RENZO CAIROLI
JEAN-PIERRE GABRIEL

Arrêt de certaines suites multiples de variables aléatoires indépendantes

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 13 (1979), p. 174-198
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1979__13__174_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1977/78

ARRET DE CERTAINES SUITES MULTIPLES DE VARIABLES ALEATOIRES INDEPENDANTES

par R. Cairoli et J.-P. Gabriel

§1. INTRODUCTION

Le présent article étudie deux procédés d'arrêt appliqués à certaines suites multiples de variables aléatoires. Ces deux procédés se distinguent par le type de "passé" sur lequel ils se basent: passé large ou passé étroit. Chacun des deux donne lieu à un point aléatoire dans $\mathbb{N}^d$ qui est non anticipatif relativement au passé considéré.

Les résultats obtenus étendent ceux de Davis, McCabe et Shepp contenus dans [3] et [5] et peuvent se résumer ainsi: si $\{X_{n_1, \dots, n_d}, (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{N}^d\}$ est une suite multiple de variables aléatoires indépendantes et toutes réparties comme une variable aléatoire X, alors la condition

$$\text{(a)} \quad E\{\frac{|X_{\nu_1, \dots, \nu_d}|}{\nu_1 \cdot \dots \cdot \nu_d}\} < \infty \text{ , pour tout } (\nu_1, \dots, \nu_d),$$

équivaut à la condition

$$\text{(b)} \quad E\{|X|(\log^+|X|)^d\} < \infty ,$$

ou

$$\text{(c)} \quad E\{|X|\log^+|X|\} < \infty ,$$

suivant que $(\nu_1, \dots, \nu_d)$ désigne un point d'arrêt relatif au passé large ou un point d'arrêt relatif au passé étroit; en outre, l'équivalence des conditions (a) et (b) est conservée si la somme partielle arrêtée $S_{\nu_1, \ldots, \nu_d} = \sum_{j_1 \leq \nu_1, \ldots, j_d \leq \nu_d} X_{j_1, \ldots, j_d}$ remplace $X_{\nu_1, \ldots, \nu_d}$, et (c) est aussi équivalente à

$$\text{(d)} \quad E\{\sup_{(n_1, \ldots, n_d) \in \Gamma} \frac{|X_{n_1, \ldots, n_d}|}{n_1 \cdot \ldots \cdot n_d}\} < \infty, \text{ pour tout chemin}$$

aléatoire croissant Γ.

Nous n'avons pu établir en toute généralité si (c) implique (a), avec $S_{\nu_1, \ldots, \nu_d}$ à la place de $X_{\nu_1, \ldots, \nu_d}$, lorsque le point d'arrêt est pris relativement au passé étroit. Pour cette raison, la question de l'équivalence de ces deux conditions n'a pas été traitée ici.

§2. NOTATION, PREMIERES DEFINITIONS

Dans ce qui suit, d est un nombre entier positif qui désigne la dimension de l'ensemble des indices. Cet ensemble sera le produit $\mathbb{N} \times \ldots \times \mathbb{N}$ (d fois), noté plus brièvement $\mathbb{N}^d$. Ici $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers positifs. Les éléments de $\mathbb{N}^d$ seront notés par les lettres soulignées $\underline{n}$, $\underline{m}$ ou $\underline{i}$ et appelés points. Lorsque l'introduction des coordonnées s'avérera nécessaire, nous poserons $\underline{n} = (n_1, \ldots, n_d)$; $\underline{1}$ sera le point $(1, \ldots, 1)$. Le produit $n_1 \cdot \ldots \cdot n_d$ sera toujours noté $|\underline{n}|$. L'ensemble $\mathbb{N}^d$ sera supposé muni de l'ordre $\underline{n} \prec \underline{m}$, qui signifie $n_1 \leq m_1, \ldots, n_d \leq m_d$; $\underline{\infty}$ désignera un point à l'infini de $\mathbb{N}^d$, c'est-à-dire un élément supérieur à tous les points de $\mathbb{N}^d$; $|\underline{\infty}|$ sera posé égal à ∞.

Nous supposerons qu'un espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ est donné et fixé tout le long du travail. Nous noterons X une variable aléatoire de référence. La donnée de base sera constituée d'une suite multiple

$\{X_{\underline{n}}\ ,\ \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ de variables aléatoires indépendantes et réparties comme X. L'adjectif "multiple" sera par la suite omis. Pour tout $\underline{n} \in \mathbb{N}^d$, nous désignerons par $\mathcal{F}_{\underline{n}}$ et $\mathcal{G}_{\underline{n}}$ les tribus $\sigma(X_{\underline{i}}\ ,\ \underline{i} < \underline{n})$, resp. $\sigma(X_{\underline{i}}\ ,\ \underline{n} + \underline{1} \not< \underline{i})$. Pour tout $\underline{n} \in \mathbb{N}^d$, nous poserons $S_{\underline{n}} = \sum_{\underline{i} < \underline{n}} X_{\underline{n}}$. Pour tout $\omega \in \Omega$, nous poserons $X_{\underline{\infty}}(\omega) = |X_{\underline{\infty}}(\omega)|/|\underline{\infty}| = |S_{\underline{\infty}}(\omega)|/|\underline{\infty}| = 0$.

Nous écrirons toujours $\sup_{\underline{n}}$, $\sum_{\underline{n}}$, $\sum_j$,... au lieu de $\sup_{\underline{n} \in \mathbb{N}^d}$, $\sum_{\underline{n} \in \mathbb{N}^d}$, $\sum_{j \in \mathbb{N}}$,...

Les deux notions suivantes ne sont pas nouvelles. La première apparaît, par exemple, déjà dans [2] et la deuxième dans [8]. Les deux coïncident avec la notion de temps d'arrêt dans le cas où d = 1.

Définition. Nous appellerons point d'arrêt (resp. point d'arrêt au sens large) toute variable aléatoire $\underline{\nu}$ à valeurs dans $\mathbb{N}^d \cup \{\underline{\infty}\}$ telle que

$$\{\underline{\nu} < \underline{n}\} \in \mathcal{F}_{\underline{n}} \text{ (resp. } \{\underline{\nu} < \underline{n}\} \in \mathcal{G}_{\underline{n}}) \text{ pour tout } \underline{n} \in \mathbb{N}^d.$$

A noter que nous aurions pu prendre $\{\underline{\nu} = \underline{n}\}$ à la place de $\{\underline{\nu} < \underline{n}\}$ dans la définition, sans en altérer le contenu. Pour le constater, il suffit d'écrire

$$\{\underline{\nu} = \underline{n}\} = \{\underline{\nu} < \underline{n}\} \cap \{\underline{\nu} \not< (n_1 - 1, n_2\ , \ldots, n_d)\} \cap \ldots$$
$$\cap \{\underline{\nu} \not< (n_1\ , \ldots, n_{d-1}\ , n_d - 1)\}\ ,$$

où seuls les termes correspondant aux indices j tels que $n_j - 1 \geq 1$ apparaissent dans l'intersection.

