemble des ω de Ω possédant la propriété suivante :

<u>Pour tout couple</u> $(\mathbf{u},\mathbf{v})$ <u>d'éléments de</u> $\mathbf{D}$ <u>tel que</u> $\mathbf{u}<\mathbf{v}$, <u>on a</u> $\Delta_{\mathbf{uv}}B^1\geqq 0$.

H est un ensemble de mesure pleine, d'après ce qui précède. Remplaçant B^1 par 0 si $\omega\in H^c$, nous pouvons supposer que la propriété ci-dessus a lieu partout. Nous posons alors pour tout $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^2$

$$B_{\mathbf{u}} = \lim_{\mathbf{v}\in\mathbf{D},\mathbf{v}\to\mathbf{u}\ ,\mathbf{v}>\mathbf{u}} B^1_{\mathbf{v}}$$

et nous obtenons un vrai processus croissant à deux indices. On vérifie aussitôt que pour s fixé, les processus $(B_{st})_t$ et $(B^1_{st})_t$ sont indistinguables, donc

pour s fixé, $(B_{st})_t$ est prévisible par rapport à la famille $(\underline{\underline{F}}_{\infty t})_t$

Du point de vue des P-mesures, ce qu'on a construit est clair : soient α et β les mesures aléatoires associées à A et B, $\overline{\alpha}$ et $\overline{\beta}$ les P-mesures correspondantes. Alors $\overline{\beta} = \overline{\alpha}\Pi^2$: pour vérifier que $\overline{\beta}(X)=\overline{\alpha}(\Pi^2X)$ pour tout processus mesurable borné X, il suffit en effet de traiter le cas où $X(s,t,\omega)= I_{]-\infty,r]}(s)x(t,\omega)$, de sorte que $Y=\Pi^2X$ est indistinguable de $I_{]-\infty,r]}(s)y(t,\omega)$, y désignant la projection prévisible de $x(t,\omega)$ sur $(\underline{\underline{F}}_{\infty t})_t$, et sous cette forme on exprime que $(B_{rt})_t$ est projection duale prévisible de $(A_{rt})_t$.

On notera que tout ceci s'étend très facilement au cas optionnel.

Une dernière remarque avant de revenir à notre problème : supposons que A soit 1-adapté , autrement dit que A_{st} soit $\underline{\underline{F}}_{s\infty}$-mesurable pour tout s. Alors le processus $(B_{st})_t$ est adapté à la famille $(\underline{\underline{F}}_{st})_t$, et même prévisible par rapport à cette famille. En effet, soit Y une v.a. bornée, soit $Y'=E[Y|\underline{\underline{F}}_{s\infty}]$, et soit $Y'_t = E[Y'|\underline{\underline{F}}_{\infty t}]=E[Y|\underline{\underline{F}}_{st}]$ (version càdlàg.). On a pour tout u

$$E[\int^u YdA_{st}] = E[\int^u Y'dA_{st}] = E[\int^u Y'_{t-}dB_{st}]$$

et ceci exprime que(B_{st}) est la projection duale prévisible de (A_{st}) par rapport à $(\underline{\underline{F}}_{st})_t$. Même remarque avec la famille $(\underline{\underline{F}}_{\underline{st}})$.

Poursuivons maintenant l'opération un cran de plus : construisons un processus croissant (C_{st}), de mesure associée γ ,tel que pour tout t $(C_{st})_s$ soit projection duale prévisible de $(B_{st})_s$ sur $(\underline{\underline{F}}_{s\infty})_s$. Il résulte des remarques qui précèdent que $\overline{\gamma} = \overline{\beta}\Pi^1 = \overline{\alpha}\Pi^2\Pi^1$. D'autre part, $(C_{st})_s$ est projection duale prévisible de $(B_{st})_s$ sur $(\underline{\underline{F}}_{\underline{st}})_s$, donc C_{st} est prévisible en s, et un peu mieux qu'adapté en t (pour parler de manière imprécise, car cela n'a pas beaucoup d'importance). Et nous voyons maintenant que

dire que α ne charge pas les ensembles prévisiblement évanescents, ou dire que α admet une projection prévisible, revient à dire que le processus croissant (C_{st}) est prévisible.

