SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CLAUDE DELLACHERIE
PAUL-ANDRÉ MEYER
MARC YOR

Sur certaines propriétés des espaces de Banach H^1 et BMO

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 12 (1978), p. 98-113
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1978__12__98_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1976/77

SUR CERTAINES PROPRIETES DES ESPACES DE BANACH $\underline{\underline{H}}^1$ ET $\underline{\underline{BMO}}$

par C. Dellacherie, P.A. Meyer et M. Yor

Soit $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ un espace probabilisé muni d'une filtration $(\underline{\underline{F}}_t)$ satisfaisant aux conditions habituelles. Nous nous proposons ici d'étudier diverses propriétés de l'espace de Banach $\underline{\underline{H}}^1$ et de son dual $\underline{\underline{BMO}}$: au paragraphe 1, nous caractérisons les parties faiblement compactes de $\underline{\underline{H}}^1$ par une condition d'intégrabilité uniforme des fonctions maximales, et présentons quelques analogies entre la topologie faible $\sigma(\underline{\underline{H}}^1,\underline{\underline{BMO}})$ et la topologie $\sigma(L^1,L^\infty)$. Au paragraphe 2 nous abandonnons l'aspect <<maximal>> de $\underline{\underline{H}}^1$ et transposons les résultats obtenus en termes de variation quadratique ou d'intégrales stochastiques. Au paragraphe 3 enfin, nous examinons le problème de la densité de L^∞ dans $\underline{\underline{BMO}}$, et présentons un exemple instructif.

Cet article est trop probabiliste pour que nous puissions ajouter au titre le nom d'un quatrième <<auteur>> : G. Mokobodzki. Mais c'est à lui que nous devons la démonstration du principal résultat de l'article, l'implication 2)=>3) du théorème 1. Nous lui adressons nos plus vifs remerciements.

§ 1 . PARTIES FAIBLEMENT COMPACTES DE $\underline{\underline{H}}^1$.

NOTATIONS : DIVERS ESPACES DE PROCESSUS ET DE MESURES

Tous les processus considérés ci-dessous sont indexés par $[0,\infty]$, i.e. sont des fonctions sur $[0,\infty]\times\Omega$, et sont supposés mesurables. Nous identifions deux processus qui diffèrent sur un ensemble évanescent.

Si X est un processus, nous posons $X^* = \sup_t |X_t|$.

Nous identifions systématiquement une v.a. intégrable Y à la martingale $Y_t=E[Y|\underline{\underline{F}}_t]$ correspondante (avec $\underline{\underline{F}}_\infty = \underline{\underline{F}}$), dont on choisit une version continue à droite. Ainsi L^1,L^∞ apparaissent comme des espaces de processus.

Nous désignons par $\underline{\underline{B}}^1$ l'espace de Banach des processus X tels que

(1) $$\|X\| = E[X^*] < \infty \text{ , muni de la norme } \|\ \| ,$$

de sorte que le sous-espace de $\underline{\underline{B}}^1$ constitué par les $X\in\underline{\underline{B}}^1$ qui sont des martingales càdlàg. est exactement l'espace $\underline{\underline{H}}^1$ muni de sa norme maximale.

Soit μ une mesure bornée sur $[0,\infty]\times\Omega$, et soit $p(\mu)$ la projection de μ sur Ω ; nous poserons

(2) $$\|\mu\| = \inf\{c>0 : p(|\mu|)\leq cP \}$$

et nous désignerons par $\underline{\underline{M}}^{\infty}$ l'ensemble des μ telles que $[\![\mu]\!]<\infty$, muni de la norme $[\![\ ]\!]$. On peut se représenter $\underline{\underline{M}}^{\infty}$ de manière plus concrète : μ est une mesure bornée qui ne charge pas les évanescents (une P-mesure bornée) et admet donc une représentation

$$<\mu,X> = E[\int_{[0,\infty]} X_s dA_s] \qquad (X \text{ mesurable borné })$$

où A est un processus à variation intégrable (brut) pouvant présenter un saut en 0 et un saut à l'infini (on convient que $A_{0-}=0$). Alors

$$[\![\mu]\!] = \| \int_{[0,\infty]} |dA_s| \|_{L^\infty}$$

Pour abréger le langage, nous dirons indifféremment que μ appartient à $\underline{\underline{M}}^{\infty}$, ou que le processus à variation intégrable A associé à μ appartient à $\underline{\underline{M}}^{\infty}$. Voici un exemple d'élément de $\underline{\underline{M}}^{\infty}$: si S est une application[1] de Ω dans $[0,\infty]$, et f un élément de L^∞, la mesure $f\lambda_S$ définie par

(3) $\qquad <f\lambda_S ,X > = E[fX_S]$

appartient à $\underline{\underline{M}}^{\infty}$, avec $[\![f\lambda_S]\!]=\|f\|_{L^\infty}$.

Rappelons que la mesure μ est dite optionnelle si $\mu(X)=\mu(X^{\sigma})$ pour tout processus borné X (cela revient à dire que le processus associé A est optionnel). Le sous-espace de $\underline{\underline{M}}^{\infty}$ formé des mesures optionnelles est noté $\underline{\underline{M}}^{\infty}_{\sigma}$. Notons le lemme évident :

LEMME 1. <u>Si</u> $X\in\underline{\underline{B}}^1$, $\mu\in\underline{\underline{M}}^{\infty}$, $|X|$ <u>est</u> $|\mu|$-<u>intégrable et l'on a</u>

(4) $\qquad |<\mu,X>| \leq [\![\mu]\!][\![X]\!]$

<u>Plus précisément, si</u> X <u>est un processus quelconque, on a</u>

(5) $\qquad [\![X]\!] = \sup <f\lambda_S,X> \quad (S \text{ quelconque}^2,\ |f|\leq 1 ,\ < |f|\lambda_S,|X|> < \infty)$

<u>et si</u> μ <u>est une P-mesure bornée, on a</u>

(6) $\qquad [\![\mu]\!] = \sup <\mu,X> \quad (X \text{ borné}, E[X^*]\leq 1)$.

DEMONSTRATION. (4) résulte de $E[\int|X_s||dA_s|]\leq E[X^*\int|dA_s|]$; pour (5), supposons pour simplifier que $X^*<\infty$; alors l'ensemble $\{(t,\omega) : |X_t(\omega)| \geq X^*(\omega)-\varepsilon \}$ a des coupes non vides, nous en choisissons une section S, et prenons $f= \mathrm{sgn}(X_S)I_{\{|X_S|<n\}}$; lorsque $n\to\infty$ $<f\lambda_S,X >$ tend vers $E[|X_S|]\geq E[X^*]-\varepsilon$. Enfin , nous laisserons (6) au lecteur, en rappelant simplement que $\underline{\underline{M}}^{\infty}$ est le dual de $\underline{\underline{B}}^1_c$, l'espace des $X\in\underline{\underline{B}}^1$ dont les trajectoires sont continues sur $[0,\infty]$ (voir dans ce volume l'exposé sur les résultats de Baxter-Chacòn).

Nous laissons de côté les considérations générales pour nous intéresser à $\underline{\underline{H}}^1$; nous reviendrons à $\underline{\underline{B}}^1$ dans une digression à la fin du paragraphe.

