MAURIZIO PRATELLI

Le support exact du temps local d'une martingale continue

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 13 (1979), p. 126-131
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1979__13__126_0>

Université de Strasbourg
Séminaire des Probabilités
1978/79

LE SUPPORT EXACT DU TEMPS LOCAL D'UNE MARTINGALE CONTINUE

par Maurizio PRATELLI

La théorie du temps local d'une martingale continue est exposée en [1] : on montre dans cet article que le support du temps local est contenu dans l'ensemble des zéros de la martingale.
Dans le cas du mouvement brownien le support du temps local coïncide avec l'ensemble des zéros:on montre dans cette note que pour toute martingale continue le support du temps local est déterminé par l'ensemble des zéros de la martingale (même s'il ne coïncide pas forcément avec lui).
On montre ensuite que le temps local peut se calculer " trajectoire par trajectoire ",en connaissant seulement l'ensemble des zéros et le processus croissant $\langle M,M\rangle$.

1.DETERMINATION DU SUPPORT DU TEMPS LOCAL.

Soit $(\Omega,\underline{\underline{F}}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé muni d'une filtration $(\underline{\underline{F}}_t)_{t\geq 0}$ satisfaisant aux conditions habituelles. Soit $(M_t)_{t\geq 0}$ une martingale continue,et supposons que $M_0=0$ (si elle n'est pas nulle en zéro,on considère le temps d'arrêt $T = \inf \{ s\geq 0 : M_s=0 \}$ et la martingale $M'_t = M_{T+t} - M_T$).
On désigne par H l'ensemble aléatoire $\{ (\omega,t) : M_t(\omega) = 0 \}$: H est un ensemble parfait,c'est-à-dire que pour presque tout ω la coupe $H(\omega)$ définie par $H(\omega) = \{ t : M_t(\omega)=0 \}$ est un ensemble parfait (voir [1],pag.3-4).
On appelle <u>temps local</u> (en zéro) de la martingale M_t l'unique processus croissant L_t,continu,adapté et nul en zéro,tel que $|M_t| - L_t$ soit une martingale.

On montre en [1],pag.6,que la mesure dL_t est portée par H :montrons qu'elle est portée par $H-\overset{\circ}{H}$,où $\overset{\circ}{H}$ est l'intérieur de H. Soit h un nombre positif et soit $S_h = \inf\{ t>h : M_t \neq 0 \}$. La martingale M est constante sur l'intervalle stochastique $[\![h,S_h]\!]$ et,puisque le temps local vérifie l'équation de Tanaka ([1],pag.13) $M_t = \int_{[0,t]} \operatorname{sgn}(M_s)dM_s + L_t$,il en résulte que $L_h=L_{S_h}$ p.s. Le résultat découle alors du fait que $\overset{\circ}{H} = \bigcup_{h\in\mathbb{Q}_+}]\!]h,S_h[\![$.

On rappelle que toute partie fermée K de $\mathbb{R}$ est union d'un ensemble dénombrable et d'un ensemble parfait : ce dernier ensemble (qui peut être caractérisé comme le plus grand ensemble parfait contenu dans K) est appelé le <u>noyau parfait</u> de K. Puisque le support de la mesure dL_t est un ensemble parfait et est contenu dans $H-\overset{\circ}{H}$,il est évidemment contenu dans le noyau parfait de $H-\overset{\circ}{H}$:nous montrerons qu'il coïncide avec lui.

LEMME <u>Soit</u> M <u>une martingale continue nulle en zéro,de temps local</u> L. <u>On a alors,pour presque tout</u> ω, $L_t(\omega)>0$ <u>dès que</u> $\langle M,M\rangle_t(\omega)>0$.

