SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PAUL-ANDRÉ MEYER

Une remarque sur le calcul stochastique dépendant d'un paramètre

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 13 (1979), p. 199-203
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1979__13__199_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1977/78

UNE REMARQUE SUR LE CALCUL STOCHASTIQUE DEPENDANT D'UN PARAMETRE

par P.A. Meyer

Considérons un espace probabilisé $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ muni d'une filtration $(\underline{\underline{F}}_t)$ satisfaisant aux conditions habituelles, et un espace mesurable $(U,\underline{\underline{U}})$. Ce que nous appellerons processus, dans cette note, est ce que l'on appelle d'habitude un processus dépendant du paramètre u , c'est à dire une fonction réelle $(u,t,\omega)\longmapsto X(u,t,\omega)$ sur $U\times\mathbb{R}_+\times\Omega$, et nous ne considérerons en fait que des processus mesurables (par rapport à $\underline{\underline{U}}\times\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)\times\underline{\underline{F}}$), en omettant le mot " mesurable ". Un processus est dit prévisible (optionnel) s'il est mesurable par rapport à la tribu $\underline{\underline{U}}\times\underline{\underline{P}}$ ($\underline{\underline{U}}\times\underline{\underline{O}}$) sur $U\times(\mathbb{R}_+\times\Omega)$. Le processus X est dit évanescent (ou totalement évanescent s'il est nécessaire de préciser) si pour presque tout $\omega\in\Omega$ la fonction $X(.,.,\omega)$ est identiquement nulle sur $U\times\mathbb{R}_+$.

Dans un travail récent, qui reprend un article antérieur de C.Doléans-Dade, Stricker et Yor développent un calcul stochastique dépendant d'un paramètre, qui repose sur des théorèmes du type suivant : soit Y un processus dépendant mesurablement de u (i.e. un processus au sens indiqué plus haut) et supposons que Y soit positif ou borné. Il existe alors un processus prévisible X dépendant mesurablement de u (i.e. un processus prévisible dans notre terminologie) tel que pour tout $u\in U$ $X(u,.,.)$ soit projection prévisible de $Y(u,.,.)$. Si X et X' sont deux processus possédant cette propriété, le processus N=X-X' n'est pas nécessairement évanescent : on peut seulement affirmer que $N(u,.,.)$ est évanescent pour tout u fixé, ce qui est beaucoup plus faible.

Or supposons que Ω soit un bon espace : par exemple, que $\underline{\underline{F}}$ soit la P-complétée d'une tribu lusinienne. Alors d'après un théorème de L. Schwartz, approfondi depuis par F. Knight, il existe pour chaque t un noyau markovien π_t de $(\Omega,\underline{\underline{F}}_t)$ dans $(\Omega,\underline{\underline{F}})$, tel que pour tout processus mesurable borné $Y(t,\omega)$ le processus

$$X(t,\omega) = \int\pi_t(\omega,dw)Y(t,w)$$

soit mesurable en (t,ω), et soit une projection prévisible de Y. Dans ces conditions, il existera aussi un noyau Π donnant une projection prévisible des processus Y dépendant de u : ce sera

$$X(u,t,\omega)= \Pi Y(u,t,\omega) = \int\pi_t(\omega,dw)Y(u,t,w)$$

Or ici l'indétermination a été réduite : si nous modifions Y sur un ensemble évanescent, nous ne modifions X que sur un ensemble évanescent, et non sur un ensemble à coupes évanescentes en (t,ω) pour u fixé. Il est naturel de se demander si cette construction a un sens intrinsèque, ou s'il s'agit d'un hasard. En utilisant une idée de J. Jacod, nous montrons que dès que l'espace des paramètres $(U,\underline{\underline{U}})$ - et non plus l'espace $(\Omega,\underline{\underline{F}})$! - est raisonnable, il existe bien des projections prévisibles ou optionnelles définies de manière naturelle à un ensemble totalement évanescent près.

Nous étudierons le cas prévisible : le cas optionnel (ou même accessible) se traite de manière identique.