§3. ESPERANCE D'UNE SUITE ARRETEE DE VARIABLES ALEATOIRES INDEPENDANTES ET EGALEMENT REPARTIES

Si $\{X_{\underline{n}}\ ,\ \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et réparties comme X, alors $E\{\sup_{\underline{n} \succ \underline{i}}|X_{\underline{n}}|\} = E\{\sup_{\underline{n}}|X_{\underline{n}}|\}$, donc $\sup_{\underline{n} \succ \underline{i}}|X_{\underline{n}}| = \sup_{\underline{n}}|X_{\underline{n}}|$ p.s., pour tout $\underline{i} \in \mathbb{N}^d$. Il s'ensuit, en vertu de la loi (0,1), que $\sup_{\underline{n}}|X_{\underline{n}}| = c$ p.s., où c est une constante pouvant être infinie. Cette constante est finie si et seulement si

(3.1) $\quad X \in L^\infty$.

Ces considérations élémentaires sont bien connues et peuvent se faire indépendamment de l'ordre $\prec$ en énumérant les point de $\mathbb{N}^d$. La condition qui va suivre, équivalente elle aussi à (3.1), fait par contre intervenir l'ordre $\prec$ de $\mathbb{N}^d$:

(3.2) $\quad E\{|X_{\underline{\nu}}|\} < \infty$ pour tout point d'arrêt $\underline{\nu}$.

Néanmoins, l'équivalence de (3.1) et (3.2) peut être ramenée au cas d'une dimension. En effet, (3.1) implique clairement (3.2) et, inversement, si $\tilde{\nu}$ est un temps d'arrêt relatif à la suite $\{\tilde{X}_n\ ,\ n \in \mathbb{N}\}$, où $\tilde{X}_n = X_{(n\ ,\ 1\ ,\ \dots,\ 1)}$, alors $\underline{\nu}$, défini par

$$\underline{\nu} = \begin{cases} (\tilde{\nu}\ ,\ 1, \dots,\ 1) & \text{si} \quad \tilde{\nu} < \infty\ , \\ \underline{\infty} & \text{si} \quad \tilde{\nu} = \infty\ , \end{cases}$$

est un point d'arrêt, puisque

$$\{\underline{\nu} \prec \underline{n}\} = \{\tilde{\nu} \leqslant n_1\} \in \sigma(\tilde{X}_n\ , n \leqslant n_1) \subset \mathcal{F}_{\underline{n}}\ ,$$

et de ce fait (3.2) implique

$$E\{|\tilde{X}_{\tilde{\nu}}|\} < \infty \quad \text{pour tout temps d'arrêt } \tilde{\nu}\ ,$$

donc (3.1), étant admis que l'implication a lieu dans le cas d'une dimension.

Nous nous restreindrons donc au cas $d = 1$.

Théorème. Soit $\{X_n , n \in \mathbb{N}\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et réparties comme X. Les deux conditions suivantes s'équivalent:

(a) $E\{|X_\nu|\} < \infty$ pour tout temps d'arrêt ν;

(b) $X \in L^\infty$.

Bien qu'il semble improbable que ce résultat soit nouveau, nous avons été incapables de le trouver dans la littérature. C'est la raison pour laquelle nous en donnons ici une démonstration. Voici d'abord un résultat auxiliaire.

Lemme. Si $X \notin L^\infty$, il existe une fonction réelle f, définie sur $\mathbb{R}_+$, telle que $E\{f(|X|)\} < \infty$ et $E\{|X|f(|X|)\} = \infty$.

Démonstration. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, désignons par I_n l'intervalle $[n-1 , n)$ et par $\{I_{n_j} , j \in \mathbb{N}\}$ la suite des I_n tels que $P\{|X| \in I_n\} > 0$, énumérés dans l'ordre croissant. Définissons la fonction f par

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{j^2 \, P\{|X| \in I_{n_j}\}} & \text{pour tout } t \in I_{n_j} \text{ et } j \in \mathbb{N} , \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Nous avons alors

$$E\{f(|X|)\} = \sum_j \frac{P\{|X| \in I_{n_j}\}}{j^2 \, P\{|X| \in I_{n_j}\}} = \sum_j \frac{1}{j^2} < \infty ,$$

ainsi que

$$E\{|X|f(|X|)\} \geqslant \sum_j \frac{(n_j-1)\ P\{|X| \in I_{n_j}\}}{j^2\ P\{|X| \in I_{n_j}\}} \geqslant \sum_j \frac{j-1}{j^2} = \infty ,$$

et le lemme est donc démontré.

Démonstration du théorème. Il est clair que (b) implique (a). Inversement, supposons que $X \notin L^\infty$ et montrons qu'il existe un temps d'arrêt ν pour lequel l'espérance sous (a) est infinie. Nous pouvons admettre que $E\{|X|\} < \infty$, sinon $\nu \equiv 1$ serait le temps d'arrêt cherché. Sans restreindre la généralité, nous pouvons aussi admettre que $P\{|X| < 1\} > 0$. Soit f la fonction du lemme et soit ν le temps d'arrêt défini par

$$\nu = \begin{cases} \inf\{j : f(|X_n|) \geqslant n\} & \text{si } \{\ \} \neq \emptyset , \\ \infty & \text{si } \{\ \} = \emptyset . \end{cases}$$

En raison de l'indépendance des variables aléatoires X_n , nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} E\{|X_\nu|\} &= \sum_n E\{|X_n| \ ;\ \nu = n\} \\ &= \sum_n E\{|X_n| \ ;\ f(|X_1|) < 1 , \ldots, f(|X_{n-1}|) < n-1, f(|X_n|) \geqslant n\} \\ &= \sum_n P\{f(|X_1|) < 1, \ldots, f(|X_{n-1}|) < n-1\}\ E\{|X_n| \ ;\ f(|X_n|) \geqslant n\} \\ &\geqslant \sum_n P\{\nu = \infty\}\ E\{|X_n| \ ;\ f(|X_n|) \geqslant n\}. \end{aligned}$$

Désignons par ρ la répartition de X et supposons que nous ayons pu démontrer que $P\{\nu = \infty\} > 0$. Alors

$$E\{|X_\nu|\} \geqslant P\{\nu = \infty\} \sum_n \int_{\{f(|x|) \geqslant n\}} |x|\ d\rho(x)$$

$$\geq P\{\nu = \infty\} \int_{-\infty}^{\infty} |x|(f(|x|) - 1)\ d\rho(x)$$

$$= P\{\nu = \infty\}\ \big(E\{|X|f(|X|)\} - E\{|X|\}\big) = \infty\ ,$$

en raison du lemme et du fait que $E\{|X|\} < \infty$. Pour compléter la démonstration, il ne nous reste donc plus qu'à vérifier la supposition. Nous avons

$$P\{\nu = \infty\} = \prod_n P\{f(|X_n|) < n\} = \prod_n P\{f(|X|) < n\}\ .$$

Or, puisque $P\{|X| < 1\} > 0$, tous les facteurs du dernier produit sont positifs, si bien que la convergence de celui-ci équivaut à celle de la série $\sum_n P\{f(|X|) \geq n\}$. Mais la somme de cette série est majorée par l'espérance $E\{f(|X|)\}$, qui est finie, par le choix de f. La démonstration du théorème est ainsi achevée.