DEMONSTRATION Soient S et T les temps d'arrêt

$S = \inf \{t>0 : \langle M,M\rangle_t >0 \}$ $\qquad$ $T = \inf \{t>0 : L_t >0 \}$

On rappelle que p.s. les applications $t \to M_t$ et $t \to \langle M,M\rangle_t$ ont les mêmes intervalles de constance ([4],pag.437) ; donc $T \geqq S$ p.s.. Le processus $|M|_{t\wedge T}$ est alors une martingale ; mais il est bien connu qu'une surmartingale positive garde la valeur zéro dès qu'elle l'atteint,et donc M est constamment nulle sur l'intervalle stochastique $[\![0,T]\!]$. Mais alors $\langle M,M\rangle$ aussi est constamment nul sur $[\![0,T]\!]$, et on peut conclure que $T=S$ p.s. Le lemme est ainsi établi.

Soit maintenant K le parfait aléatoire des points de croissance de $\langle M,M\rangle$ (c'est à-dire le support de la mesure $d\langle M,M\rangle$) : il est immédiat de vérifier que $H-\overset{\circ}{H} = H \cap K$ (puisque si la fonction $M_t(\omega)$ est constante sur l'intervalle (a,b), alors (a,b) est contenu ou bien dans $\overset{\circ}{H}$, ou bien dans le complémentaire de H).

THEOREME <u>Le support de la mesure</u> dL_t <u>coïncide avec le noyau parfait de</u> $H-\overset{\circ}{H}$.

DEMONSTRATION Soit W le noyau parfait de $H-\overset{\circ}{H}$; on sait déjà que la mesure dL_t est portée par W. Puisque le complémentaire du support de dL_t est l'union des intervalles à extrémités rationnelles (a,b) tels que $L_a=L_b$, il suffit de montrer que pour tout $t_1<t_2$ on a

$$\mathbb{P}\{ L_{t_1}=L_{t_2} , (t_1,t_2) \cap W \neq \emptyset \} = 0 .$$

Supposons qu'il existe t_1,t_2 et $\varepsilon>0$ tels que

$$\mathbb{P}\{ L_{t_1}=L_{t_2} , (t_1,t_2) \cap W \neq \emptyset \} = \varepsilon .$$

Soit T le temps d'arrêt $T = \inf\{ t\geq t_1 : M_t=0 \}$, et considérons la martingale $M'_t = M_{T+t}$ sur l'espace $\Omega' = \{ T<\infty \}$, muni de la probabilité $\mathbb{P}'(A) = \mathbb{P}(A \cap \Omega') / \mathbb{P}(\Omega')$ et de la filtration $\underline{\underline{F}}'_t = \underline{\underline{F}}_{T+t}$. On remarque que $\langle M',M'\rangle_t=\langle M,M\rangle_{T+t}-\langle M,M\rangle_T$ et que, si L' est le temps local de M', $L'_t=L_{T+t}-L_T$. Soit $S'=\inf\{t>0:\langle M',M'\rangle_t>0\}$. Sur l'ensemble $\{(t_1,t_2) \cap W \} \neq \emptyset$, on a p.s. $T<t_2$ et $S'<t_2-T$. Le lemme, appliqué à la martingale M'_t, permet de conclure que $L'_{t_2-T}>0$ p.s. sur $\{(t_1,t_2) \cap W \neq \emptyset\}$, donc que $L_{t_2}>L_{t_1}$ p.s. sur cet ensemble.

2.UNE AUTRE METHODE.

Introduisons maintenant le changement de temps qui permet de transformer toute martingale (locale) continue en un mouvement brownien. Soit C_t le processus croissant $<M,M>_t$ et soit K l'ensemble des points de croissance de C. Notons D_t le temps d'arrêt $D_t = \inf\{ s>t : (s,\omega) \in K \}$. Appelons i et j respectivement l'inverse à gauche et à droite de C_t:

