SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CHANTHA YOEURP

Sauts additifs et sauts multiplicatifs des semi-martingales

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 13 (1979), p. 118-125
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1979__13__118_0>

SAUTS ADDITIFS ET SAUTS MULTIPLICATIFS DES SEMI-MARTINGALES

Chantha YOEURP

Chou (1) et Lépingle (4) ont donné, indépendamment l'un de l'autre, une condition nécessaire et suffisante pour qu'un processus optionnel mince soit le processus des sauts d'une martingale locale. En s'appuyant sur ce résultat, on donne une caractérisation du processus des sauts d'une semi-martingale spéciale.

Comme application, on obtient une construction des semi-martingales (spéciales) ayant des "sauts multiplicatifs" donnés, ce qui généralise l'article de Garcia, Maillard, Peltraut (3).

Enfin, on dégage, en appendice, une caractérisation des processus optionnels de projection prévisible donnée.

Notations :

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est un espace probabilisé complet muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)$ vérifiant les conditions habituelles. On identifie toujours deux processus indistinguables. On note :

$\mathcal{L}$: ensemble des martingales locales (non nécessairement nulles en 0)

$\mathcal{L}^c$ (resp. $\mathcal{L}^d$) : ensemble des martingales locales continues (resp. sommes compensées de sauts).

$\mathcal{V}$: ensemble des processus càd-làg adaptés, à variation finie sur tout compact, nuls en 0.

$\mathcal{V} = \mathcal{V}^c + \mathcal{V}^d$: décomposition canonique en partie continue et en partie purement discontinue des éléments de $\mathcal{V}$.

$\mathcal{S} = \mathcal{L} + \mathcal{V}$: ensemble des semi-martingales.

$\mathcal{S}^c = \mathcal{L}^c + \mathcal{V}^c$: ensemble des semi-martingales continues.

$\mathcal{S}^d = \mathcal{L}^d + \mathcal{V}^d$

$\mathcal{S}_p = \{X = M+A \in \mathcal{S} \ / \ A$ soit prévisible$\}$: ensemble des semi-martingales spéciales.

Pour tout processus càd-làg $X = (X_t)$, on note $\Delta X_t = X_t - X_{t-}$, pour $t > o$, et on pose $\Delta X_o = X_o$. On convient que $\mathcal{F}_{o-} = \mathcal{F}_o$.

1- Rappelons d'abord que si on se donne un processus mesurable $\alpha = (\alpha_t)$ vérifiant $E\{|\alpha_R| \ / \mathcal{F}_{R-}\} < \infty$ p.s., pour tout t.a. prévisible fini R, alors la projection prévisible $\dot{\alpha} = (\dot{\alpha}_t)$ existe et est unique ([2] chapitre VI, 2$^{\underline{e}}$ partie, remarque f du théorème 4 3). En particulier, on peut donc parler de projection prévisible d'un processus mesurable $\alpha = (\alpha_t)$, localement borné dans L^1 (i.e. il existe une suite de t.a. $T_n \uparrow +\infty$ telle que $\sup_T E(|\alpha_{T_n \wedge T}|) < +\infty$, T parcourant l'ensemble des t.a. finis).

Voici une condition nécessaire et suffisante pour qu'un processus optionnel mince soit un processus de sauts d'une semi-martingale spéciale :

<u>Théorème 1</u> :

<u>Soit</u> $\alpha = (\alpha_t)$ <u>un processus optionnel.</u>

<u>Pour qu'il existe une semi-martingale spéciale</u> $X = (X_t)$ <u>vérifiant</u> $\Delta X = \alpha$, <u>il faut et il suffit que</u> :

1°) $\left(\sum_{o<s\leq t} \alpha_s^2\right)^{1/2}$ <u>soit localement intégrable</u> <u>(alors, la projection prévisible</u> $\dot{\alpha}$ <u>de</u> α <u>existe</u>).

2°) <u>pour tout</u> $t \in \mathbb{R}_+$, $\sum_{o<s\leq t} |\dot{\alpha}_s| < +\infty$.