§4. ARRET AU SENS LARGE DE $X_{\underline{n}}/|\underline{n}|$ et $S_{\underline{n}}/|\underline{n}|$

Soit $\{X_{\underline{n}}\ ,\ \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et réparties comme X. Dans le cas où d = 1, un résultat bien connu, dû à Burkholder [1], établit que les trois conditions suivantes sont équivalentes:

(4.1) $\quad E\{\sup_{\underline{n}} \frac{|X_{\underline{n}}|}{|\underline{n}|}\} < \infty\ ;$

(4.2) $\quad E\{\sup_{\underline{n}} \frac{|S_{\underline{n}}|}{|\underline{n}|}\} < \infty\ ;$

(4.3) $\quad E\{|X|(\log^+|X|)^d\} < \infty\ .$

Le résultat de Burkholder a été étendu aux dimensions supérieures à 1 dans [4]. Par ailleurs, encore dans le cas où d = 1, Davis [3] , McCabe et Shepp [5] ont posé deux conditions supplémentaires et démontré que chacune d'elles est équivalente aux trois conditions précédentes. Ces deux conditions comportent l'arrêt de X_n/n et S_n/n, et il est naturel de se demander quel pourrait être leur analogue dans les dimensions supérieures à 1 . Une réponse à cette question est donnée par le théorème suivant. Dans le cas d = 1 , ce théorème coïncide avec le théorème de Davis, McCabe et Shepp.

<u>Théorème</u>. Soit $\{X_{\underline{n}}\ ,\ \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et réparties comme X. Chacune des deux conditions suivantes est équivalente à (4.1) - (4.3) :

(4.4) $\quad E\{\frac{|X_{\underline{\nu}}|}{|\underline{\nu}|}\} < \infty$, pour tout point d'arrêt au sens large $\underline{\nu}$

(ou seulement pour tout point $\underline{\nu}$ fini de cette nature);

(4.5) $\quad E\{\frac{|S_{\underline{\nu}}|}{|\underline{\nu}|}\} < \infty$, pour tout point d'arrêt au sens large $\underline{\nu}$

(ou seulement pour tout point $\underline{\nu}$ fini de cette nature).

<u>Démonstration</u>. Nous pouvons supposer d > 1. Manifestement, (4.1) implique (4.4) et (4.2) implique (4.5). Il reste donc à démontrer, par exemple, que (4.4) implique (4.3) et que, de même, (4.5) implique (4.3). La démonstration sera faite en suivant la méthode employée par McCabe et Shepp dans [5]. La variante entre parenthèses sera traitée en fin de démonstration.

La première des deux implications s'établit par récurrence sur d. Elle est vraie pour la dimension 1 , en vertu du résultat précité de Davis, McCabe et Shepp. Pour effectuer le pas de d - 1 à d , nous pouvons supposer, sans restreindre la généralité, que $P\{|X| < 1\} > 0$. Munissons $\mathbb{N}^d$ d'un ordre total quelconque $\triangleleft$, qui ait toutefois la propriété que $\underline{n} \lhd \underline{m}$ si $\sum_{k=1}^{d} n_k < \sum_{k=1}^{d} m_k$. Désignons par $\underline{\nu}$ le premier $\underline{n}$ (pour l'ordre qui vient d'être introduit) tel que $|X_{\underline{n}}| \geq |\underline{n}|$, autrement dit, posons

$$\underline{\nu} = \begin{cases} \inf\{\underline{n} : |X_{\underline{n}}| \geq |\underline{n}|\} & \text{si } \{\ \} \neq \emptyset , \\ \underline{\infty} & \text{si } \{\ \} = \emptyset . \end{cases}$$

Alors $\underline{\nu}$ est un point d'arrêt au sens large, car

$$\{\underline{\nu} = \underline{n}\} = \bigcap_{\substack{\underline{i} \lhd \underline{n} \\ \neq}} \{|X_{\underline{i}}| < |\underline{i}|\} \cap \{|X_{\underline{n}}| \geq |\underline{n}|\} \in \mathcal{G}_{\underline{n}} ,$$

du fait que $\underline{i} \lhd \underline{n}$ implique $\underline{n} + \underline{1} \not\leq \underline{i}$. Désignons par ρ la répartition de X. Nous pouvons écrire, grâce à l'indépendance et à l'égale répartition des $X_{\underline{n}}$,

$$\infty > E\{\frac{|X_{\underline{\nu}}|}{|\underline{\nu}|}\} = \sum_{\underline{n}} E\{\frac{|X_{\underline{n}}|}{|\underline{n}|} ; \underline{\nu} = \underline{n}\}$$

$$= \sum_{\underline{n}} \frac{1}{|\underline{n}|} P\{\underline{n} \lhd \underline{\nu}\} E\{|X_{\underline{n}}| ; |X_{\underline{n}}| \geq \underline{n}\}$$

$$\geq P\{\underline{\nu} = \underline{\infty}\} \sum_{\underline{n}} \frac{1}{|\underline{n}|} \int_{|x| \geq |\underline{n}|} |x| \, d\rho(x) .$$

Montrons que $P\{\underline{\nu} = \underline{\infty}\} > 0$. Puisque

$$P\{\underline{\nu} = \underline{\infty}\} = \prod_{\underline{n}} P\{|X_{\underline{n}}| < |\underline{n}|\} = \prod_{\underline{n}} P\{|X| < |\underline{n}|\} ,$$

cela revient à prouver que la série $\sum_{\underline{n}} P\{|X| \geq |\underline{n}|\}$ converge. Or, il est démontré dans [6] que cette série converge dans le cas où $E\{|X|(\log^+|X|)^{d-1}\} < \infty$. Mais cette espérance est bien finie. En effet, la suite $\{\tilde{X}_{\underline{m}} , \underline{m} \in \mathbb{N}^{d-1}\}$, avec $\tilde{X}_{\underline{m}} = X_{(\underline{m}, 1)}$, est formée de variables aléatoires indépendantes et réparties comme X et si $\tilde{\underline{\mu}}$ est un point d'arrêt au sens large relatif à cette suite, $\underline{\mu}$ défini par

$$\underline{\mu} = \begin{cases} (\underline{\tilde{\mu}}\ ,\ 1) & \text{si } \underline{\tilde{\mu}} \text{ est fini,} \\ \underline{\infty} & \text{sinon,} \end{cases}$$

est un point d'arrêt au sens large relatif à la suite $\{X_{\underline{n}}\ ,\ \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ et

$$E\{\frac{|X_{\underline{\mu}}|}{|\underline{\mu}|}\} = E\{\frac{|X_{\underline{\tilde{\mu}}}|}{|\underline{\tilde{\mu}}|}\}.$$

En raison de (4.4), la première espérance est finie, donc aussi la deuxième, ce qui implique, par hypothèse de récurrence, que $E\{|X|(\log^+|X|)^{d-1}\}$ est fini. Il ne reste maintenant plus qu'à établir l'inégalité

$$\sum_{\underline{n}} \frac{1}{|\underline{n}|} \int_{|x| \geq |\underline{n}|} |x|\ d\rho(x) \geq \frac{1}{d!}\ E\{|X|(\log^+|X|)^d\}\ .$$

La somme au premier membre est manifestement minorée par

$$\int_1^\infty \cdots \int_1^\infty \frac{1}{t_1 \cdot \ldots \cdot t_d} \Big(\int_{|x| \geq t_1 \cdot \ldots \cdot t_d} |x|\ d\rho(x) \Big)\ dt_1 \ldots dt_d$$

$$= \int_{-\infty}^\infty |x| \Big(\int_1^\infty \cdots \int_1^\infty \frac{1}{t_1 \cdot \ldots \cdot t_d}\ I_{\{t_1 \cdot \ldots \cdot t_d \leq |x|\}}\ dt_1 \ldots dt_d \Big)\ d\rho(x)\ ,$$

et il n'est pas difficile de constater que l'intégrale itérée entre parenthèses est égale à $(\log|x|)^d/d!$, si $|x| \geq 1$, donc l'inégalité s'ensuit.