MESURES ALEATOIRES

Nous appelons <u>mesure aléatoire intégrable</u>, ou mesure aléatoire, ou même simplement mesure lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité, un noyau μ de $(\Omega,\underline{\underline{F}})$ dans $(U\times\mathbb{R}_+,\underline{\underline{U}}\times\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+))$, positif, tel que $\mu(\omega,.)$ soit bornée pour tout ω et que $E[\mu(1)]<\infty$. La mesure aléatoire sera dite <u>prévisible</u> si, pour tout $H\in\underline{\underline{U}}$, le processus croissant au sens usuel

(1) $$B_t^H(\omega) = \mu(\omega,H\times[0,t])$$

est prévisible. Deux mesures aléatoires μ et μ' sont <u>indistinguables</u> si pour presque tout ω on a $\mu(\omega,.)=\mu'(\omega,.)$ sur $U\times\mathbb{R}_+$.

PROPOSITION 1 (Jacod). <u>Supposons que</u> $(U,\underline{\underline{U}})$ <u>soit radonien</u>. <u>Pour toute mesure</u> λ <u>il existe une mesure prévisible</u> μ <u>telle que l'on ait</u>

(2) $$E[\lambda(X)]=E[\mu(X)]$$ <u>pour tout processus prévisible borné</u> X , <u>et toute mesure prévisible possédant cette propriété est indistinguable de</u> μ. (On appellera μ la <u>projection prévisible</u> de λ, notée λ^p).

DEMONSTRATION. Supposons d'abord que $(U,\underline{\underline{U}})$ soit $[0,1]$ muni de sa tribu borélienne. Pour tout u, soit $A_{ut}(\omega)=\lambda(\omega,[0,u]\times[0,t])$, processus croissant en t, dont nous désignons par $(B^1_{ut})_t$ une projection duale prévisible. Si $u<v$, le processus $(A_{vt}-A_{ut})_t$ est croissant, donc il en est de même pour $(B^1_{vt}-B^1_{ut})_t$. De plus, on a $E[B^1_{v\infty}-B^1_{u\infty}]=E[A_{v\infty}-A_{u\infty}]$, qui tend vers 0 lorsque $v\downarrow u$. Soit L l'ensemble des ω tels que, pour t rationnel (y compris pour $t=+\infty$), la fonction $u\mapsto B^1_{ut}(\omega)$ sur les rationnels de $[0,1]$ soit croissante et continue à droite, finie pour u=1. Puis nous posons

$$\text{si } \omega\notin L ,\ B_{ut}(\omega)=0 \text{ pour tout couple } (u,t)$$

$$\text{si } \omega\in L ,\ B_{ut}(\omega) = \lim_{\substack{v \text{ rationnel } \downarrow u \\ r \text{ rationnel } \downarrow t}} B^1_{vr}(\omega)$$

Il est très facile de voir que

- pour chaque u, $(B_{ut})_t$ est projection duale prévisible de $(A_{ut})_t$
- si $u<v$, le processus $(B_{vt}-B_{ut})_t$ est croissant, et $B_{v\infty}-B_{u\infty} \to 0$

lorsque $v \downarrow u$.

Pour chaque ω, $\mu(\omega, du,dt)$ est alors la mesure $dB_{ut}(\omega)$.

Vérifions que μ est prévisible. Lorsque $H = [0,u]$, le processus croissant B_t^H de (1) vaut B_{ut}, et il est prévisible par construction. On passe de là au cas général par classes monotones.

Pour établir (2), on raisonne par classes monotones à partir du cas où

$$X(u,t,\omega) = I_{[0,v]}(u)Z(t,\omega)$$

$Z(t,\omega)$ étant prévisible borné.

Enfin, si μ et μ' sont deux mesures prévisibles telles que $E[\mu(X)] = E[\mu'(X)]$ pour tout X prévisible, introduisons les processus croissants

$$B_{vt}(\omega) = \mu(\omega,[0,v]\times[0,t]) \ , \ B'_{vt}(\omega) = \mu(\omega,[0,v]\times[0,t])$$

prévisibles par hypothèse. Prenant des X de la forme ci-dessus, on voit que $B_{v.}$ et $B'_{v.}$ sont indistinguables pour v fixé, donc $B_{vt}(\omega) = B'_{vt}(\omega)$ p.s. pour v et t rationnels, et $\mu(\omega,.) = \mu'(\omega,.)$ p.s..