<u>De plus, l'équation</u> (σ) : $\Delta X = \alpha$ <u>admet une solution unique</u> $X^o = (X^o_t) \in \mathcal{S}^d_p$, <u>et l'ensemble des solutions de</u> (σ) <u>est</u> $X^o + \mathcal{S}^c$.

Remarque :

Dans le cas particulier où $\dot{\alpha} = 0$ sur $]o,\infty[$, le théorème de Chou - Lépingle affirme que X est une martingale locale.

Démonstration :

a) condition nécessaire :

Soit $X = M+A$ la décomposition canonique de X. Par hypothèse, on a : $\alpha_t = \Delta X_t = \Delta M_t + \Delta A_t$

En prenant les projections prévisibles des deux membres de l'égalité, on obtient :

$$\dot{\alpha}_t = M_o\, I_{\{o\}} + \Delta A_t$$

La condition 2°) est donc vérifiée. La condition 1°) découle du fait que X est une semi-martingale spéciale ([5]).

b) condition suffisante :

On pose $A_t = \sum_{o<s\leq t} \dot{\alpha}_s \in \mathcal{V}$ et $\beta_t = \alpha_t - \Delta A_t = \alpha_t - \dot{\alpha}_t + \dot{\alpha}_o\, I_{\{o\}}$

Il est immédiat que $\beta = (\beta_t)$ est un processus optionnel tel que $\dot{\beta} = 0$ sur $]o,\infty[$; on a, de plus :

$$\left(\sum_{o<s\leq t} \beta_s^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{o<s\leq t} \alpha_s^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{o<s\leq t} \dot{\alpha}_s^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{o<s\leq t} \alpha_s^2\right)^{1/2} + \sum_{o<s\leq t} |\dot{\alpha}_s|$$

La dernière somme est un processus croissant prévisible, elle est donc localement intégrable. Par conséquent, compte tenu de la condition 1°), $\left(\sum_{o<s\leq t} \beta_s^2\right)^{1/2}$ est localement intégrable. D'après Chou [1] ou Lépingle [4], il existe alors une martingale locale $M = (M_t)$ telle que $\Delta M = \beta = \alpha - \Delta A$.

On a donc $\Delta M + \Delta A = \alpha$. Il suffit alors de poser $X = M+A$.

c) Unicité :

Supposons qu'il existe deux semi-martingales $X = M+A$ et $Y = N+B$ appartenant à $\mathcal{S}_p^d$ telles que $\Delta X = \Delta Y = \alpha$. En prenant les projections prévisibles, on obtient :

$$\alpha_o\, I_{\{o\}} + \Delta A = \dot{\widehat{\Delta X}} = \dot{\widehat{\Delta Y}} = \alpha_o\, I_{\{o\}} + \Delta B.$$

Donc, $A = B$. Il en résulte que $M = N$, car ce sont deux martingales locales sommes compensées de sauts ayant mêmes sauts ; donc $X = Y$.

Appelons $X^o = (X^o_t) \in \mathcal{S}^d_p$ cette unique solution de (σ). Il est clair que $X = (X_t) \in \mathcal{S}_p$ est solution de (σ) si et seulement si $X - X^o$ est continue. Donc, $X - X^o \in \mathcal{S}^c$. ∎

2- Définition 2.

Soit $X = (X_t)$ un processus càd-làg adapté. On appelle saut multiplicatif de X en t, toute variable aléatoire $\mathcal{F}_t$-mesurable U_t, s'il en existe, telle que $X_t = X_{t-} U_t$.

Si $X_{t-} = X_t = 0$, la valeur de U_t est indéterminée ; si $X_{t-} = 0 \neq X_t$, U_t n'est pas définie.

Rappelons d'abord que, si $X = (X_t)$ et $H = (H_t)$ sont deux semi-martingales données, alors l'équation différentielle stochastique de C. Doléans - Dade :

$$Z_t = H_t + \int_0^t Z_{s-} \, dX_s$$

admet une solution unique dans $\mathcal{S}$, notée $\varepsilon_H(X)$. Pour son expression explicite, un peu compliquée, nous renvoyons à [6]. Dans le cas où $H = 1$, on note $\varepsilon(X)$ au lieu de $\varepsilon_1(X)$.

