SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

MICHEL ÉMERY
CHRISTOPHE STRICKER

Démonstration élémentaire d'un résultat d'Azéma et Jeulin

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 13 (1979), p. 116-117
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1979__13__116_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1977/78

DEMONSTRATION ELEMENTAIRE D'UN RESULTAT D'AZEMA ET JEULIN

par M. EMERY et C. STRICKER

Dans [1], Azéma et Jeulin déduisent de la théorie de la mesure de Foellmer le résultat suivant :

<u>Si</u> (X_t) <u>est un potentiel</u>, <u>alors pour tout</u> $h>0$ <u>le potentiel</u> $(E[X_{t+h}|\underline{\underline{F}}_t])$ <u>appartient à la classe</u> (D).

La démonstration par la mesure de Foellmer est tout à fait naturelle, mais un résultat d'allure aussi simple doit admettre une démonstration plus élémentaire. Nous en donnons une, vraiment très simple, que nous adaptons ensuite pour établir un résultat un peu plus général d'Azéma-Jeulin.

1. Pour simplifier les notations, nous prendrons $h=1$. Considérons alors le potentiel discret $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Définissons le processus croissant prévisible (A_n) (à temps discret) par $A_0=0$, $A_{n+1}-A_n = E[X_n-X_{n+1}|\underline{\underline{F}}_n] \geqq 0$. Alors la v.a. A_∞ est intégrable, car $E[A_\infty]=E[\Sigma_n (A_{n+1}-A_n)]=E[X_0]<\infty$, et on a $E[A_\infty-A_k|\underline{\underline{F}}_k] = E[\Sigma_{n\geqq k} (A_{n+1}-A_n)|\underline{\underline{F}}_k] = X_k$. Nous venons de retrouver le résultat bien connu, qu'en temps discret tout potentiel appartient à la classe (D).

Soit maintenant $t\in\mathbb{R}_+$, et soit n le plus petit entier tel que $n\geqq t$ (de sorte que $n\leqq t+1$). On a

$$E[X_{t+1}|\underline{\underline{F}}_t] = E[X_{t+1}|\underline{\underline{F}}_n|\underline{\underline{F}}_t] \leqq E[X_n|\underline{\underline{F}}_t] \leqq E[A_\infty|\underline{\underline{F}}_n|\underline{\underline{F}}_t]$$
$$= E[A_\infty|\underline{\underline{F}}_t]$$

En choisissant des versions continues à droite, on voit que le potentiel $(E[X_{t+1}|\underline{\underline{F}}_t])$ est majoré par une martingale uniformément intégrable. Il appartient donc à la classe (D).

2) Plus généralement, montrons que <u>si</u> T <u>est un temps d'arrêt</u> >0, <u>le potentiel</u> $Y_t=E[X_{T+t}|\underline{\underline{F}}_t]$ <u>appartient à la classe</u> (D).

Nous commençons par vérifier que $E[X_{nT}] \to 0$ lorsque $n\to\infty$. A cet effet nous écrivons

$$E[X_{nT}] = E[X_{nT}I_{\{T<a/n\}}]+E[X_{nT}I_{\{nT\geqq a\}}] \leqq E[X_T I_{\{T<a/n\}}]+E[X_a] .$$

Nous choisissons d'abord a tel que $E[X_a] \leqq \varepsilon$ (X est un potentiel) puis n assez grand pour que $E[X_T I_{\{T<a/n\}}] \leqq \varepsilon$. Alors $E[X_{nT}] \leqq 2\varepsilon$, et le résultat désiré est vérifié.

Le processus (X_{nT}) est donc un potentiel par rapport à la famille $(\underline{\underline{F}}_{nT})$, et il existe donc une v.a. intégrable A_∞ telle que $X_{nT} \leqq E[A_\infty | \underline{\underline{F}}_{nT}]$ pour tout n, comme plus haut. Il nous reste à vérifier que

$$Y_t = E[X_{T+t} | \underline{\underline{F}}_t] \leqq E[A_\infty | \underline{\underline{F}}_t] \quad \text{pour tout } t \ .$$

Il nous suffit de vérifier cela sur chaque ensemble $\{nT \leqq t < (n+1)T\} = H_n$. Or H_n appartient à $\underline{\underline{F}}_{t\wedge(n+1)T}$, et l'on a $T+t \geqq (n+1)T$ sur H_n . Donc

$$Y_t I_{H_n} = E[X_{T+t} I_{H_n} | \underline{\underline{F}}_t] = E[X_{T+t} I_{H_n} | \underline{\underline{F}}_{(n+1)T} | \underline{\underline{F}}_t] \leqq E[X_{(n+1)T} I_{H_n} | \underline{\underline{F}}_t]$$
$$\leqq E[A_\infty I_{H_n} | \underline{\underline{F}}_{(n+1)T} | \underline{\underline{F}}_t] = E[A_\infty | \underline{\underline{F}}_t] I_{H_n} \ . \qquad \square$$

[1]. J. AZEMA et T. JEULIN. Précisions sur la mesure de Foellmer. Ann. Inst. H. Poincaré 12, 1976, p.257-283.