$$i_t = \sup \{ s: C_s<t \} \qquad\qquad j_t = \inf \{ s: C_s>t \}.$$

Le processus $\overline{M}_t=M_{j_t}$ est,par rapport à la filtration $\underline{F}_{j_t}$,un mouvement brownien arrêté au temps d'arrêt $C_\infty = \sup_t C_t$. On a en effet que $M_t=M_{D_t}$ p.s. (toujours puisque les fonctions $t \to M_t$ et $t \to C_t$ ont les mêmes intervalles de constance) et $\overline{M}_t$ est par conséquent une martingale continue (voir par exemple [3],lemme I.2) dont le processus croissant est $C_{j_t}=t \wedge C_\infty$. Le temps local de $\overline{M}_t$ est $\overline{L}_t=L_{j_t}$.
Puisque M est constante sur l'intervalle $[\![t,D_t]\!]$,on a aussi que $L_t=L_{D_t}$ p.s. : les processus L_t et L_{D_t},ainsi que M_t et M_{D_t},sont indistinguables.
Comme $j_{C_t}=D_t$,on peut reconstruire M et L à partir de $\overline{M}$ et $\overline{L}$ par les formules suivantes:

$$M_t=M_{D_t}=\overline{M}_{C_t} \qquad\qquad L_t=L_{D_t}=\overline{L}_{C_t}$$

Il est bien connu que le support du temps local d'un mouvement brownien coïncide avec l'ensemble des zéros ([2],pag.44) et ceci permet de donner une autre démonstration du théorème précédemment énoncé. Si a et b sont deux fonctions croissantes continues définies sur $\mathbb{R}_+$ avec $a(0)=b(0)=0$,et si F et G désignent respectivement les points de croissance des fonctions a et b,on vérifie facilement que l'ensemble des points de croissance de $a\circ b$ coïncide avec le noyau parfait de $b^{-1}(F) \cap G$. Dans notre cas $a=\bar{L}_t$, $b=C_t$; F est l'ensemble $\bar{H}$ des zéros de $\bar{M}$ et G=K. Alors $C^{-1}(\bar{H}) = H$ et $C^{-1}(\bar{H}) \cap K = H-\mathring{H}$.

Mais le changement de temps qu'on a introduit permet d'avoir des renseignements plus intéressants. Soit $\bar{H}$ l'ensemble des zéros de $\bar{M}$: $\bar{H} = j^{-1}(H)$. Pour tout ω, le complémentaire de $\bar{H}(\omega)$ est l'union d'une famille dénombrable d'intervalles ouverts disjoints $A_n, n\geq 1$. P.Lévy a montré (voir [2],pag.43) que pour presque tout ω on a, pour tout t, les formules suivantes :

$$\bar{L}_t = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} (\pi\varepsilon/2)^{1/2} \times \text{le nombre des intervalles } A_n \subset [0,t] \text{ de longueur } \geq \varepsilon$$

$$= \lim_{\varepsilon\downarrow 0} (\pi/2\varepsilon)^{1/2} \times \text{la longueur totale des intervalles } A_n \subset [0,t] \text{ de lõgueur } < \varepsilon.$$

Jointe à l'égalité $L_t=\bar{L}_{C_t}$, la formule de Lévy montre qu'on peut calculer le temps local d'une martingale continue " trajectoire par trajectoire, en connaissant seulement l'ensemble des zéros $H(\omega)$ et le processus croissant $\langle M,M\rangle_t(\omega)$ ", même si la formule qui en résulte est évidemment assez compliquée.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.AZEMA et M.YOR — En guise d'introduction. Temps locaux. Astérisque n.52-53 (1978) pag.3-17

[2] K.ITO et H.McKEAN — Diffusion processes and their sample paths. Springer-Verlag (1965)

[3] B.MAISONNEUVE — Une mise au point sur les martingales locales continues définies sur un intervalle stochastique. Séminaire de Probabilités XI. Lecture notes n.581

[5] Y.LE JAN Martingales et changements de temps.
Dans ce volume.

SCUOLA NORMALE SUPERIORE
Piazza Dei Cavalieri.
56100 PISA. Italie