Pour terminer la démonstration du théorème, il nous faut encore prouver que (4.5) implique (4.3). A cet effet, nous allons encore suivre McCabe et Shepp et montrer que (4.5) implique $E\{|X_{\underline{\nu}}|/|\underline{\nu}|\} < \infty$ pour le point d'arrêt au sens large défini dans la première partie de la démonstration. Cette partie entraînera (4.3). Puisque sur $\{\underline{\nu} \neq \underline{\infty}\}$,

$$|X_{\underline{\nu}}| \leqslant |S_{\underline{\nu}}| + \sum_{\underline{i} \lneq \underline{\nu}} |X_{\underline{i}}| \,,$$

il nous suffit de prouver que

$$(4.6)\quad E\{\frac{1}{|\underline{\nu}|} \sum_{\underline{i} \lneq \underline{\nu}} |X_{\underline{i}}| \; ; \; \underline{\nu} \neq \underline{\infty}\}$$

$$= \sum_{\underline{n} \,:\, P\{\underline{\nu} = \underline{n}\} > 0} \left(\frac{P\{\underline{\nu} = \underline{n}\}}{|\underline{n}|} \sum_{\underline{i} \lneq \underline{n}} E\{|X_{\underline{i}}| \bigm| \underline{\nu} = \underline{n}\}\right)$$

est fini. Pour cela, nous pouvons encore supposer que $P\{|X| < 1\} > 0$. Si $\underline{i} \prec \underline{n}$, alors $\underline{i} \lhd \underline{n}$ et si de plus $\underline{i} \neq \underline{n}$, nous avons, compte tenu de l'indépendance et de l'égale répartition des $X_{\underline{i}}$,

$$E\{|X_{\underline{i}}| \bigm| \underline{\nu} = \underline{n}\} = E\{|X_{\underline{i}}| \Bigm| |X_{\underline{i}}| < |\underline{i}|\} \leqslant \frac{E\{|X|\}}{P\{|X| < 1\}} \,,$$

qui est fini, par hypothèse, puisque $E\{|X|\} = E\{|S_{\underline{1}}|\}$. La conclusion s'ensuit aisément.

Passons maintenant à la variante du théorème qui figure entre parenthèses. Supposons que l'espérance dans (4.3) soit infinie. En suivant l'indication donnée par McCabe et Shepp à la fin de [5], nous allons produire un point aléatoire fini $\underline{\tau}$, $\mathcal{F}_{\underline{1}}$-mesurable et tel que

$$(4.7)\quad E\{\frac{|X_{\underline{\nu} \Delta \underline{\tau}}|}{|\underline{\nu} \Delta \underline{\tau}|}\} = \infty \quad \text{et} \quad E\{\frac{|S_{\underline{\nu} \Delta \underline{\tau}}|}{|\underline{\nu} \Delta \underline{\tau}|}\} = \infty \,,$$

où $\underline{\nu}$ est le point d'arrêt au sens large introduit dans la première partie de la démonstration et où $\underline{\nu} \wedge \underline{\tau}$ désigne l'infimum de $\underline{\nu}$ et $\underline{\tau}$ relativement à l'ordre $\triangleleft$ (par convention, $\underline{n} \wedge \infty = \underline{n}$ pour tout $\underline{n} \in \mathbb{N}^d$). Le théorème sera alors entièrement démontré, car $\underline{\nu} \wedge \underline{\tau}$ sera un point d'arrêt au sens large, fini, mettant en défaut (4.4) et (4.5). D'après ce qui a été déjà démontré, $\sum_{\underline{n}} E\{|X_{\underline{n}}|/|\underline{n}| \ ; \ \underline{\nu} = \underline{n}\} = \infty$. Il est donc possible de choisir une suite croissante $\{\underline{n}(j) \ , \ j \in \mathbb{N}\}$ de points de $\mathbb{N}^d$ à coordonnées égales, telle que

$$\sum_{\underline{n}:\ \underline{n}(j) \ntrianglelefteq \underline{n} \triangleleft \underline{n}(j+1)} E\{\frac{|X_{\underline{n}}|}{|\underline{n}|} \ ; \ \underline{\nu} = \underline{n}\} \geq 1 \ , \quad \text{pour tout } j \in \mathbb{N}.$$

Posons $\underline{\tau}$ égal à $\underline{n}(j)$ sur $\{\sqrt{j-1} \leq |X_{\underline{1}}| < \sqrt{j}\}$. Nous avons alors

$$E\{\frac{|X_{\underline{\nu} \wedge \underline{\tau}}|}{|\underline{\nu} \wedge \underline{\tau}|}\} \geq \sum_{\underline{n} \neq \underline{1}} P\{\underline{n} \triangleleft \underline{\tau}\} \ E\{\frac{|X_{\underline{n}}|}{|\underline{n}|} \ ; \ \underline{\nu} = \underline{n}\} \geq$$

$$\sum_j P\{\underline{n}(j+1) \triangleleft \underline{\tau}\} \sum_{\underline{n}\ :\ \underline{n}(j) \ntrianglelefteq \underline{n} \triangleleft \underline{n}(j+1)} E\{\frac{|X_{\underline{n}}|}{|\underline{n}|} \ ; \ \underline{\nu} = \underline{n}\} \geq$$

$$\sum_j P\{\underline{n}(j+1) \triangleleft \underline{\tau}\} = \sum_j P\{|X_{\underline{1}}| \geq \sqrt{j}\}.$$

Mais le dernier membre est minoré par $E\{X^2\} - 1 = \infty$, donc la première espérance dans (4.7) est infinie. Pour démontrer que la deuxième l'est aussi, il suffit de considérer le cas où $E\{|X|\} < \infty$. En raison de l'inégalité

$$E\{\frac{|X_{\underline{\nu} \wedge \underline{\tau}}|}{|\underline{\nu} \wedge \underline{\tau}|}\} \leq E\{\frac{|S_{\underline{\nu} \wedge \underline{\tau}}|}{|\underline{\nu} \wedge \underline{\tau}|}\} + E\{\frac{1}{|\underline{\nu} \wedge \underline{\tau}|} \sum_{\underline{i} \ntrianglelefteq \underline{\nu} \wedge \underline{\tau}} |X_{\underline{i}}|\} \ ,$$

nous voyons qu'il est suffisant de prouver que le dernier terme est fini. Ce terme est majoré par

$$\sum_{\underline{n}} \frac{1}{|\underline{n}|} E\{ \sum_{\underline{i} \nleq \underline{n}} |X_{\underline{i}}| \ ; \ \underline{\nu} = \underline{n}\} \ + \ \sum_{\underline{n}} \frac{1}{|\underline{n}|} E\{ \sum_{\underline{i} \prec \underline{n}} |X_{\underline{i}}| \ ; \ \underline{\tau} = \underline{n}\}.$$

Or, la première somme est égale au premier membre de (4.6) qui est fini, et la deuxième est majorée par

$$\sum_{\underline{n}} \frac{1}{|\underline{n}|} \Big(E\{|X_{\underline{1}}| \ ; \ \underline{\tau} = \underline{n}\} + P\{\underline{\tau} = \underline{n}\} \ |\underline{n}| \ E\{|X|\}\Big) \leqslant 2E\{|X|\} < \infty \ ,$$

ce qui achève la démonstration.