1. Application signifie application mesurable, ici et dans la suite.
2. On sous entend de même que S est mesurable et positive.

LE THEOREME PRINCIPAL SUR $\underline{\underline{H}}^1$

Rappelons un résultat fondamental (dû indépendamment à C. Herz et D. Lépingle, cf. le séminaire XI, p.465) . Soit $Y \in \underline{\underline{BMO}}$; alors il existe $B \in \underline{\underline{M}}^\infty$, avec $[\![B]\!] \leq c\|Y\|_{BMO}$ tel que[1]

(7) $\qquad Y_\infty = A_\infty$, où A est la projection duale optionnelle de B

et de plus, si X est un élément quelconque de $\underline{\underline{H}}^1$, et (,) désigne la forme bilinéaire mettant en dualité $\underline{\underline{H}}^1$ et $\underline{\underline{BMO}}$, on a

(8) $$(X,Y) = E[\int_{[0,\infty]} X_s dB_s]$$

Inversement, si B appartient à $\underline{\underline{M}}^\infty$, et si A est sa projection duale optionnelle, A_∞ appartient à $\underline{\underline{BMO}}$, avec $\|A_\infty\|_{BMO} \leq c[\![B]\!]$. Autrement dit, la topologie $\sigma(\underline{\underline{H}}^1,\underline{\underline{BMO}})$ est induite sur $\underline{\underline{H}}^1$ par $\sigma(\underline{\underline{B}}^1,\underline{\underline{M}}^\infty)$.

En particulier, en considérant les mesures $f\lambda_S$, on voit que si des $(X^i)_{i\in I}$ $\in \underline{\underline{H}}^1$ convergent vers $X \in \underline{\underline{H}}^1$, suivant un filtre sur I, pour $\sigma(\underline{\underline{H}}^1,\underline{\underline{BMO}})$, les v.a. X^i_S convergent vers X_S pour $\sigma(L^1,L^\infty)$.

Voici le résultat principal de l'exposé :

THEOREME 1. Soit K une partie de $\underline{\underline{H}}^1$. Les propriétés suivantes sont équivalentes

1) K est relativement compacte pour $\sigma(\underline{\underline{H}}^1,\underline{\underline{BMO}})$.
2) De toute suite (X^n) d'éléments de K on peut extraire une suite convergente pour $\sigma(\underline{\underline{H}}^1,\underline{\underline{BMO}})$.
3) L'ensemble des v.a. X^*, X parcourant K, est uniformément intégrable.

Nous commençons par l'implication 3)=>1) . Elle procède de la manière suivante : la condition 3) entraîne que les v.a. X_∞ , où X parcourt K, sont uniformément intégrables. Soit $\bar{K}$ la fermeture de K dans L^1, pour $\sigma(L^1,L^\infty)$, qui est faiblement compacte dans L^1. Nous montrons successivement

i) $\bar{K}$ est bornée dans $\underline{\underline{H}}^1$
ii) $\bar{K}$ satisfait encore à 3)
iii) Sur $\bar{K}$, $\sigma(L^1,L^\infty)=\sigma(\underline{\underline{H}}^1,\underline{\underline{BMO}})$

ce qui entraînera la conclusion cherchée. Nous explicitons les résultats ayant un intérêt propre, en commençant par le lemme suivant, qui entraîne évidemment i) :

LEMME 2. L'application $X \mapsto E[X^*]$ est sci sur L^1 muni de $\sigma(L^1,L^\infty)$.

DEMONSTRATION. Nous allons écrire cette application comme sup d'une famille de formes linéaires continues sur L^1 fort , après quoi l'identité des formes continues sur L^1 fort et faible nous donnera le résultat. Nous

1. Sauf mention du contraire, la norme sur $\underline{\underline{BMO}}$ est la norme $\underline{\underline{BMO}}_2$.

savons d'abord, d'après le lemme 1 , que

$$E[X^*] = \sup_B E[\int_{[0,\infty]} |X_s| dB_s] \quad (B \text{ croissant brut, } B_\infty \leqq 1)$$

Nous pouvons remplacer B par sa projection duale optionnelle A. Nous avons ensuite

$$E[\int_{[0,\infty]} |X_s| dA_s] = \sup_n E[\int_{[0,\infty]} |X_s| dA^n_s]$$

où l'on a posé

$$A^n_s = A_s I_{\{s<T_n\}} + A_{T_n-} I_{\{s\geqq T_n\}} \quad \text{avec } T_n = \inf\{s : A_s>n\}$$

A^n_∞ est borné par n ; utilisant le changement de temps associé à (A^n) on voit que

$$E[\int_{[0,\infty]} |X_s| dA^n_s] = \sup_f E[\int_{[0,\infty]} f_s X_s dA^n_s]$$

f parcourant l'ensemble des processus optionnels tels que $|f|\leqq 1$ (prendre $f_s = \mathrm{sgn}(X_s)$), et que

$$|E[\int_{[0,\infty]} f_s X_s dA^n_s]| \leqq n\|X\|_{L^1} .$$

Nous vérifions ensuite ii). Pour cela, nous remarquons que l'enveloppe convexe de K satisfait encore à 3) ; nous pouvons donc supposer K convexe, et $\bar{K}$ est alors l'adhérence <u>forte</u> de K dans L^1. Enonçons 3) sous la forme

$$\sup_{X\in K} E[X^*]=M < \infty \quad ; \forall\varepsilon>0 \ \exists\eta>0 : P(A)\leqq\eta \Rightarrow \sup_{X\in K} \int_A X^* P \leqq \varepsilon$$

et prenons $X\in\bar{K}$; il existe des $X^n\in K$ tels que $\|X-X^n\|_1 \leqq 2^{-n}$, et alors, d'après l'inégalité de Doob, les trajectoires de X^n convergent p.s. uniformément vers les trajectoires de X, donc $X^*\leqq \liminf_n X^{n*}$. Le lemme de Fatou nous donne alors

$$E[X^*]\leqq M \ , \quad \text{et} \quad \int_A X^* P \leqq \varepsilon \quad \text{si } P(A)\leqq \eta$$

la propriété désirée. Il nous reste enfin iii), qui mérite un énoncé explicite :

LEMME 3. <u>Si des</u> $(X^i)_{i\in I}$ <u>convergent vers</u> X <u>suivant un filtre sur</u> I, <u>pour la topologie</u> $\sigma(L^1,L^\infty)$, <u>et si les</u> X^{i*} <u>sont uniformément intégrables</u>, <u>les</u> X^i <u>convergent vers</u> X <u>pour</u> $\sigma(\underline{\underline{H}}^1,\underline{\underline{BMO}})$.