Plus précisément : $(C_{st})_s$ est $(\underline{\underline{F}}_{s\infty})_s$-prévisible par construction, mais la prévisibilité de $(B_{st})_t$ par rapport à $(\underline{\underline{F}}_{\infty t})_t$ a pu se perdre par 1-projection duale.

Nous allons maintenant donner un critère naturel pour l'absence de toute pathologie :

PROPOSITION 5. <u>Si les martingales bornées admettent des versions pourvues de limites à gauche, toute P-mesure admet une projection prévisible, et les ensembles prévisiblement évanescents sont évanescents.</u>

DEMONSTRATION. Nous allons faire un calcul, avec les notations B,C ci-dessus, et de plus les notations suivantes : $\sigma=(u_i)$, $\tau=(v_j)$ seront des partitions dyadiques de $\mathbb{R}$, la première suivant l'axe des s, la seconde suivant l'axe des t. La notation $\lim_\sigma$, par exemple, désignera la limite d'une fonction de σ, lorsque σ parcourt la suite des subdivisions dyadiques.

Soit Y une v.a. bornée . Nous avons[1]

$$(1^1)\qquad E[YC_{\infty\infty}] = E[\int YdC_{s\infty}] = E[\int Y_{\underline{s}\infty}\, dC_{s\infty}] = E[\int Y_{\underline{s}\infty}\, dB_{s\infty}]$$

Nous désignons ici par $(Y_{s\infty})$ une version càdlàg. de la martingale $E[Y|\underline{\underline{F}}_{s\infty}]$, et nous utilisons le fait que $(C_{s\infty})_s$ est projection duale prévisible de $(B_{s\infty})_s$ par rapport à $(\underline{\underline{F}}_{s\infty})_s$. Poursuivons les égalités (1) : on a $Y_{\underline{s}\infty} = \lim_\sigma \ \Sigma_i\, Y_{u_i\infty} I_{\{u_i<s\leqq u_{i+1}\}}$, donc

$$(1^2)\qquad \ldots = \lim_\sigma E[\ \Sigma_i\, Y_{u_i\infty}(B_{u_{i+1}\infty}-B_{u_i\infty})]$$
$$= \lim_\sigma E[\ \Sigma_i\, \int Y_{u_i\underline{t}}\, d(B_{u_{i+1}t}-B_{u_i}t)]$$

où (Y_{u_it}) désigne une version càdlàg. de la martingale $E[Y_{u_i\infty}|\underline{\underline{F}}_{\infty t}]$, $(Y_{u_i\underline{t}})$ est le processus de ses limites à gauche, et nous utilisons le fait que $(B_{st})_t$ est, pour tout s, prévisible par rapport à $(\underline{\underline{F}}_{\infty t})_t$.

On a $Y_{u_i\underline{t}} = \lim_\tau \Sigma_j\, Y_{u_iv_j}\, I_{\{v_j<t\leqq v_{j+1}\}}$, donc

$$(1^3)\qquad \ldots = \lim_\sigma \lim_\tau E[\ \Sigma_{ij}\, Y_{u_iv_j}(B_{u_{i+1}v_{j+1}}-B_{u_{i+1}v_j}-B_{u_iv_{j+1}}+B_{u_iv_j})]$$

Posons $\mathbf{w}_{ij}=(u_i,v_j)$, $\bar{\mathbf{w}}_{ij}=(u_{i+1},v_{j+1})$, et introduisons le processus

$$U^{\sigma\tau}_{\mathbf{z}} = \Sigma_{ij}\, Y_{\mathbf{w}_{ij}} I_{\{\mathbf{w}_{ij}<\mathbf{z}\leqq\bar{\mathbf{w}}_{ij}\}}$$

évidemment prévisible. Alors la récapitulation des égalités (1) est

$$(1^4)\qquad E[YC_{\infty\infty}] = \lim_\sigma \lim_\tau E[\int\int U^{\sigma\tau}_{st}\, dB_{st}] = \lim_\sigma \lim_\tau E[\int\int U^{\sigma\tau}_{st}\, dC_{st}]$$

la dernière relation, parce que U est un processus 1-prévisible. De la même manière, nous avons

$$(2)\qquad E[\int Y_{\infty\underline{t}}\, dC_{\infty t}] = \lim_\tau \lim_\sigma E[\int\int U^{\sigma\tau}_{st}\, dC_{st}]$$