§5. ARRET DE $X_{\underline{n}}/|\underline{n}|$

L'espérance de la suite $|X_{\underline{n}}|/|\underline{n}|$ arrêtée peut être comparée à l'espérance du supremum de $|X_{\underline{n}}|/|\underline{n}|$ sur un chemin aléatoire croissant. Commençons donc par donner la définition d'un tel chemin.

<u>Définition</u>. Nous appellerons <u>chemin croissant</u> une suite $\gamma = \{\underline{n}(j) \ , \ j \in \mathbb{N}\}$ de points de $\mathbb{N}^d$ telle que

(a) $\underline{n}(1) = \underline{1}$;

(b) $\underline{n}(j) \prec \underline{n}(j+1)$, pour tout $j \in \mathbb{N}$;

(c) $\sum_{k=1}^{d} (n_k(j+1) - n_k(j)) = 1$, pour tout $j \in \mathbb{N}$;

(d) $\lim_{n \to \infty} \min(n_1(j), \dots, n_d(j)) = \infty$.

<u>Définition</u>. Nous appellerons <u>chemin aléatoire croissant</u> une fonction $\Gamma = \{\Gamma(\omega) \ , \ \omega \in \Omega\}$ telle que

(a) $\Gamma(\omega)$ est un chemin croissant pour tout $\omega \in \Omega$;

(b) $\{\underline{n} \in \Gamma\} \in \mathcal{F}_{\underline{n}}$, pour tout $\underline{n} \in \mathbb{N}^d$.

A noter qu'une expression du type $\{\underline{n} \in \Gamma\}$ tient place de $\{\omega : \underline{n} \in \Gamma(\omega)\}$.

Si Γ est un chemin aléatoire croissant, conformément à la notation des deux définitions, nous devrions poser $\Gamma(\omega) = \{\underline{n}(j;\omega) , j \in \mathbb{N}\}$. Toutefois, pour éviter d'indiquer à chaque fois la dépendance de ω sans prêter à confusion, nous utiliserons la lettre ν à la place de n et écrirons

$$\Gamma = \{\underline{\nu}(j) , j \in \mathbb{N}\}.$$

Ce changement de lettre est aussi dicté par le fait que $\underline{\nu}(j)$ ainsi défini est, pour tout j , un point d'arrêt. En effet,

$$\{\underline{\nu}(j) = \underline{n}\} = \{\underline{n} \in \Gamma\} \in \mathfrak{F}_{\underline{n}} , \text{ pour tout } \underline{n} \in \mathbb{N}^d.$$

A relever aussi que, pour tout $j \in \mathbb{N}$ et tout $\omega \in \Omega$,

$$\underline{\nu}(j;\omega) = \Gamma(\omega) \cap \{\underline{n} : \sum_{k=1}^{d} n_k = d + j - 1\}.$$

Nous sommes maintenant prêts à étudier le problème de l'arrêt de $X_{\underline{n}}/|\underline{n}|$. Le théorème suivant établit, en particulier, que l'intégrabilité de la suite arrêtée équivaut à un degré d'intégrabilité de X inférieur à celui qui apparaît dans la condition (4.3).

<u>Théorème</u>. Soit $\{X_{\underline{n}} , \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et réparties comme X. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(5.1) $E\{\frac{|X_{\underline{\nu}}|}{|\underline{\nu}|}\} < \infty$, pour tout point d'arrêt $\underline{\nu}$ (ou seulement pour tout point d'arrêt fini $\underline{\nu}$) ;

(5.2) $E\{\sup_{\underline{n}\in\Gamma} \frac{|X_{\underline{n}}|}{|\underline{n}|}\} < \infty$, pour tout chemin aléatoire croissant Γ ;

(5.3) $E\{|X|\log^+|X|\} < \infty$.

Dans le cas où d = 1, l'équivalence des trois conditions du théorème se réduit à l'équivalence de (4.1) , (4.3) et (4.4). Nous supposerons donc, dorénavant, que d > 1.

Avant de passer à la démonstration du théorème, il est peut-être utile d'observer qu'il n'est pas possible de remplacer, dans (5.2), les chemins aléatoires croissants Γ par des chemins croissants déterministes γ, bien que l'intégrabilité du supremum de $|X_{\underline{n}}|/|\underline{n}|$ sur γ équivale à un degré d'intégrabilité de X variant entre L^1 et L log L. La raison de cela est que le degré L log L n'est pas atteint. Il en irait autrement, par ailleurs, si (d) était supprimé dans la définition de chemin croissant. La proposition suivante donne quelques précisions à ce sujet. Elle sera démontrée en fin de paragraphe.

Proposition. Soit γ un chemin croissant. Il existe une fonction réelle ϕ définie sur $\mathbb{R}_+$, positive, non décroissante, remplissant la condition

$$\phi(t) = o(t \log t), \text{ pour } t \to \infty ,$$

et telle que si $\{X_{\underline{n}}\ ,\ \underline{n} \in \mathbb{N}^d\}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et réparties comme X, alors

$$E\{\sup_{\underline{n}\in\gamma} \frac{|X_{\underline{n}}|}{|\underline{n}|}\} < \infty \text{ si et seulement si } E\{\phi(|X|)\} < \infty.$$

Pour démontrer le théorème, nous aurons besoin d'un lemme. Pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, nous désignerons par π_ℓ le sous-ensemble

$\{\underline{n} : \sum_{k=1}^{d} n_k = d + \ell - 1\}$ de $\mathbb{N}^d$.

<u>Lemme</u>. Soit $\ell \geqslant 2$ et soit $\{F_{\underline{n}}\ ,\ \underline{n} \in \pi_\ell\}$ une famille d'événements deux à deux disjoints, telle que $F_{\underline{n}} \in \mathcal{F}_{\underline{n}}$ pour tout $\underline{n} \in \pi_\ell$. Il existe alors une famille $\{H_{\underline{n}}\ ,\ \underline{n} \in \pi_\ell\}$ d'événements deux à deux disjoints, telle que $H_{\underline{n}} \in \bigvee_{\underline{i} \in \pi_{\ell-1}} \mathcal{F}_{\underline{i}}$ et que $F_{\underline{n}} \subset H_{\underline{n}}$ p.s., pour tout $\underline{n} \in \pi_\ell$.