DEMONSTRATION. On se ramène par différence à montrer que

$$E[\int X^i_s dB_s] \to_i E[\int X_s dB_s] \quad \text{pour tout processus \underline{croissant} brut B tel que } B_\infty \text{ soit borné.}$$

Comme dans le lemme 2, nous pouvons remplacer B par sa projection duale optionnelle A, et introduire les A^n. Nous avons pour tout n

$$E[\int X^i_s dA^n_s] \to_i E[\int X_s dA^n_s]$$

et il nous suffit donc de montrer que

$$E[\int X^i_s(dA_s - dA^n_s)] \to 0 \quad \text{lorsque } n\to\infty \ \underline{\text{uniformément}} \text{ en } i$$

$$E[\int X_s dA^n_s] \to E[\int X_s dA_s]$$

Or nous écrivons $E[\int |X^i_s|(dA_s - dA^n_s)] = E[\int_{[T_n,\infty]} |X^i_s| dA_s] = E[\int_{[T_n,\infty]} |X^i_s| dB_s]$ $\leqq E[X^{i*} B_\infty I_{\{T_n<\infty\}}]$, qui tend vers 0 uniformément en i puisque B_∞ est borné et les X^{i*} sont uniformément intégrables. De même pour le dernier terme dès que l'on a remarqué que $X^* \in L^1$ (lemme 2).

<u>L'implication 1)=>2)</u> est à peu près évidente : sur une partie K faiblement compacte pour $\sigma(\underline{\underline{H}}^1, \underline{\underline{BMO}})$, les topologies $\sigma(\underline{\underline{H}}^1, \underline{\underline{BMO}})$ et $\sigma(L^1, L^\infty)$ coïncident. Or il est classique que de toute suite (X^n) contenue dans une partie compacte pour $\sigma(L^1, L^\infty)$ on peut extraire une suite convergente pour cette topologie.

Reste la partie la plus intéressante, que nous devons à Mokobodzki : <u>l'implication 2)=>3)</u>. Nous suivons la démonstration de Mokobodzki, en la restreignant à notre situation particulière. Il nous faut d'abord un critère commode d'intégrabilité uniforme, que l'on ne trouve pas partout.

LEMME 4. <u>Soit</u> H <u>un ensemble de variables aléatoires intégrables positives, borné dans</u> L^1. <u>Les propriétés suivantes sont équivalentes</u>

1) H <u>est uniformément intégrable</u>.
2) <u>Pour toute suite décroissante</u> $A_n \downarrow \emptyset$, $\lim_n \sup_{X\in H} \int_{A_n} XP = 0$.
3) <u>Pour toute suite d'ensembles</u> B_n <u>disjoints</u> , $\lim_n \sup_{X\in H} \int_{B_n} XP = 0$.

DEMONSTRATION. Il est bien connu que 1)=>2). Inversement, montrons que (non 1))=> (non 2)) . Si H n'est pas uniformément intégrable, il existe un $\varepsilon>0$ et des B_n tels que $P(B_n) \leqq 2^{-n}$, $\sup_{X\in H} \int_{B_n} XP \geqq \varepsilon$. Les B_n ne décroissent pas nécessairement, mais il suffit de prendre $A_n = \cup_{k>n} B_k$ pour obtenir une suite contredisant 2).

La propriété 2) est en apparence beaucoup plus forte que 3), car elle entraîne que $\sup_X \int_{A_n} XP \to 0$ avec $A_n = \cup_n^\infty B_i$. En sens inverse, montrons que (non 2))=>(non 3)) : soit une suite $A_n \downarrow \emptyset$ telle que $\sup_X \int_{A_n} XP$ reste $\geqq 2a > 0$. Choisissons $X_0 \in H$ tel que $\int_{A_0} X_0 P > a$, puis m_0 tel que $\int_{A_0 - A_{m_0}} X_0 P > a$. Puis choisissons $X_1 \in H$ tel que $\int_{A_{m_0+1}} X_1 P > a$, puis

$m_1 > m_0$ tel que $\int_{A_{m_0+1}\setminus A_{m_1}} X_1 P > a$, etc. Si l'on appelle (B_n) la suite $A_0\setminus A_{m_0}$, $A_{m_0+1}\setminus A_{m_1}$, $A_{m_1+1}\setminus A_{m_2}\ldots$ on a $\sup_{X\in H} \int_{B_n} XP \geqq a$ pour tout n, en contradiction avec 3).

Le lemme suivant a aussi son intérêt propre :

LEMME 5. Soit H un ensemble de processus mesurables, tel que $\sup_{X\in H} E[X^*] < \infty$. Supposons que pour toute v.a. positive S les v.a. X_S ($X\in H$) soient uniformément intégrables. Alors les v.a. X^* ($X\in H$) sont uniformément intégrables.

DEMONSTRATION. Supposons que les X^* ($X\in H$) ne soient pas uniformément intégrables. D'après le critère précédent, il existe des ensembles B_n disjoints et des $X^n\in H$ tels que $\int_{B_n} X^{*n}P \geqq 2a>0$. D'après un théorème de section, il existe une v.a. positive S_n définie sur B_n telle que $\int_{B_n} |X^n_{S_n}|P \geqq a$. Soit S une v.a. définie sur Ω, égale à S_n sur B_n pour tout n ; nous avons $\int_{B_n} |X^n_S|P \geqq a$, donc $\sup_{X\in H} \int_{B_n} |X_S|P \geqq a$, et les v.a. X_S ne sont pas uniformément intégrables.

Montrons alors que 2)=>3). Il résulte d'abord du théorème de Banach-Steinhaus que K est borné dans $\underline{\underline{H}}^1$. Ensuite, il résulte du critère classique de Dunford-Pettis que, pour toute v.a. positive S, les X_S ($X\in K$) forment un ensemble relativement compact pour $\sigma(L^1,L^\infty)$, donc uniformément intégrable. On conclut alors par le lemme 5.

Le théorème suivant exprime que $\underline{\underline{H}}^1$ est << séquentiellement complet >>. C'est l'analogue du théorème de Vitali-Hahn-Saks de la théorie de l'intégration.

THEOREME 2. Soit (X^n) une suite d'éléments de $\underline{\underline{H}}^1$, telle que pour tout $Y\in\underline{\underline{BMO}}$ la suite (X^n,Y) admette une limite finie. Alors il existe $X\in\underline{\underline{H}}^1$ tel que $\lim_n X^n=X$ au sens de $\sigma(\underline{\underline{H}}^1,\underline{\underline{BMO}})$.

DEMONSTRATION. D'après le théorème de Banach-Steinhaus, les normes des X^n dans $\underline{\underline{H}}^1$ sont bornées.

La propriété de l'énonce signifie encore que pour toute $\mu\in\underline{\underline{M}}^\infty$, la suite $\langle\mu,X^n\rangle$ admet une limite finie. Prenant μ de la forme $f\lambda_S$, on voit que les X^n_S convergent pour $\sigma(L^1,L^\infty)$, et sont donc uniformément intégrables.

Appliquant le lemme 5, on voit que la suite (X^n) est faiblement compacte dans $\underline{\underline{H}}^1$; elle a au plus une valeur d'adhérence faible, donc elle converge faiblement.

Il est intéressant aussi de disposer d'un critère de compacité faible dans $\underline{\underline{H}}^1$ du type "ε,η" .