On donne maintenant une condition suffisante pour qu'un processus optionnel soit un processus de sauts multiplicatifs d'une semi-martingale spéciale :

Théorème 3 :

Soit $U = (U_t)$ un processus optionnel tel que :

1°) $\left(\sum_{0<s\leq t} (U_s - 1)^2\right)^{1/2}$ soit localement intégrable (alors, $\dot{U}$ existe)

2°) $\sum_{0<s\leq t} |\dot{U}_s - 1| < \infty$, pour tout t fini.

Notons $X = (X_t)$ une semi-martingale spéciale vérifiant $\Delta X = U - 1$.

Alors, une semi-martingale (spéciale) $Z = (Z_t)$ est solution de (σ_m) : $Z = Z_- U$, si, et seulement si $Z = \varepsilon_H(X)$, où $H = (H_t) \in \mathcal{S}^c$.

Démonstration :

D'après le théorème 1 appliqué au processus optionnel $\alpha = U - 1$, il existe $X = (X_t) \in \mathcal{S}_p$ tel que $\Delta X = U - 1$.

Pour tout $Z = (Z_t) \in \mathcal{S}$, on a les équivalences suivantes :

$$
\begin{aligned}
Z = Z_- U &\iff \Delta Z = Z_-(U-1) \\
&\iff \Delta Z = Z_- \Delta X \\
&\iff (Z_t - \int_0^t Z_{s-} dX_s) \in \mathcal{S}^c \\
&\iff Z_t = H_t + \int_0^t Z_{s-} dX_s, \text{ où } H = (H_t) \in \mathcal{S}^c
\end{aligned}
$$

D'où le résultat désiré. ■

Remarques :

1°) Soit $U = (U_t)$ un processus optionnel tel qu'il existe une semi-martingale spéciale $Z = (Z_t)$ solution de (σ_m) : $Z = Z_- U$, et Z ne s'annulant pas. Alors, les conditions 1°) et 2°) du théorème 3 sont vérifiées.

2°) On indique ici comment retrouver la construction faite en [3]:

Soit T un t.a. totalement inaccessible et soit k une v.a. $\mathcal{F}_T$-mesurable, intégrable. Alors, il existe une martingale locale $Z = (Z_t)$ continue en dehors de $[\![T]\!]$, vérifiant $Z_0 = 1$ et $\frac{Z_T}{Z_{T-}} = k$, sur $\{T < \infty\}$.

On pose, en effet, $U_t = 1 + (k-1) I_{[\![T]\!]}(t)$. C'est un processus optionnel vérifiant les conditions du théorème 3, avec de plus $\dot{U} = 1$. Il existe donc une martingale locale purement discontinue unique $X^o = (X^o_t)$ telle que $\Delta X^o = U - 1 = (k-1) I_{[\![T]\!]}$ (théorème de Chou ou de Lépingle).

Il suffit alors de prendre $Z = \varepsilon(X^o)$. ∎

Appendice :

Soit $H = (H_t)$ un processus prévisible. On se propose de caractériser l'ensemble des processus optionnels $U = (U_t)$ admettant H pour projection prévisible. En remplaçant U par $(U-H)$, on se ramène au cas où $H = 0$.

Si l'on fait l'hypothèse : $\left(\sum_{o<s\leq t} U_s^2\right)^{1/2}$ est localement intégrable, la réponse a été donnée par Chou (1) et Lépingle (4) : U est le processus des sauts d'une martingale locale nulle en 0.

Ici, on suppose seulement que U est localement borné dans L^1, ce qui permet de définir sa projection prévisible.

Théorème 4 :

Soit $U = (U_t)$ un processus optionnel, localement borné dans L^1.

Pour que la projection prévisible de U soit nulle, il faut et il suffit qu'il existe une suite de martingales locales nulles en 0 ${}^nQ = ({}^nQ_t)$ et une suite de t.a. $T_k \uparrow +\infty$ telles que : pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout t.a. fini T, $\Delta({}^nQ)_T^{T_k}$ converge dans L^1 vers $U_T^{T_k}$, lorsque n tend vers ∞.