<u>Démonstration</u>. Désignons la tribu $\bigvee_{\underline{i} \in \pi_{\ell-1}} \mathcal{F}_{\underline{i}}$ par $\mathcal{H}$ et posons $H_{\underline{n}} = \{P\{F_{\underline{n}} | \mathcal{H}\} > 0\}$ pour tout $\underline{n} \in \pi_\ell$. Soient $\underline{m}$ et $\underline{m}'$ deux points quelconques de π_ℓ. En raison du fait que $\mathcal{F}_{\underline{m}}$ et $\mathcal{F}_{\underline{m}'}$ sont conditionnellement indépendantes relativement à $\mathcal{H}$, nous avons

$$P\{F_{\underline{m}} \cap F_{\underline{m}'} | \mathcal{H}\} = P\{F_{\underline{m}} | \mathcal{H}\}\ P\{F_{\underline{m}'} | \mathcal{H}\} \text{ p.s.}$$

Mais le premier membre est nul p.s., donc

$$\{P\{F_{\underline{m}} | \mathcal{H}\} > 0\} \cap \{P\{F_{\underline{m}'} | \mathcal{H}\} > 0\} = \emptyset \quad \text{p.s.,}$$

ce qui prouve que les événements $H_{\underline{n}}$ sont p.s. deux à deux disjoints. D'autre part, si $\underline{m} \in \pi_\ell$,

$$P(F_{\underline{m}}) = \int_\Omega P\{F_{\underline{m}} | \mathcal{H}\}\ dP = \int_{H_{\underline{m}}} P\{F_{\underline{m}} | \mathcal{H}\}\ dP = P(F_{\underline{m}} \cap H_{\underline{m}}),$$

ce qui prouve que $F_{\underline{m}} \subset H_{\underline{m}}$ p.s. Il ne reste alors plus qu'à rendre les événements $H_{\underline{n}}$ deux à deux disjoints en les modifiant convenablement sur un ensemble négligeable.

<u>Démonstration de l'équivalence des conditions (5.1) et (5.3)</u>. Supposons que (5.1), dans sa variante entre parenthèses, soit remplie. Soit $\tilde{\nu}$ un temps d'arrêt fini relatif à la suite $\{\tilde{X}_n\ ,\ n \in \mathbb{N}\}$, où $\tilde{X}_n = X_{(n\ ,\ 1\ ,\ \ldots\ ,\ 1)}$. Alors $\underline{\nu} = (\tilde{\nu}\ ,\ 1\ ,\ \ldots\ ,\ 1)$ est un point d'arrêt fini et

$$E\{\frac{|X_{\underline{\nu}}|}{|\underline{\nu}|}\} = E\{\frac{|X_{\tilde{\nu}}|}{\tilde{\nu}}\}.$$

La première espérance étant finie par hypothèse, la deuxième l'est aussi, et le résultat de Davis, McCabe et Shepp cité au §4 nous permet de conclure que (5.3) a lieu.

Inversement, supposons que (5.3) soit satisfaite. Pour tout point d'arrêt $\underline{\nu}$ nous avons

$$E\{\frac{|X_{\underline{\nu}}|}{|\underline{\nu}|}\} \leqslant 1 + \sum_j P\{\frac{|X_{\underline{\nu}}|}{|\underline{\nu}|} \geqslant j\} =$$

$$= 1 + \sum_j \sum_\ell \sum_{\underline{n}\in\pi_\ell} P\{|X_{\underline{n}}| \geqslant j|\underline{n}| \ ; \ \underline{\nu} = \underline{n}\}$$

$$\leqslant 1 + \sum_j \sum_\ell \sum_{\underline{n}\in\pi_\ell} P\{|X_{\underline{n}}| \geqslant j\ell \ ; \ \underline{\nu} = \underline{n}\} ,$$

le dernier passage ayant utilisé l'inégalité élémentaire $|\underline{n}| \geqslant \sum_{k=1}^{d} n_k - d + 1$. Pour $\ell \geqslant 2$, nous appliquons maintenant le lemme aux événements $F_{\underline{n}} = \{\underline{\nu} = \underline{n}\}$ et concluons qu'il existe une famille $\{H_{\underline{n}} , \underline{n} \in \pi_\ell\}$ d'événements deux à deux disjoints, telle que $H_{\underline{n}}$ est indépendant de $\{|X_{\underline{n}}| \geqslant j\ell\}$ et que $\{\underline{\nu} = \underline{n}\} \subset H_{\underline{n}}$ p.s., pour tout $\underline{n} \in \pi_\ell$. En posant $H_{\underline{1}} = \Omega$, nous voyons donc que le dernier membre des inégalités qui précèdent est majoré par

$$1 + \sum_j \sum_\ell \sum_{\underline{n}\in\pi_\ell} P\{|X| \geqslant j\ell\} \ P(H_{\underline{n}})$$

$$\leqslant 1 + \sum_j \sum_\ell \ P\{|X| \geqslant j\ell\} ,$$

ce qui prouve que la condition (5.1) est remplie, puisque la dernière série double converge si $E\{|X| \log^+|X|\} < \infty$.

Démonstration de l'équivalence des conditions (5.2) et (5.3). Supposons que (5.3) ait lieu et considérons un chemin aléatoire croissant $\Gamma = \{\underline{\nu}(j)\ ,\ j \in \mathbb{N}\}$. Nous avons déjà remarqué que $\underline{\nu}(j;\omega) \in \pi_j$, donc, en vertu de l'inégalité élémentaire utilisée dans la démonstration précédente, $|\underline{\nu}(j;\omega)| \geqslant j$. Par conséquent, nous avons

$$E\{\sup_{\underline{n}\in\Gamma} \frac{|X_{\underline{n}}|}{|\underline{n}|}\} = E\{\sup_j \frac{|X_{\underline{\nu}(j)}|}{|\underline{\nu}(j)|}\} \leqslant E\{\sup_j \frac{|X_{\underline{\nu}(j)}|}{j}\},$$

et nous voyons ainsi que (5.2) découle du résultat de Burkholder cité au §4, si nous montrons que $\{X_{\underline{\nu}(j)}\ ,\ j \in \mathbb{N}\}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et réparties comme X. Puisque $\underline{\nu}(1) = \underline{1}$, $X_{\underline{\nu}(1)}$ est répartie comme X. D'autre part, si $\ell \geqslant 2$, nous avons $\sigma(X_{\underline{\nu}(1)}, \dots, X_{\underline{\nu}(\ell-1)}) \subset \mathcal{H} = \bigvee_{\underline{i}\in\pi_{\ell-1}} \mathcal{F}_{\underline{i}}$ et il nous suffit donc de prouver que

$$P(\{X_{\underline{\nu}(\ell)} \in B\} \cap H) = P\{X \in B\}P(H),$$

pour tout $H \in \mathcal{H}$ et tout borélien B de $\mathbb{R}$. En vertu du lemme, appliqué aux événements $F_{\underline{n}} = \{\underline{\nu}(\ell) = \underline{n}\}$ avec $\underline{n} \in \pi_\ell$, il existe une famille $\{H_{\underline{n}}\ ,\ \underline{n} \in \pi_\ell\}$ d'événements deux à deux disjoints, telle que $H_{\underline{n}} \in \mathcal{H}$ et que $\{\underline{\nu}(\ell) = \underline{n}\} \subset H_{\underline{n}}$ p.s., pour tout $\underline{n} \in \pi_\ell$. Mais $\bigcup_{\underline{n}\in\pi_\ell} \{\underline{\nu}(\ell) = \underline{n}\} = \Omega$, donc en fait $\{\underline{\nu}(\ell) = \underline{n}\} \doteq H_{\underline{n}}$ p.s., pour tout $\underline{n} \in \pi_\ell$. Par conséquent,

$$P(\{X_{\underline{\nu}(\ell)} \in B\} \cap H) = \sum_{\underline{n}\in\pi_\ell} P(\{X_{\underline{n}} \in B\} \cap \{\underline{\nu}(\ell) = \underline{n}\} \cap H)$$

$$= \sum_{\underline{n}\in\pi_\ell} P(\{X_{\underline{n}} \in B\} \cap H_{\underline{n}} \cap H) = P\{X \in B\} \sum_{\underline{n}\in\pi_\ell} P(H_{\underline{n}} \cap H)$$

$$= P\{X \in B\}P(H),$$

ce qu'il faillait démontrer.