THEOREME 3. <u>Soit</u> K <u>une partie de</u> $\underline{\underline{H}}^1$. <u>Pour que</u> K <u>soit faiblement relativement compacte dans</u> $\underline{\underline{H}}^1$, <u>il faut et il suffit qu'elle soit bornée dans</u> $\underline{\underline{H}}^1$ <u>et que</u>

<u>pour tout</u> $\varepsilon>0$, <u>il existe</u> $\eta>0$ <u>tel que l'on ait</u>

$$\sup_{X\in K} E[\int_{[0,\infty]} |X_s|dA_s] \leqq \varepsilon \quad (\text{ ou même simplement } \sup_X |E[\int X_s dA_s]| \leqq \varepsilon)$$

<u>pour tout processus croissant adapté</u> A, <u>engendrant un potentiel gauche borné par</u> 1, <u>et tel que</u> $E[A_\infty] \leqq \eta$.

DEMONSTRATION. Supposons K faiblement relativement compacte. D'après le théorème de Herz-Lépingle, A est projection duale optionnelle d'un processus croissant brut B tel que $B_\infty \leqq c$, et on a $E[B_\infty]=E[A_\infty]$; alors $E[\int|X_s|dA_s]=E[\int|X_s|dB_s] \leqq E[X^*B_\infty] \leqq nE[B_\infty]+c\int_{\{X^*>n\}} X^*P$, et on utilise l'intégrabilité uniforme des X^* pour $X\in K$.

Inversement, supposons cette condition satisfaite, et soit S une v.a. positive quelconque. Soit U un ensemble tel que $P(U)\leqq\eta$. Soit $X\in K$, et soit $V=U\cap\{X\geqq 0\}$; prenant pour A la projection duale optionnelle de $B_t=I_V I_{\{t\geqq S\}}$, notre condition sous la forme affaiblie entraîne $\int_V X_S^+ P \leqq \varepsilon$. Prenant de même $W=U\cap\{X\leqq 0\}$, on a de même $\int_W X_S^- P \leqq \varepsilon$, et enfin $\int_U |X_S| P \leqq \varepsilon$. Les v.a. X_S ($X\in K$) sont donc uniformément intégrables, et le lemme 5 entraîne que K est faiblement compacte.

Une autre conséquence intéressante :

THEOREME 4. <u>Soit</u> (X^n) <u>une suite d'éléments de</u> $\underline{\underline{H}}^1$ <u>qui converge vers</u> 0 <u>pour</u> $\sigma(\underline{\underline{H}}^1,\underline{\underline{BMO}})$. <u>Si cette suite converge vers</u> 0 <u>dans</u> L^1 <u>fort, elle converge vers</u> 0 <u>dans</u> $\underline{\underline{H}}^1$ <u>fort</u>.

(Les X^n tendent vers 0 pour $\sigma(L^1,L^\infty)$; rappelons que X^n_∞ tend vers 0 dans L^1 fort dès que $X^n_\infty \to 0$ en mesure, ou dès que $\liminf_n X^n_\infty \leqq 0$ p.s.. Ces résultats se transposent donc aussitôt à $\underline{\underline{H}}^1$ fort).

DEMONSTRATION. Si $X^n \to 0$ dans L^1 fort, X^{n*} tend vers 0 en probabilité d'après l'inégalité de Doob. D'après le théorème 1, les v.a. X^{n*} sont uniformément intégrables. Donc $E[X^{*n}]\to 0$.

DIGRESSION. Pour un instant, nous quittons la théorie des martingales, et parlons de processus généraux. Il est recommandé d'omettre cette section !

Rappelons d'abord un théorème qui a été démontré en substance dans le séminaire XI, p.109-119. Il est dû à Mokobodzki et très difficile.

Soit (X^n) *une suite de processus optionnels telle que les* X^{n*} *soient uniformément intégrables, et que pour tout t.a.* T *les v.a.* X^n_T *convergent pour* $\sigma(L^1, L^\infty)$. *Alors il existe* X *optionnel tel que* $X^n \to X$ *pour* $\sigma(\underline{\underline{B}}^1, \underline{\underline{M}}^\infty)$.

Il n'est pas question ici de sortir du cas des suites . De plus, le lemme 5, déjà énoncé pour des processus quelconques, constitue une sorte de réciproque.

On peut se demander ensuite ce qui correspond, en termes de processus, au critère de Dunford-Pettis lui même. L'espace $\underline{\underline{B}}^1$ est l'extension naturelle de $\underline{\underline{H}}^1$, quelle sera l'extension de L^1 ? On pense à définir, pour tout processus optionnel X

$$\|X\|_1 = \sup_T E[|X_T|] \text{ , T parcourant l'ensemble des t.a. ,}$$

et à définir Λ^1 comme l'espace des processus optionnels X tels que $\|X\|_1 < \infty$, muni de la norme $\| \ \|_1$. On a une sorte d'inégalité de Doob :

$$\lambda P\{X^* > \lambda\} \leqq \|X\|_1$$

et l'on peut mettre en dualité Λ^1 et $\underline{\underline{M}}^\infty_\sigma$. Une démonstration toute analogue à celle du lemme 2 montre que la norme $[\![\ ]\!]$ est s.c.i. pour $\sigma(\Lambda^1, \underline{\underline{M}}^\infty_\sigma)$ [Il faut seulement se garder des arguments de topologie forte : ici on utilisera le fait que $X \mapsto E[\int X_s f_s dA^n_s]$ est déterminée par un élément de M^∞_σ , et donc est faiblement continue]. Il y a donc quelques analogies entre $\sigma(\Lambda^1, \underline{\underline{M}}^\infty_\sigma)$ et $\sigma(L^1, L^\infty)$, mais une grosse différence : une martingale indexée par $[0,\infty]$, non seulement est bornée dans L^1, mais appartient automatiquement à la classe (D), et il est clair qu'on ne peut espérer une sorte de compacité que pour des ensembles de processus qui appartiennent à la classe (D) de manière uniforme (satisfont au critère de La Vallée Poussin avec une même fonction Φ). On ne sait rien là dessus.

§ 2 . AUTRES ASPECTS DE LA COMPACITE FAIBLE

Il existe d'autres normes sur l'ensemble des martingales locales, équivalentes à la norme $\underline{\underline{H}}^1$. La première est la norme quadratique

(9) $$\|X\|_{\underline{\underline{H}}^1} = E[[X,X]_\infty^{1/2}]$$

(rappelons que la norme maximale est notée $[\![X]\!]$), et d'autre part une norme associée aux intégrales stochastiques

(10) $$\|X\|_{is} = \sup_J \|(J\cdot X)_\infty\|_{L^1}$$

J parcourant l'ensemble des processus prévisibles, bornés par 1 en valeur absolue, et nuls hors d'un ensemble $[0,t]\times\Omega$ ($t\in\mathbb{R}_+$; cette précaution est nécessaire afin que $(J\cdot X)_\infty$ ait un sens, X étant a priori une martingale locale). Nous noterons $\underline{\underline{J}}$ dans la suite l'ensemble de ces processus prévisibles. L'équivalence des normes $\| \|_{\underline{\underline{H}}^1}$ et $\| \|_{is}$ est établie dans le séminaire X, p.372-374 - plus exactement, on montre à cet endroit que

$$c\|X\|_{is} \leqq \|X\|_{\underline{\underline{H}}^1} \leqq c'\|X\|_{is'}$$

où $\|X\|_{is'}$ s'obtient en réduisant $\underline{\underline{J}}$ à l'ensemble $\underline{\underline{J}}'$ des processus de la forme

(11) $J_t = \varepsilon_0 I_{\{0\}} + \varepsilon_1 I_{]0,t_1]} + \varepsilon_2 I_{]t_1,t_2]} + \dots + \varepsilon_n I_{]t_{n-1},t_n]}$

(processus déterministes !) où chacun des ε_i vaut ± 1 . Ces résultats étant rappelés, nous avons les théorèmes suivants :

THEOREME 5. <u>Soit</u> K <u>une partie de</u> $\underline{\underline{H}}^1$. <u>Pour que</u> K <u>soit faiblement relativement compacte pour</u> $\sigma(\underline{\underline{H}}^1,\underline{\underline{BMO}})$, <u>il faut et il suffit que les v.a.</u> $[X,X]_\infty^{1/2}$, <u>où</u> X <u>parcourt</u> K, <u>soient uniformément intégrables</u>.