1. Les formules ne suivent pas le numérotage général de l'exposé.

Soulignons que nous n'avons utilisé encore aucune version de la martingale $E[Y|\underline{\underline{F}}_{st}]$ à deux dimensions : mais si une telle version existe, qui admet des limites à gauche le long des rationnels (même simplement hors d'un ensemble C-négligeable), alors nous avons en désignant ces limites par $Y_{\underline{st}}$

$$\lim_{\sigma\tau} U^{\sigma\tau}_{st} = Y_{\underline{st}} \quad \text{C-p.p.}$$

et par conséquent, par convergence dominée

(3) $\qquad E[YC_{\infty\infty}] = E[\iint Y_{\underline{st}}dC_{st}] = E[\int Y_{\infty\underline{t}}dC_{\infty t}]$

que veut dire l'égalité extrême ? Que le processus croissant $(C_{\infty t})_t$, qui est, nous le savons, adapté à $(\underline{\underline{F}}_{\infty t})_t$, est prévisible par rapport à cette filtration. Faisant le même raisonnement pour $(C_{st})_t$ au lieu de $(C_{\infty t})_t$ nous obtenons que C est projection duale prévisible de A, et nous pouvons conclure d'après la proposition 2.

Le même raisonnement, avec des hypothèses un peu différentes (C supposé prévisible dès le départ, donc C=B) montre

COROLLAIRE. <u>Si la martingale</u> $Y_{st}= E[Y|\underline{\underline{F}}_{st}]$ <u>admet des limites à gauche le long des rationnels de</u> $\mathbb{R}^2$, <u>notées</u> $Y_{\underline{st}}$ (même seulement hors d'un ensemble prévis. évanescent), <u>le processus</u> $(Y_{\underline{st}})$ <u>est la projection prévisible du processus constant égal à</u> Y.

UNE CONJECTURE

Au cours des discussions que nous avons eues au sujet de cet article, R. Cairoli nous a signalé le résultat suivant (non publié ; la démonstration de Cairoli figure dans un exposé de P.A.Meyer dans ce volume[1]).

PROPOSITION 6. <u>Toute martingale bornée admet des limites à droite et à gauche hors d'un ensemble</u> séparément évanescent.

Il est naturel de conjecturer que l'ensemble où les limites à gauche n'existent pas est en fait <u>prévisiblement évanescent</u>.

UN « PROCÉDÉ ALTERNÉ »

On peut aussi dire quelque chose sur la théorie des processus à deux paramètres, <u>sans la relation de commutation</u> . Désignons par $\mathcal{P}^i$ la tribu i-prévisible sur $\mathbb{R}^2_+\times\Omega$ (i=1,2), et par Π^i l'opérateur de projection correspondant. Soit μ une mesure aléatoire prévisible, à laquelle est associée une P-mesure $\overline{\mu}$:

$$\overline{\mu}(X) = E[\mu(X)] \qquad (\text{ X mesurable borné })$$

Nous avons alors, les espérances conditionnelles étant relatives à $\overline{\mu}$

$$\Pi^i X = E_{\overline{\mu}}[X|\mathcal{P}^i] \qquad (i=1,2) \quad \overline{\mu}\text{-p.s. .}$$

1. Note sur les épreuves : cet exposé paraîtra ultérieurement.

Si nous prenons X borné, et que nous formons les espérances conditionnelles alternées $(\Pi^2\Pi^1)^n X$, nous savons qu'elles convergent $\overline{\mu}$ -p.s. vers une v.a. Y (un processus à deux paramètres) qui est une version de l'espérance conditionnelle $E_{\overline{\mu}}[X|\mathcal{P}^1\cap\mathcal{P}^2]$. Ainsi, si nous posons

$$Y^{21} = \liminf_n \; (\Pi^2\Pi^1)^n X$$

Y^{21} est $\mathcal{P}^2$-mesurable, et pour toute mesure prévisible μ il est égal $\overline{\mu}$-p.s. à une v.a. $\mathcal{P}^1\cap\mathcal{P}^2$-mesurable. Plus précisément, si l'on définit de même Y^{12}, Y^{12} est $\mathcal{P}^1$-mesurable, et l'ensemble $\{Y^{12}\neq Y^{21}\}$ est négligeable pour toute mesure aléatoire prévisible μ.