Si l'espace mesurable $(U,\underline{\underline{U}})$ est radonien, nous pouvons considérer U comme une partie universellement mesurable de $[0,1]$, munie de la tribu induite par $\underline{\underline{B}}([0,1])$; alors λ peut être considérée comme mesure aléatoire à valeurs dans $[0,1]\times\mathbb{R}_+$, et la construction précédente fournit une mesure aléatoire μ à valeurs dans le même espace. Le problème consiste à montrer que μ est en fait portée p.s. par $U\times\mathbb{R}_+$. Or soit θ la mesure sur $[0,1]$ $H \mapsto E[\mu(H\times\mathbb{R}_+)] = E[\lambda(H\times\mathbb{R}_+)]$; tout borélien disjoint de U étant θ-négligeable, U^c est intérieurement θ-négligeable, donc θ-négligeable, et il existe un borélien $V \subset U$ portant θ . On vérifie alors immédiatement que V porte $\mu(\omega,.)$ pour presque tout ω .

Dans l'énoncé suivant, nous désignons par π la projection de $U\times\mathbb{R}_+\times\Omega$ sur Ω .

PROPOSITION 2. Supposons que $(U,\underline{\underline{U}})$ soit soulinien.

a) Soit L un ensemble prévisible. Il existe une mesure aléatoire prévisible μ portée par L, telle que

$$E[\mu(H)] \leqq P(\pi(H)) \quad \text{pour tout ensemble prévisible } H$$
$$E[\mu(L)] = P(\pi(L))$$

b) Soit X un processus prévisible borné. Si l'on a $E[\mu(X)] \geqq 0$ pour toute mesure prévisible μ, l'ensemble $\{X<0\}$ est évanescent.

DEMONSTRATION. a) $U\times\mathbb{R}_+$ est isomorphe à une partie analytique de $\mathbb{R}_+$. D'après le théorème de section classique, il existe une application $\underline{\underline{F}}$-mesurable ℓ de Ω dans $U\times\mathbb{R}_+$, telle que $(\ell(\omega),\omega)\in L$ pour presque tout $\omega\in\pi(L)$. Soit alors λ la mesure aléatoire $\varepsilon_{\ell(\omega)}(du,dt)I_L(u,t,\omega)$, et soit μ sa projection prévisible construite dans la proposition 1 ; il est immédiat que μ satisfait à a).

b) On vérifie très facilement que, si μ est une mesure prévisible, et f est un processus prévisible positif borné, la mesure $f\mu$ est prévisible (raisonner par classes monotones à partir de générateurs de la tribu prévisible). Si nous avons $E[\mu(X)]\geq 0$ pour toute mesure prévisible μ, nous avons donc aussi $E[\mu(fX)]\geq 0$, f désignant $I_{\{X<0\}}$, donc $\{X<0\}$ est négligeable pour toute mesure prévisible μ, donc évanescent d'après a).

REMARQUE. La partie a) de l'énoncé est une sorte de théorème de section prévisible, assez faible. On peut préciser un peu la forme de μ de la manière suivante : un argument de capacitabilité montre que L contient un ensemble prévisible K, tel que pour tout (u,ω) la coupe $K(u,.,\omega)$ soit compacte, et que $P(\pi(K))\geq P(\pi(L))-\varepsilon$. Alors le début de $K(u,.,\omega)$ est un temps d'arrêt $T(u,\omega)$, prévisible, et dépendant mesurablement de u[1], et le graphe $G=\{(u,t,\omega)\ :\ t=T(u,\omega)\}$ est prévisible. Appliquant le résultat précédent à G au lieu de L, on aboutit à une mesure prévisible μ portée par G telle que $E[\mu(L)]\geq P(\pi(H))-\varepsilon$. Une telle mesure est entièrement déterminée par son image $M(\omega,du)$ par la projection de $U\times\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$, mesure aléatoire à valeurs dans U possédant les propriétés suivantes :

- Pour tout ensemble prévisible H

$$E[\int M(\omega,du)I_H(u,T(u,\omega),\omega)] \leq P(\pi(H))$$

- Pour tout $J\in\underline{\underline{U}}$ le processus croissant $\int M(\omega,du)I_{\{t\geq T(u,\omega)\}} = B_t^J(\omega)$ est prévisible.

Nous résolvons maintenant le problème de construction de projections à un ensemble évanescent près, posé au début de cette note :

PROPOSITION 3. Soit Y un processus borné. Il existe un processus prévisible borné X tel que

$$E[\mu(Y)]=E[\mu(X)] \text{ pour toute mesure prévisible } \mu \tag{3}$$

et X est unique à un processus évanescent près (on l'appellera la projection prévisible de Y, notée $X={}^pY$).