DEMONSTRATION. Rappelons le critère d'intégrabilité uniforme de La Vallée Poussin : un ensemble $\underline{\underline{U}}$ de v.a. est uniformément intégrable ssi il existe une fonction de Young Φ - c'est à dire une fonction sur $\mathbb{R}_+$, croissante, nulle en 0 et convexe - telle que $\Phi(t)/t \to\infty$ lorsque $t\to\infty$ et que $\sup_{U\in\underline{\underline{U}}} E[\Phi(|U|)]<\infty$. On peut ajouter à ces conditions que Φ est une fonction <u>à croissance modérée</u>. Dans la suite, lorsque nous parlerons d'une "fonction Φ", elle possédera toutes les propriétés indiquées ci-dessus.

Le théorème 5 est alors une conséquence immédiate du théorème 1 et des inégalités de Burkholder-Davis-Gundy

$$cE[\Phi([X,X]_\infty^{1/2})] \leqq E[\Phi(X^*)] \leqq \bar{c}E[\Phi([X,X]_\infty^{1/2})]$$

valables pour toute martingale locale X, où c et $\bar{c}$ dépendent uniquement de la fonction Φ utilisée.

THEOREME 6. <u>Avec les mêmes notations</u>, <u>pour que</u> K <u>soit faiblement relativement compacte</u>, <u>il faut et il suffit que les v.a.</u> $(J\cdot X)_\infty$, <u>où</u> J <u>parcourt</u> $\underline{\underline{J}}$ <u>et</u> X <u>parcourt</u> K, <u>soient uniformément intégrables</u>.

<u>De plus</u>, <u>si cette condition est satisfaite</u>, <u>l'ensemble des</u> J·X <u>est lui aussi faiblement relativement compact</u> (autrement dit, non seulement les $(J.X)_\infty$, mais les $(J.X)^*$, sont uniformément intégrables).

DEMONSTRATION. Supposons K faiblement relativement compacte dans $\underline{\underline{H}}^1$, et choisissons une fonction Φ telle que $\sup_{X\in K} E[\Phi([X,X]_\infty^{1/2})]<\infty$. Soit L l'ensemble des $J\cdot X=Y$, X parcourant K et J parcourant $\underline{\underline{J}}$. Si $Y=J.X$ on a $[Y,Y]\leq [X,X]$, donc $\sup_Y E[\Phi([Y,Y]_\infty^{1/2})]<\infty$; L est donc faiblement relavement compacte dans $\underline{\underline{H}}^1$, d'après le théorème 5, les v.a. Y^* sont donc uniformément intégrables, et il en est de même a fortiori des v.a. $Y_\infty = (J\cdot X)_\infty$.

Inversement, supposons que les v.a. $(J\cdot X)_\infty$ soient uniformément intégrables, X parcourant K et J parcourant seulement $\underline{\underline{J}}'$ (11). Soit une fonction Φ telle que

$$(12)\qquad \sup_{J\in\underline{\underline{J}}',X\in K} E[\Phi(|(J\cdot X)_\infty|)] \leqq M < \infty$$

Laissons X fixe, et laissons également fixe la subdivision (t_i) de la formule (11), mais prenons $\varepsilon_i = r_i(s)$, où s parcourt l'intervalle $[0,1]$, et $r_0,\dots,r_n$ sont des fonctions de Rademacher (autrement dit, sont les tirages successifs de +1 ou -1 au jeu de pile ou face). Intégrant (12) par rapport à s, et appliquant le lemme de Khintchine

$$c\Phi((\Sigma_0^n a_i^2)^{1/2}) \leqq \int_0^1 \Phi(|\Sigma_0^n r_i(s)a_i|)ds \leqq \bar{c}\Phi((\Sigma_0^n a_i^2)^{1/2})$$

nous obtenons[1]

$$E[\ \Phi(\ (X_0^2 + \Sigma_1^n (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2)^{1/2}] \leqq M/c < \infty$$

et par convergence en probabilité, lorsque les subdivisions deviennent arbitrairement fines

$$E[\ \Phi([X,X]_\infty^{1/2})\ ] \leqq M/c$$

autrement dit, cette borne étant indépendante de $X\in K$, les v.a. $[X,X]_\infty^{1/2}$ sont uniformément intégrables, et K est relativement compacte pour $\sigma(\underline{\underline{H}}^1,\underline{\underline{BMO}})$ d'après le théorème 5.

Nous utilisons la variation quadratique pour préciser d'une autre manière les résultats du paragraphe 1. Soient des X^n convergeant vers X pour $\sigma(\underline{\underline{H}}^1,\underline{\underline{BMO}})$, et soit $Y\in\underline{\underline{BMO}}$; par définition de la convergence faible, nous avons que $(X^n,Y)=E[[X^n,Y]_\infty]$ converge vers $(X,Y)=E[[X,Y]_\infty]$. On a en fait un bien meilleur résultat (où l'on pourrait d'ailleurs remplacer les suites par des filtres quelconques) :

THEOREME 7. <u>Soient des</u> X^n <u>convergeant vers</u> X <u>pour</u> $\sigma(\underline{\underline{H}}^1,\underline{\underline{BMO}})$, <u>et soit</u> $Y\in\underline{\underline{BMO}}$. <u>Alors les v.a.</u> $[X^n,Y]_\infty$ <u>convergent vers</u> $[X,Y]_\infty$ <u>pour</u> $\sigma(L^1,L^\infty)$.

DEMONSTRATION. Il s'agit de montrer que pour toute martingale bornée H

1. Cette forme du lemme de Khintchine n'étant pas entièrement classique, démontrons l'inégalité de gauche - celle dont nous avons besoin. Par convexité

$$\int\Phi(|\Sigma r_i(s)a_i|)ds \geqq \Phi(\int|\Sigma r_i(s)a_i|ds)$$
$$\geqq \Phi(\gamma(\Sigma a_i^2)^{1/2}) \quad \text{lemme de K. classique et croissance de } \Phi,$$
$$\geqq c\Phi((\Sigma a_i^2)^{1/2}) \quad \Phi \text{ à croissance modérée .} \ \square$$

De plus, on a pour tout processus mesurable borné H

$$\lim_n E[\int_0^\infty H_s d[X^n,Y]_s] = E[\int_0^\infty H_s d[X,Y]_s] .$$

DEMONSTRATION. Le premier résultat découle immédiatement du second, en prenant un processus de la forme $H_s(\omega)=Z(\omega)$, où Z appartient à L^∞.