Démonstration :

1°) condition nécessaire :

On suppose, par hypothèse, que $\dot{U} = 0$. Donc, l'ensemble optionnel $\{U \neq 0\} = \{U \neq \dot{U}\}$ est mince. Alors, il existe une suite de t.a. (S_n) de graphes disjoints qui sont soit totalement inaccessibles, soit prévisibles telle que $\{U \neq 0\} \subset \bigcup_n [\![S_n]\!]$.

Quitte à arrêter U, on suppose que U est borné dans L^1. On définit $M_t^n = U_{S_n} I_{\{S_n \leq t\}} - \widetilde{U_{S_n} I_{\{S_n \leq t\}}}$, où le signe $\sim$ désigne la projection duale prévisible d'un processus à variation localement intégrable.

Rappelons en passant que $\widetilde{U_{S_n} I_{\{S_n \leq t\}}}$ est continu ou nul suivant que S_n est totalement inaccessible ou prévisible.

On pose :

$$ {}^{n}Q_t = \sum_{k=1}^{n} M_t^k $$

C'est une suite de martingales uniformément intégrables. Pour tout t.a. fini T, on a :

$$ \Delta^n Q_T = \sum_{k=1}^{n} \Delta M_T^k = \sum_{k=1}^{n} U_{S_k} I_{[\![S_k]\!]}(T) $$

$$ = \sum_{k=1}^{n} U_T I_{[\![S_k]\!]}(T) = U_T I_{\underset{k\leq n}{\bigcup} [\![S_k]\!]}(T) $$

Montrons que $\Delta^n Q_T$ converge dans L^1 vers U_T. On a :

$$ \Delta^n Q_T - U_T = U_T \left(I_{\underset{k\leq n}{\bigcup} [\![S_k]\!]}(T) - 1 \right) $$

Cette suite, que nous appelons α_n, converge presque sûrement vers 0, en effet :

si $(T(\omega),\omega) \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\![S_n]\!]$, alors $U_{T(\omega)}(\omega) = 0$, et $\alpha_n(\omega) = 0$,

si $(T(\omega),\omega) \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [\![S_n]\!]$, alors il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $T(\omega) = S_n(\omega)$ et $\alpha_n(\omega) = 0$.

De plus, on a $|\alpha_n| \leq 2\, |U_T| \in L^1$. Donc, α_n converge vers 0 dans L^1.

2°) <u>condition suffisante</u> :

Quitte à arrêter les processus considérés on peut supposer que U est borné dans L^1 et on peut supprimer les T_k pour alléger les notations.

Pour tout t.a. prévisible fini R, on a :

$$ \dot{U}_R = E\{U_R / \mathcal{F}_{R-}\} = E\{\lim_{L^1} \Delta^n Q_R / \mathcal{F}_{R-}\} $$

$$ = \lim_{L^1} E\{\Delta^n Q_R / \mathcal{F}_{R-}\} = 0 $$

Donc, $\dot{U} = 0$.

BIBLIOGRAPHIE.

(1) C.S. CHOU : Le processus des sauts d'une martingale locale. Sémi. de Proba. XI, Lecture Notes in Math 581 (1975/76).

(2) C. DELLACHERIE & P.A. MEYER : Probabilités et Potentiel. Théorie des martingales (chapitre VI). A paraître chez Hermann.

(3) M. GARCIA, P. MAILLARD & Y. PELTRAUT : Une martingale de saut multiplicatif donné, Sémi. de Proba. XII, Lecture Notes in Math 649 (1976/77).

(4) D. LEPINGLE : Sur la représentation des sauts des martingales, Sémi. de Proba. XI, Lecture Notes in Math 581, (1975/76)

(5) P.A MEYER : Un cours sur les intégrales stochastiques, Sémi. de Proba X, Lect. Notes in Math 511 (1974/75).

(6) CH. YOEURP & M. YOR : Espace orthogonal à une semi-martingale. Application. A paraître au Z. für Wahr.

(7) M. YOR : En cherchant une définition naturelle des intégrales stochastiques optionnelles (dans ce volume).