Dans la situation de l'exposé, nous avons vu que $\Pi^2\Pi^1X$ et $\Pi^1\Pi^2X$ sont des processus prévisibles (à ensemble évanescent près), de sorte que ces procédés alternés sont en fait stationnaires. Une différence importante est l'existence d'un lemme maximal pour les projections dans cette situation, qui disparaît lorsque le procédé alterné exige une infinité de passages (cf. l'exposé précédent, prop. 5).

RETOUR SUR LE ≪ CAS OPTIONNEL ≫

Nous revenons à l'hypothèse de commutation, et à la remarque suivant la proposition 2 et son corollaire. Nous reprenons la notation X'_{st} introduite à cet endroit, et montrons que ce processus est <u>progressif</u>. Fixons $\zeta=(\xi,\eta)$, et vérifions que si $h(s,\omega)$ est $\underline{\underline{B}}([0,\xi])\times\underline{\underline{F}}^1_\xi$-mesurable, alors le processus

$$Y_{st}(\omega) = \int\theta^2_t(\omega,dw)h(s,w) \qquad (s\leqq\xi, t\leqq\eta)$$

est mesurable par rapport à $\underline{\underline{B}}([0,\xi]\times[0,\eta])\times\underline{\underline{F}}_\zeta$. Il suffit de traiter le cas où $h(s,\omega)=a(s)b(\omega)$, b $\underline{\underline{F}}^1_\xi$-mesurable. On a alors $Y_{st}(\omega)=a(s)\int\theta^2_t(\omega,dw)b(w)$ et le second terme est une version (continue à droite aux ensembles évanescents près) de la martingale $E[b|\underline{\underline{F}}^2_t]$, qui coincide avec $E[b|\underline{\underline{F}}_{\xi t}]$ d'après la relation de commutation, et qui est donc pour $t\leqq\eta$ mesurable par rapport à $\underline{\underline{B}}([0,t])\times\underline{\underline{F}}_{\xi\eta}$. D'où aussitôt le résultat annoncé.

Par classes monotones, on en déduit alors que pour tout processus 1-optionnel X (positif ou borné), le processus X'_{st} est progressif. Puis, que pour tout processus <u>mesurable</u> X (positif ou borné), le processus

$$X^{21} = \Omega^2\Omega^1 X$$

(Ω^i est l'opérateur de projection sur la tribu i-optionnelle de $\mathbb{R}^2_+\times\Omega$: Ω^2X est la fonction $(s,t,\omega)\longmapsto\int\theta^2_t(\omega,dw)X_{st}(w)$, par exemple) est progressif, et l'on a $E[\mu(X)]=E[\mu(X^{21})]$ pour toute mesure aléatoire adaptée μ. On construit de même X^{12}, et l'on vérifie, comme pour le cas prévisible, que l'ensemble aléatoire progressif $\{X^{12}\neq X^{21}\}$ est négligeable pour toute mesure aléatoire adaptée.

On peut même dire un peu plus : le processus X'_{st} de la remarque est optionnel en t pour s fixé, par rapport à la famille $(\underline{\underline{F}}_{st})_t$, et optionnel en s pour t fixé, par rapport à $(\underline{\underline{F}}_{st})_s$. On en déduit que pour X mesurable (positif ou borné) le processus X^{21} possède les propriétés suivantes :

- pour s fixé, il est projection optionnelle de $(X_{st})_t$ p.r. à $(\underline{\underline{F}}_{st})_t$
- pour t fixé, il est projection optionnelle de $(X_{st})_s$ p.r. à $(\underline{\underline{F}}_{st})_s$

On a la même chose pour X^{12}. Mais alors, l'ensemble $\{X^{12}\neq X^{21}\}$ est séparément évanescent (ce qui n'était pas évident sur les propriétés de la page précédente, la progressivité étant un résultat insuffisamment précis).

Nous pourrions dire que les processus ainsi construits sont <u>séparément optionnels</u> si ce mot ne prêtait pas à confusion : en effet, on a bien une mesurabilité par rapport à la tribu $\underline{\underline{O}}^2$ pour s fixé, mais on n'a pas prouvé de mesurabilité jointe par rapport à $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)\times\underline{\underline{O}}^2$. Ces résultats sont bien minces !