Pour établir le second résultat, nous pouvons (quitte à remplacer H par sa projection optionnelle) supposer H optionnel borné. D'après une remarque de M. Pratelli (Séminaire X, p. 353), l'intégrale stochastique optionnelle $H.Y=U$ appartient à $\underline{\underline{BMO}}$. Si donc nous pouvons écrire

$$E[\int H_s d[X^n,Y]_s] = E[[X^n,U]_\infty] \quad ; \quad E[\int H_s d[X,Y]_s]=E[[X,U]_\infty]$$

le théorème sera établi. Autrement dit, il nous faut prouver

LEMME. Si X appartient à $\underline{\underline{H}}^1$, Y à $\underline{\underline{BMO}}$, et H est optionnel borné

$$E[\int H_s d[X,Y]_s] = E[[X, H.Y]_\infty]$$

DEMONSTRATION. L'égalité est évidente lorsque X est une martingale bornée. En effet, d'après la définition des intégrales optionnelles, $H.[X,Y]=[X,H.Y]$ est alors une martingale locale nulle en 0, et on vérifie aussitôt qu'elle est dominée dans L^1. Ensuite, on utilise le fait que L^∞ est dense dans $\underline{\underline{H}}^1$ (séminaire X, bas de la page 339) pour prolonger l'égalité à $\underline{\underline{H}}^1$ tout entier, les deux côtés étant des formes linéaires continues sur $\underline{\underline{H}}^1$: le côté gauche en vertu de l'inégalité de Fefferman, le côté droit du fait que $H.Y\in\underline{\underline{BMO}}$.

Le théorème 7 mérite un commentaire. Soit $\underline{\underline{B}}^\infty$ l'espace des processus (bruts) bornés, et soit $\underline{\underline{C}}^\infty$ le sous espace constitué par les processus à trajectoires continues. Soit $\underline{\underline{M}}^1$ l'espace des P-mesures sur $[0,\infty]\times\Omega$(1). Une mesure $\mu\in\underline{\underline{M}}^1$ admet la représentation $\mu(H)=E[\int_{[0,\infty]} H_s dA_s]$, où A est un processus à variation intégrable. Le théorème 6 de l'exposé sur les travaux de Baxter-Chacòn (dans ce volume) peut s'énoncer ainsi :

Soit L une partie de $\underline{\underline{M}}^1$ telle que les v.a. $\int|dA_s|$, pour $A\in L$, soient uniformément intégrables ; alors L est relativement compacte pour $\sigma(\underline{\underline{M}}^1,\underline{\underline{C}}^\infty)$.

On peut conjecturer que cela caractérise les parties faiblement compactes de $\underline{\underline{M}}^1$ pour la dualité avec $\underline{\underline{C}}^\infty$. Ici, les v.a. $\int|d[X^n,Y]_s|$ seraient

(1) Au § 1 nous avions $\underline{\underline{B}}^1$ et $\underline{\underline{M}}^\infty$, ici $\underline{\underline{B}}^\infty$ et $\underline{\underline{M}}^1$.

elles uniformément intégrables ? On a un résultat beaucoup plus fort.

THEOREME 8. L'ensemble des v.a. $\int_{[0,\infty]} |d[X,Y]_s|$, où X parcourt une partie K faiblement compacte de $\underline{\underline{H}}^1$, Y la boule unité de $\underline{\underline{BMO}}$, est uniformément intégrable .

DEMONSTRATION. Nous prenons une fonction Φ modérée telle que $E[\Phi(X^*)]$ (ou $E[\Phi([X,X]_\infty^{1/2})]$) reste borné pour $X\in K$, et nous désignons par Ψ la fonction de Young conjuguée de Φ (non nécessairement modérée). Comme Ψ est nulle en 0, $\Psi(t)/t$ est une fonction croissante de t admettant une limite finie en 0, et la fonction $\overline{\Psi}(u)= u\int_0^u \frac{\Psi'(s)}{s}\,ds$ est une fonction de Young, dont on désignera par $\overline{\Phi}$ la fonction conjuguée. Nous allons montrer que

$$\sup_{X\in K,\ \|Y\|_{\underline{\underline{BMO}}}\leq 1} \| \int |d[X,Y]_s| \|_{L^{\overline{\Phi}}} < \infty$$

et pour cela il suffit de montrer que, pour toute v.a. bornée Z que $\|Z\|_{L^{\overline{\Psi}}} \leq 1$, tout X et tout Y comme ci-dessus, on a

$$E[Z\int_0^\infty |d[X,Y]_s|] \leq M < \infty$$

Introduisons la martingale bornée $Z_s=E[Z|\underline{\underline{F}}_s]$, le processus optionnel (H_s) borné par 1 tel que $|d[X,Y]_s|= H_s d[X,Y]_s$; l'espérance précédente s'écrit $E[[(ZH)\cdot X,Y]_\infty]$, et d'après l'inégalité de Fefferman elle est majorée en valeur absolue par $\|(ZH)\cdot X\|_{\underline{\underline{H}}^1} \|Y\|_{\underline{\underline{BMO}}}$. La dernière norme étant majorée par 1, il nous reste à majorer (sém.X p.343, (19.4))

$$E[(\int Z_s^2H_s^2\, d[X,X]_s)^{1/2}] \leq E[Z^*[X,X]_\infty^{1/2}] \leq 2\|Z^*\|_{L^\Psi} \|[X,X]_\infty^{1/2}\|_{L^\Phi}$$

(Neveu, martingales en temps discret, proposition IX.2.2 p. 196). Cette dernière norme est bornée d'après l'hypothèse faite sur Φ , et il nous reste simplement à montrer que $\| Z^*\|_{L^\Psi}$ est borné. Or la démonstration de l'inégalité de Doob telle qu'elle figure dans Meyer, Martingales and stochastic integrals I , p. 29 (formule (10.2)) nous dit que

$$E[\Psi(\frac{Z^*}{2})] \leq E[Z\int_0^Z \frac{\Psi'(s)}{s}ds] = E[\overline{\Psi}(Z)] \leq 1$$

et cela signifie que $\|Z^*\|_{L^\Psi} \leq 2$.

Nous conclurons ce paragraphe sur un résultat incomplet (voir le commentaire suivant la démonstration).

THEOREME 9. Soit (X^n) une suite d'éléments de $\underline{\underline{H}}^1$. Supposons que pour tout processus prévisible borné J les v.a. $(J\cdot X^n)_\infty$ convergent pour $\sigma(L^1,L^\infty)$. Alors la suite (X^n) est bornée dans $\underline{\underline{H}}^1$, et il existe $X\in\underline{\underline{H}}^1$ tel que

(15) Pour tout J prévisible borné, $(J\cdot X^n)_\infty \to (J\cdot X)_\infty$ pour $\sigma(L^1,L^\infty)$.