DEMONSTRATION. On commence par le cas où Y est de la forme

$$Y(u,t,\omega)=h(u)y(t,\omega)$$

où $h=I_H$ ($H\in\underline{\underline{U}}$) et $y(t,\omega)$ est un processus mesurable borné ordinaire. Soit $x(t,\omega)$ la projection prévisible usuelle de $y(t,\omega)$. Alors

$$X(u,t,\omega) = h(u)x(t,\omega)$$

répond à la question. Soit en effet μ une mesure prévisible, et soit $B_t^H(\omega)=\mu(\omega,H\times[0,t])$; on a

$$E[\mu(Y)] = E[\int y(t,\omega)dB_t^H(\omega)] \ ,\ E[\mu(X)]=E[\int x(t,\omega)dB_t^H(\omega)]$$

et le processus croissant B^H est prévisible par hypothèse. L'unicité découle de la proposition 2, et le passage au cas général se fait par

1. Voir l'article de Dellacherie, Séminaire IX, p. 344-349. Toutefois, il y aurait beaucoup de détails à vérifier, et la remarque est à considérer un peu comme de la science-fiction.

classes monotones, toujours grâce à la proposition 2.

UNE INEGALITE MAXIMALE

Rappelons d'abord une inégalité classique de théorie générale des processus (sans paramètre) : si (A_t) est un processus croissant intégrable brut, (B_t) sa projection duale optionnelle ou prévisible, on a

(4) $$E[B^p_\infty] \leqq p^p E[A^p_\infty] \quad (1 \leqq p < \infty)$$

Rappelons aussi que si A_∞ est borné par 1, on a $E[B^p_\infty] \leqq p!$ pour p entier.

Ces résultats se transposent aussitôt à la situation avec paramètre :

PROPOSITION 4. <u>Soit</u> λ <u>une mesure, et soit</u> μ <u>sa projection optionnelle ou prévisible. Alors on a</u>

(5) $$E[(\mu(1))^p] \leqq p^p E[(\lambda(1))^p]$$

(<u>et si</u> $\lambda(1) \leqq 1$, $E[(\mu(1))^p] \leqq p!$ <u>pour</u> p <u>entier</u>).

DEMONSTRATION. Le processus croissant $B_t = \mu(U \times [0,t])$ est projection duale optionnelle (prévisible) de $A_t = \lambda(U \times [0,t])$; on applique alors (4).

Cela va nous permettre d'étendre l'inégalité de Doob aux projections de processus. Si X est un processus (dépendant de u), défini à un processus évanescent près, et si U est souslinien, la fonction sur Ω

(6) $$X^*(\omega) = \sup_{u,t} |X(u,t,\omega)|$$

est une v.a., définie à une v.a. négligeable près. Cela donne un sens à l'énoncé suivant :

PROPOSITION 5. <u>Soit</u> X <u>un processus, et soit</u> Y <u>sa projection optionnelle ou prévisible. Alors on a pour</u> $1 < p < \infty$

(7) $$\|Y^*\|_p \leqq q \|X^*\|_p$$ <u>où</u> q <u>est l'exposant conjugué de</u> p.

DEMONSTRATION. Soit ξ la v.a. X^* ; nous désignerons aussi par ξ le processus $\xi(u,t,\omega) = \xi(\omega)$, et par η sa projection prévisible. L'inégalité $|X| \leqq \xi$ entraîne $|Y| \leqq \eta$ à un ensemble évanescent près, et il suffit donc de montrer que $\|\eta^*\|_p \leqq q \|\xi\|_p$. Or le théorème de section usuel montre que $\|\eta^*\|_p = \sup_\lambda E[\lambda(\eta)]$, λ parcourant l'ensemble des mesures positives telles que $\|\lambda(1)\|_q \leqq 1$. Comme η est prévisible, on peut remplacer λ par $\mu = \lambda^p$, puis (μ étant prévisible), η par ξ . D'autre part, $\mu(\xi) = \xi\mu(1)$, puisque ξ dépend seulement de ω. Finalement

$$\|\eta^*\|_p = \sup_\lambda E[\xi.\mu(1)] \leqq \|\xi\|_p \sup_\lambda \|\mu(1)\|_q \leqq q \|\xi\|_p \quad \text{(d'après (5))}$$

qui équivaut à (7).

BIBLIOGRAPHIE

<u>J. Jacod</u>. Multivariate point processes : predictable projection, Radon-Nikodym derivatives, representation of martingales . ZfW 31, 1975, p.235.