Supposons, inversement, que la condition (5.2) soit remplie. Pour conclure que (5.3) l'est également, il nous suffit de démontrer, en vertu du résultat de Davis, McCabe et Shepp déjà utilisé, que pour tout temps d'arrêt fini $\tilde{\nu}$ relatif à la suite $\{\tilde{X}_n , n \in \mathbb{N}\}$ définie par $\tilde{X}_n = X_{(n, 1, \ldots, 1)}$, nous avons

$$E\{\frac{|\tilde{X}_{\tilde{\nu}}|}{\tilde{\nu}}\} < \infty .$$

A cet effet, considérons un tel temps d'arrêt $\tilde{\nu}$ et posons, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$\underline{\nu}(j;\omega) = \begin{cases} (j, 1, \ldots, 1) & \text{si } j \leq \tilde{\nu}(\omega) , \\ (\tilde{\nu}(\omega)+\ell , \ell+1, \ldots, \ell+1) & \text{si } j = \tilde{\nu}(\omega)+\ell d , \ell \in \mathbb{N}, \\ (\tilde{\nu}(\omega)+\ell , \ell+2, \ldots, \underset{\substack{\uparrow \\ (k+1)^e \text{ coordonnée}}}{\ell+2} , \ell+1, \ldots, \ell+1) & \text{si } j = \tilde{\nu}(\omega)+\ell d+k , \\ & \ell \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq d-1. \end{cases}$$

Alors $\Gamma = \{\underline{\nu}(j), j \in \mathbb{N}\}$ est un chemin aléatoire croissant, car $\{\underline{n} \in \Gamma\}$ est vide si $\underline{n}$ n'est pas de l'une des formes $(n, 1, \ldots, 1)$, $(n, \ell+1, \ldots, \ell+1)$ ou $(n, \ell+2, \ldots, \ell+2, \ell+1, \ldots, \ell+1)$, et $\{\underline{n} \in \Gamma\}$ est égal à $\{n \leq \tilde{\nu}\}$, $\{n = \tilde{\nu}+\ell\} \cup \{n = \tilde{\nu}+\ell+1\}$ ou $\{n = \tilde{\nu}+\ell\}$, suivant que $\underline{n}$ est de la première, deuxième ou troisième forme indiquée, ce qui prouve que $\{\underline{n} \in \Gamma\} \in \mathcal{F}_{\underline{n}}$. En outre, $(\tilde{\nu}(\omega), 1, \ldots, 1) \in \Gamma(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$, donc

$$E\{\frac{|X_{\tilde{\nu}}|}{\tilde{\nu}}\} \leq E\{\sup_{\underline{n} \in \Gamma} \frac{|X_{\underline{n}}|}{|\underline{n}|}\} .$$

Mais la deuxième espérance est finie par hypothèse, donc la première aussi, et la démonstration est ainsi achevée.

Passons maintenant à la démonstration de la proposition. Nous aurons besoin des lemmes suivants.

Lemme. Si $\gamma = \{\underline{n}(j)\ ,\ j \in \mathbb{N}\}$ est un chemin croissant, la suite $\{h(j)\ ,\ j \in \mathbb{N}\}$ définie par

$$h(j) = \frac{|\underline{n}(j)|}{j}$$

est non décroissante et tend vers l'infini.

Démonstration. En raison de la définition de chemin croissant, pour tout $j \in \mathbb{N}$, il existe $k_j \in \{1\ ,\ \ldots,\ d\}$ tel que

$$|\underline{n}(j+1)| = (n_{k_j}(j) + 1) \prod_{k \neq k_j} n_k(j) = \left(1 + \frac{1}{n_{k_j}(j)}\right) |\underline{n}(j)|\,.$$

Il s'ensuit que

$$h(j+1) - h(j) = \left(\frac{j}{j+1}\left(1 + \frac{1}{n_{k_j}(j)}\right) - 1\right) h(j)$$

$$= \left(\frac{j - n_{k_j}(j)}{(j+1)n_{k_j}(j)}\right) h(j)\ ,$$

donc que la suite des $h(j)$ est non décroissante, puisque $n_{k_j}(j) \leqslant j$. Montrons que $h(j)$ tend vers l'infini. Si $n_d(j)/j$ tend vers 1, il n'y a rien à démontrer. Dans le cas contraire, il existe $\varepsilon > 0$ et une sous-suite j_k tels que $n_d(j_k)/j_k \leqslant 1 - \varepsilon$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Or, $n_1(j_k) + \ldots + n_{d-1}(j_k) = d + j_k - 1 - n_d(j_k)$, donc en divisant par j_k, nous voyons que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\frac{n_1(j_k) + \ldots + n_{d-1}(j_k)}{j_k} \geqslant \varepsilon\ .$$

Par conséquent, pour k suffisamment grand nous avons

$$\frac{n_1(j_k)\cdot\ldots\cdot n_{d-1}(j_k)n_d(j_k)}{j_k}$$

$$\geqslant \frac{(n_1(j_k)+\ldots+n_{d-1}(j_k))}{j_k}\,n_d(j_k) \geqslant \varepsilon\, n_d(j_k)\ ,$$

qui tend vers l'infini avec k.

Lemme. Soit $\{h(j)\ ,\ j \in \mathbb{N}\}$ la suite définie dans le lemme précédent et soit ϕ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\phi(t) = \begin{cases} \mathrm{Card}\{(\ell,\ j) \in \mathbb{N}^2 :\ \ \ell j h(j) < t\} & \text{si } t > 1\ , \\ 1 & \text{si } t \leqslant 1\ . \end{cases}$$

Pour toute variable aléatoire réelle X, les deux conditions suivantes sont alors équivalentes :

(a) $E\{\phi(|X|)\} < \infty$;

(b) $\sum\limits_{\ell}\sum\limits_{j} P\{|X| > \ell j h(j)\} < \infty$.

Démonstration. Elle sera faite par une méthode déjà employée par Smythe dans [7]. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, posons $p(k) = \mathrm{Card}\ \{(\ell,\ j) \in \mathbb{N}^2 :$ $\ell j\, h(j) = k\}$. Alors

$$\phi(t) = I_{\{t \leqslant 1\}} + \sum_k p(k) I_{\{k < t\}}$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned} E\{\phi(|X|)\} &= P\{|X| \leqslant 1\} + \sum_k p(k) P\{|X| > k\} \\ &= P\{|X| \leqslant 1\} + \sum_k \sum_{(\ell,j):\,\ell j h(j)=k} P\{|X| > \ell j h(j)\} \\ &= P\{|X| \leqslant 1\} + \sum_\ell \sum_j P\{|X| > \ell j h(j)\}\ , \end{aligned}$$

ce qui démontre le lemme.