DEMONSTRATION. Tout d'abord, il existe $X \in L^1$ tel que $X^n \to X$ pour $\sigma(L^1, L^\infty)$ (prendre $J=1$), et on a

$$(J \cdot X^n)_\infty \to (J \cdot X)_\infty \quad \text{pour tout processus prévisible } \underline{\text{élémentaire}}\ J^{(1)}.$$

Considérons l'espace de Banach $b(\mathcal{P})$ des processus prévisibles bornés, avec la norme uniforme. Pour tout n, soit T_n l'opérateur de $b(\mathcal{P})$ dans L^1

$$T_n(J) = (J \cdot X^n)_\infty$$

La norme de T_n est égale à $\sup_{J \in \underline{\underline{J}}} \|(J \cdot X^n)_\infty\|_{L^1} = \|X^n\|_{is}$ (notations du début du paragraphe 2), elle est équivalente à $\|X^n\|_{\underline{\underline{H}}^1}$. D'autre part, pour tout J fixé, $\|T_n(J)\|_{L^1}$ reste borné ; d'après le théorème de Banach-Steinhaus, $\|T_n\|$ reste borné, et cela signifie que la suite (X^n) est bornée dans $\underline{\underline{H}}^1$. D'après le lemme 2, on a $X \in \underline{\underline{H}}^1$.

Fixons $A \in \underline{\underline{F}}$ et posons

$$\mu_n(J) = \int_A (J \cdot X^n)_\infty P \qquad\qquad \mu(J) = \int_A (J \cdot X)_\infty P$$

mesure signée bornée sur la tribu prévisible. Par hypothèse, $\mu_n(J)$ a une limite $\lambda(J)$ lorsque $n \to \infty$; d'après le théorème de Vitali-Hahn-Saks, λ est une mesure. Or on a $\lambda(J)=\mu(J)$ pour tout processus prévisible élémentaire ; il en résulte que $\lambda=\mu$, et (15) est établi.

COMMENTAIRE. Il est tout naturel de se demander si les X^n tendent vers X pour $\sigma(\underline{\underline{H}}^1, \underline{\underline{BMO}})$. Or (15) équivaut à dire que

$$(X^n, Z) \to (X, Z) \text{ pour } Z \in \underline{\underline{Z}} = \{ J \cdot Y \mid J \in \underline{\underline{J}} ,\ \|Y\|_{L^\infty} \leq 1 \}$$

On se retrouve donc en face d'un problème posé dans le séminaire X, p. 394, et faussement résolu dans le séminaire XI, p.476 (voir les errata de ce volume). Si l'on savait que tout élément de la boule unité de $\underline{\underline{BMO}}$ admet une représentation intégrale

$$Y = \int_{\underline{\underline{Z}}} Z \mu(dZ)$$

où μ est une mesure bornée sur $\underline{\underline{Z}}$ (pour la structure mesurable sur $\underline{\underline{Z}}$ associée aux applications $Z \mapsto (Z, U)$, $U \in \underline{\underline{H}}^1$), le théorème de convergence dominée nous permettrait de conclure. La réponse serait positive a fortiori si l'on savait que Y admet une représentation

$$Y = \Sigma_n \lambda_n Z_n \ , \ Z_n \in \underline{\underline{Z}} \ , \ \Sigma_n |\lambda_n| < \infty$$

mais on ne sait rien sur ces questions .

1. J est élémentaire s'il est combinaison linéaire finie de processus de la forme $H(\omega) I_{\{0\}}(t)$ (H $\underline{\underline{F}}_0$-mes. bornée) ou $H(\omega) I_{]u,v]}(t)$ ($u<v<\infty$, H $\underline{\underline{F}}_u$-mesurable bornée).

REMARQUE. Le théorème 9 peut être considéré comme un résultat de convergence de certaines bimesures $\lambda(A,J)$, A parcourant $\underline{\underline{F}}$ et J parcourant la tribu prévisible $\mathcal{P}$ (ou par extension l'espace $b(\mathcal{P})$ des processus prévisibles bornés). A cet égard, on peut noter le théorème suivant, que nous ne démontrerons pas :

Pour qu'une fonction $(A,J)\mapsto\lambda(A,J)$ soit de la forme $\int_A (J\cdot X)_\infty P$, où X appartient à $\underline{\underline{H}}^1$, il faut et il suffit que

1) Pour A fixé, $\lambda(A,.)$ soit une mesure bornée sur $\mathcal{P}$.
2) Pour J fixé, $\lambda(.,J)$ soit une mesure bornée sur $\underline{\underline{F}}$, absolument continue par rapport à P (il suffit même de supposer cette continuité absolue pour $\lambda(.,1)$ seulement).
3) Pour tout t.a. T , $\lambda(A,\ [0,T])=\lambda(E[1_A|\underline{\underline{F}}_T],1)$
4) Pour tout $A\in\underline{\underline{F}}_T$ $\lambda(A,J) = \lambda(A,JI_{[0,T[})$.

§ 3. SUR LA DENSITE DE L^∞ DANS $\underline{\underline{BMO}}$.

Nous commençons par quelques résultats positifs :

LEMME 6. Soit $X\in\underline{\underline{BMO}}$. Pour toute suite de t.a. $T_n\uparrow\infty$, X^{T_n} tend vers X pour la topologie faible $\sigma(\underline{\underline{H}}^1,\underline{\underline{BMO}})$.

DEMONSTRATION. Soit $Y\in\underline{\underline{H}}^1$; alors $(X^{T_n},Y) = (X,Y^{T_n})$, et il suffit de remarquer que Y^{T_n} converge vers Y dans $\underline{\underline{H}}^1$ fort.

COROLLAIRE. Soit β la boule unité de $\underline{\underline{BMO}}$. Alors $\beta\cap L^\infty$ est dense dans β pour $\sigma(\underline{\underline{BMO}},\underline{\underline{H}}^1)$ [1].

DEMONSTRATION. Si $X\in\beta$, on choisit les $T_n=\inf\{t:|X_t|\geq n\}$; X étant à sauts bornés, X^{T_n} appartient à $\beta\cap L^\infty$, et on applique le lemme 6.

LEMME 7. Soit $X\in L^1$. Alors la norme (non nécessairement finie)

$$[\![X]\!] = \sup_{Y\in\beta\cap L^\infty} E[X_\infty Y_\infty]$$

est équivalente à la norme $\|X\|_{\underline{\underline{H}}^1}$.

DEMONSTRATION. Si $X\in\underline{\underline{H}}^1$, on a d'après le corollaire précédent $[\![X]\!]=\sup_{Y\in\beta}(X,Y)$, et la dualité entre $\underline{\underline{H}}^1$ et $\underline{\underline{BMO}}$ entraîne que $\frac{1}{c}\|X\|_{\underline{\underline{H}}^1}\leq [\![X]\!]\leq c\|X\|_{\underline{\underline{H}}^1}$ pour un c convenable. Il reste à montrer que si $X\notin\underline{\underline{H}}^1$ on a $[\![X]\!]=\infty$. Choisissons des $T_n\uparrow\infty$ tels que $X^{T_n}\in\underline{\underline{H}}^1$; on a $[\![X^{T_n}]\!]\geq\frac{1}{c}\|X^{T_n}\|_{\underline{\underline{H}}^1}$ qui tend vers l'infini. Il ne reste plus qu'à remarquer que la norme $[\![\ ]\!]$ est diminuée par arrêt.

COROLLAIRE. Soit $X\in L^1$. La forme linéaire sur L^∞ $Y\mapsto E[X_\infty Y_\infty]$ admet un prolongement continu à $\underline{\underline{BMO}}$ si et seulement si X appartient à $\underline{\underline{H}}^1$.

(Nous verrons dans un instant que ce prolongement n'est pas unique,

1. Si la norme sur $\underline{\underline{BMO}}$ est diminuée par arrêt (c'est vrai pour $\underline{\underline{BMO}}_2$) .

L^∞ n'étant pas fortement dense dans $\underline{\underline{BMO}}$; le prolongement $Y \mapsto (X,Y)$ est caractérisé par le fait d'être continu pour $\sigma(\underline{\underline{BMO}},\underline{\underline{H}}^1)$... c'est une belle trivialité).

Voici les résultats négatifs ; ils sont moins évidents que ceux que l'on vient de donner !

THEOREME 10. <u>Si</u> L^∞ <u>et</u> $\underline{\underline{BMO}}$ <u>sont distincts</u>, L^∞ <u>n'est ni fortement fermé ni fortement dense dans</u> $\underline{\underline{BMO}}$.

DEMONSTRATION. a) Supposons L^∞ fortement dense dans $\underline{\underline{BMO}}$, et montrons que $\underline{\underline{H}}^1=L^1$. $\underline{\underline{H}}^1$ étant dense dans L^1, il nous suffit de montrer que les deux normes sont équivalentes sur $\underline{\underline{H}}^1$, ou encore que toute suite (X^n) d'éléments de $\underline{\underline{H}}^1$ qui converge vers 0 dans L^1 fort converge vers 0 dans $\underline{\underline{H}}^1$. Soit $\overline{X}^n= X^n$ si $\|X^n\|_{\underline{\underline{H}}^1}\leq 1$, $X^n/\|X^n\|_{\underline{\underline{H}}^1}$ si $\|X^n\|_{\underline{\underline{H}}^1}>1$; la suite $(\overline{X}^n)$ est bornée dans $\underline{\underline{H}}^1$ et converge vers 0 dans L^1, et il nous suffit de montrer que $\overline{X}^n \rightarrow 0$ dans $\underline{\underline{H}}^1$; autrement dit, il nous suffit de traiter le cas où la suite (X^n) est bornée dans $\underline{\underline{H}}^1$. Mais alors, la suite X^n convergeant vers 0 pour $\sigma(L^1,L^\infty)$ et L^∞ étant fortement dense dans $\underline{\underline{BMO}}$, X^n converge vers 0 pour $\sigma(\underline{\underline{H}}^1,\underline{\underline{BMO}})$, et le théorème 4 nous dit qu'elle converge vers 0 dans $\underline{\underline{H}}^1$.

b) Supposons L^∞ fortement fermé dans $\underline{\underline{BMO}}$. Alors la norme $\underline{\underline{BMO}}$ est équivalente sur L^∞ à la norme L^∞ (th. du graphe fermé), et la norme $\|\ \|$ du lemme 7 est donc équivalente à la norme L^1. D'après le lemme 7 on a $\underline{\underline{H}}^1=L^1$ avec une norme équivalente, et enfin $L^\infty=\underline{\underline{BMO}}$ par dualité.

ETUDE D'UN EXEMPLE SIMPLE

Nous prenons pour $(\Omega,\underline{\underline{F}}^\circ)$ l'intervalle $]0,1[$ muni de sa tribu borélienne, et pour loi P la mesure de Lebesgue. Sur Ω nous désignons par $(\underline{\underline{F}}^\circ_t)$ la plus petite famille de tribus continue à droite pour laquelle la v.a.

$$S(w) = 1-w \qquad w\in]0,1[$$

est un temps d'arrêt . Rien n'est plus facile que d'expliciter $\underline{\underline{F}}^\circ_t$: elle est engendrée par les boréliens de $[1-t,1[$ et par l'atome $]0,1-t[$. On a $\underline{\underline{F}}^\circ_1=\underline{\underline{F}}^\circ_{1-}=\underline{\underline{F}}^\circ$, donc il est inutile de considérer les temps ≥ 1. L'omission du $^\circ$ signifie que l'on a complété pour la mesure de Lebesgue et adjoint les ensembles négligeables, comme d'habitude.

Soit X une variable aléatoire intégrable sur Ω . Associons lui la v.a. sur Ω $\quad MX(w) = \frac{1}{w}\int_0^w X(u)du \quad$ de sorte que $MX(1)=E[X]$

La martingale X_t est alors très facile à expliciter :

(16) $\quad X_t(w) = MX(1-t)I_{\{t<S(w)\}} + X(w)I_{\{t\geq S(w)\}}$ noter que $MX=X_{S-}$

d'où quelques calculs

$$(17) \qquad [X,X]_\infty = X_0^2 + \Delta X_S^2 = E[X]^2 + (X-MX)^2$$

$$(18) \qquad X^*(w) = |X(w)| \vee \sup_{t>w}|MX(t)|$$

L'appartenance à $\underline{\underline{H}}^1$ de $X \in L^1$ équivaut d'après (17) à l'intégrabilité de $|X-MX|$, donc de MX (ou encore, de X_{S-}). Il n'est nullement évident que cela entraîne l'intégrabilité de X^*!

L'appartenance de X à $\underline{\underline{BMO}}$ entraîne que le saut de X à l'instant S est borné. Mais inversement cette condition entraîne ici que $[X,X]_\infty$ est borné, donc que X appartient à $\underline{\underline{BMO}}$. Nous avons donc

$$\underline{\underline{BMO}} = \{ X \in L^1 : X-MX \in L^\infty \}$$

avec pour norme $E[|X|]+\|X-MX\|_\infty$. Il est très intéressant de noter que $\underline{\underline{BMO}}$ est ici identique à l'espace $\underline{\underline{H}}^\infty$ des martingales X telles que $[X,X]_\infty$ appartienne à L^∞ ; cet espace peut donc être dense dans $\underline{\underline{BMO}}$ dans des cas non triviaux (au contraire de L^∞), et il est possible qu'il soit toujours dense dans $\underline{\underline{BMO}}$.

La fonction $X(w)=\log w$ appartient à $\underline{\underline{BMO}}$ avec $X-MX=1$. Si elle est approchable dans $\underline{\underline{BMO}}$ par des éléments de L^∞, il existe $Y \in L^\infty$ tel que la fonction $Y-MY$ soit comprise entre $1-\varepsilon$ et $1+\varepsilon$ p.p.. Or la fonction $Z=MY$ est continue, bornée sur $]0,1[$ puisque Y et Y-MY sont bornées p.p., et d'autre part elle est absolument continue avec une dérivée égale p.p. à

$$Z'(w) = \frac{Y(w)-MY(w)}{w} \geqq \frac{1-\varepsilon}{w}$$

ce qui lui impose une croissance logarithmique en 0. Le tout est donc absurde, et X n'appartient pas à l'adhérence de L^∞ dans $\underline{\underline{BMO}}$.