<u>Lemme</u>. Soit la fonction ϕ définie comme dans le lemme précédent et soit $k \in \mathbb{N}$. Pour t suffisamment grand

$$\phi(t) \leqslant k(k+1)(2\phi(\tfrac{t}{k}) + 1).$$

<u>Démonstration</u>. Tout au long de la démonstration, nous supposerons que $t > 1$. Par définition de ϕ, nous avons

$$(5.4)\quad \phi(t) = \sum_{j<t} [\frac{t}{jh(j)}] \qquad ([a] = \text{partie entière de } a)$$

et donc

$$(5.5)\quad \phi(\tfrac{t}{k}) \geqslant \frac{1}{k} \sum_{j<\frac{t}{k}} \frac{t}{jh(j)} - \frac{t}{k} \ .$$

Par conséquent,

$$(5.6)\quad \phi(t) \leqslant k\phi(\tfrac{t}{k}) + t + \sum_{\frac{t}{k}\leqslant j<t} [\frac{t}{jh(j)}] \ .$$

D'autre part, si t est suffisamment grand pour que $k(\frac{t}{k} - 1) \geqslant t - \frac{t}{k}$, nous avons

$$\sum_{\frac{t}{k}\leqslant j<t} [\frac{t}{jh(j)}] \leqslant (t - \tfrac{t}{k})[\frac{t}{[\frac{t}{k}]h([\frac{t}{k}])}] \leqslant k[\tfrac{t}{k}]\ [\frac{t}{[\frac{t}{k}]h([\frac{t}{k}])}] \ .$$

Mais par définition de $\phi(t)$, le dernier membre est majoré par $k\phi(t)$, donc, compte tenu de (5.4) et (5.5), par

$$k \sum_{j<\frac{t}{k}} \frac{t}{jh(j)} \leqslant k^2\phi(\tfrac{t}{k}) + kt.$$

En substituant dans (5.6), nous obtenons l'inégalité, valable pour t suffisamment grand,

$$\phi(t) \leqslant (1 + k)(k\phi(\tfrac{t}{k}) + t) \ ,$$

et, pour conclure, il suffit d'observer que $\phi(\frac{t}{k}) \geqslant \frac{t}{k} - 1$.

Démonstration de la proposition. Soit $\gamma = \{\underline{n}(j),\ j \in \mathbb{N}\}$ un chemin croissant et soit $\{h(j),\ j \in \mathbb{N}\}$ la suite définie dans le premier lemme. Nous savons que

$$E\{\sup_{\underline{n}\in\gamma} \frac{|X_{\underline{n}}|}{|\underline{n}|}\} = E\{\sup_{j} \frac{|X_{\underline{n}(j)}|}{jh(j)}\} < \infty$$

si et seulement si

$$\sum_{\ell} P\{\sup_{j} \frac{|X_{\underline{n}(j)}|}{jh(j)} > \ell\} < \infty \quad .$$

Par ailleurs, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, nous avons

$$P\{\sup_{j} \frac{|X_{\underline{n}(j)}|}{jh(j)} > \ell\} = P\{|X_{\underline{n}(1)}| > \ell\} +$$

$$+ \sum_{j\geq 2} P\{\frac{|X_{\underline{n}(1)}|}{1h(1)} \leq \ell, \ldots, \frac{|X_{\underline{n}(j-1)}|}{(j-1)h(j-1)} \leq \ell, \frac{|X_{\underline{n}(j)}|}{jh(j)} > \ell\} =$$

$$= P\{|X_{\underline{n}(1)}| > \ell\} + \sum_{j\geq 2} \prod_{k=1}^{j-1} P\{|X| \leq \ell kh(k)\} P\{|X| > \ell jh(j)\}$$

Pour minorer le produit contenu dans le dernier membre, nous supposerons que $P\{|X| \leq 1\} > 0$. Cette restriction sera levée en fin de démonstration. Les termes du produit en question sont alors tous positifs et, si $E\{|X|\} < \infty$, sa limite est positive, puisque dans ce cas $\sum_{k} P\{|X| > \ell kh(k)\} \leq E\{|X|\} < \infty$. Il est clair, en outre, que la limite décroît avec ℓ et qu'elle est donc minorée par la limite c correspondante à $\ell = 1$. Ainsi nous avons

$$c \sum_{\ell} \sum_{j} P\{|X| > \ell jh(j)\} \leq E\{\sup_{\underline{n}\in\gamma} \frac{|X_{\underline{n}}|}{|\underline{n}|}\} \leq 1 + \sum_{\ell} \sum_{j} P\{|X| > \ell jh(j)\},$$

où c peut être posé égal à 1 dans le cas où $E\{|X|\} = \infty$. Définissons

ϕ comme dans le deuxième lemme. D'après ce lemme, la double série est finie si et seulement si $E\{\phi(|X|)\}$ est fini, donc il nous reste à démontrer que ϕ est $o(t \log t)$, quand $t \to \infty$. Pour tout $t \in [1,\infty)$, nous avons

$$\phi(t) \leqslant \sum_{j=1}^{[t]} \frac{t}{jh(j)} \leqslant 1 + t \int_1^t \frac{du}{u\tilde{h}(u)},$$

où $\tilde{h}$ est la fonction définie sur $[1,\infty)$, continue et linéaire par morceaux, telle que $\tilde{h}(j) = h(j)$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. Si $\int_1^\infty (1/u\tilde{h}(u))\, du < \infty$, le dernier membre est manifestement $o(t \log t)$, quand $t \to \infty$. D'autre part, si cette intégrale n'est pas finie, la règle de l'Hospital s'applique et donne

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{\log t} \int_1^t \frac{du}{u\tilde{h}(u)} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\tilde{h}(t)}.$$

Mais d'après le premier lemme, $\tilde{h}(t)$ tend vers l'infini, donc la limite est nulle et la propriété est démontrée. Pour compléter la démonstration, il nous reste à lever la restriction. Si $P\{|X| < 1\} = 0$, nous considérons un $k \in \mathbb{N}$ tel que $P\{\frac{|X|}{k} < 1\} > 0$. En raison de ce qui a été déjà établi, si $E\{\sup_{\underline{n}\in\gamma} \frac{|X_{\underline{n}}|}{|\underline{n}|}\} < \infty$, alors $E\{\phi(\frac{|X|}{k})\} < \infty$. Mais $3k(k+1)\phi(\frac{t}{k}) \geqslant \phi(t)$ pour t suffisamment grand, d'après le troisième lemme, donc $E\{\phi(|X|)\} < \infty$.

Bibliographie:

[1] Burkholder, D.L., Successive conditional expectations of an integrable function. Ann. Math. Statist. 33, 887-893 (1962).

[2] Cairoli, R. et Walsh, J.B., Régions d'arrêt, localisations et prolongements de martingales. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 44, 279-306 (1978).

[3] Davis, B., Stopping rules for $\frac{S_n}{n}$ and the class L log L. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 17, 147-150 (1971).

[4] Gabriel, J.P., Martingales with a countable filtering index set. Ann. Probability 5, 888-898 (1977).

[5] McCabe, B.J. et Shepp, L.A., On the supremum of $\frac{S_n}{n}$. Ann. Math. Statist. 41, 2166-2168 (1970).

[6] Smythe, R.T., Strong laws of large numbers for r-dimensional arrays of random variables. Ann. Probability 1, 164-170 (1973).

[7] Smythe, R.T., Sums of independent random variables on partially ordered sets. Ann. Probability 2, 906-917 (1974).

[8] Walsh, J.B. Martingales with a multidimensional parameter and stochastic integrals in the plane. Cours 3e cycle Univ. Paris VI.

Département de mathématiques
Ecole polytechnique fédérale
Avenue de Cour 61
1007 Lausanne (Suisse)