Thierry Jeulin

Marc Yor

Grossissement d’une filtration et semi-martingales : formules explicites

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 12 (1978), p. 78-97

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1978__12__78_0>

GROSSISSEMENT D'UNE FILTRATION ET SEMI-MARTINGALES : FORMULES EXPLICITES.

par T. JEULIN et M. YOR

1) Introduction.

Rappelons le cadre d'une partie de l'étude faite en [7] : $(\Omega, \underline{\underline{F}}, P)$ est un espace probabilisé complet, $(\underline{\underline{F}}_t)_{t \geqslant 0}$ une filtration croissante de sous-tribus de $\underline{\underline{F}}$, vérifiant les conditions habituelles, et $L : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ une variable aléatoire que l'on suppose <u>honnête</u>, i.e. L est la fin d'un ensemble $(\underline{\underline{F}}_t)$-optionnel.

On note $\underline{\underline{G}}_\infty$ la tribu engendrée par $\underline{\underline{F}}_\infty$ et L , et pour tout t,

$$\underline{\underline{G}}_t = \left(A \in \underline{\underline{G}}_\infty \ , \ \exists\, A_t \ , A'_t \in \underline{\underline{F}}_t \ \text{ et } \ A = \left\{ A_t \cap (t < L) \right\} \cup \left\{ A'_t \cap (L \leqslant t) \right\} \right)$$

(attention, en [7] , cette filtration était notée $(\underline{\underline{H}}_t)$).

On a montré en [7] que, si X est une $(\underline{\underline{F}}_t)$-semi-martingale, c'est encore une $(\underline{\underline{G}}_t)$-semi-martingale. X étant une $(\underline{\underline{F}}_t)$-martingale locale, on va donner ici la décomposition canonique de la $(\underline{\underline{G}}_t)$-semi-martingale spéciale X, comme somme d'une $(\underline{\underline{G}}_t)$-martingale locale et d'un processus $(\underline{\underline{G}}_t)$-prévisible à variation bornée.

Précisons, de plus, que l'étude faite ici est indépendante de celle faite en [7] , et constitue, en particulier, une nouvelle démonstration du résultat de [7] mentionné ci-dessus.

L'origine du présent travail a été la lecture de l'article [2] de M. BARLOW*, qui construit explicitement, à partir d'une famille de $(\underline{\underline{F}}_t)$-martingales engendrant l'espace des $(\underline{\underline{F}}_t)$-martingales de carré intégrable, une famille de $(\underline{\underline{G}}_t)$-martingales engendrant l'espace des $(\underline{\underline{G}}_t)$-martingales de carré intégrable.

2) Rappels et préliminaires.

On ne fait pour l'instant aucune hypothèse sur L. On note $\tilde{Z}$ (resp. Z) la projection $\underline{\underline{F}}_t$-optionnelle de $1_{[\![0,L]\!]}$ (resp. $1_{[\![0,L[\![}$).

$\tilde{Z}$ est une surmartingale forte régulière; comme en [7], on note $Z = M - A$ la décomposition canonique de la surmartingale continue à droite Z :

A est le processus croissant $(\underline{\underline{F}}_t)$-prévisible intégrable engendrant Z,

$M_t = E\left(A_\infty \mid \underline{\underline{F}}_t\right)$.

Remarquons que $\tilde{Z}_+ = Z$, $\tilde{Z}_- = Z_- = {}^p\tilde{Z}$;

(on note ${}^pH$ la projection $(\underline{\underline{F}}_t)$-prévisible du processus H ; ${}^pZ$ sera notée $\dot{Z}$).

En outre, on a les relations

(1) $Z - \dot{Z} = \Delta M$ (2) $\dot{Z} + \Delta A = Z_-$.

On notera encore $\tilde{L}$ (resp. L^-) la fin de l'ensemble optionnel (resp. prévisible) $(\tilde{Z} = 1)$ (resp. $(Z_- = 1)$), et on dira qu'un ensemble aléatoire $H \subset \Omega \times \mathbb{R}_+$ est à gauche de L si H est inclus dans $[\![0,L]\!]$.

---

* Voir aussi la remarque 3), en fin du paragraphe 4, pour de nouveaux résultats de M. BARLOW, très voisins de ceux présentés ici.

On a alors la :

<u>Proposition 1</u> : <u>on a toujours</u> $L^- \leqslant \tilde{L} \leqslant L$ <u>et</u>

a) L <u>est la fin d'un ensemble optionnel si, et seulement si</u>, $\tilde{L} = L$ <u>p.s.</u> (<u>ce qui est aussi équivalent à</u> $\tilde{Z}_L = 1$).

b) L <u>est la fin d'un ensemble</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$-<u>prévisible si, et seulement si</u>, $L^- = L$ <u>p.s. (ce qui est encore équivalent à</u> $(Z_-)_L = 1$).

<u>Démonstration</u>: l'inégalité $L^- \leqslant L$ et le point b) ont été démontrés en [1] par AZEMA.

En particulier, l'ensemble ($Z_- = 1$) est à gauche de L , d'où

$$1_{(Z_- = 1)} \leqslant \tilde{Z} \quad \text{et} \quad (Z_- = 1) \text{ est inclus dans } (\tilde{Z} = 1)\ ;$$

On a alors facilement $L^- \leqslant \tilde{L}$ et $\tilde{Z}_{\tilde{L}} = 1$.

Considérons alors la mesure m sur $\Omega \times \mathbb{R}_+$ définie par

$$m(H) = E({}^oH_{\tilde{L}}) \qquad ({}^oH : \text{projection } (\underline{\underline{F}}_t)\text{-optionnelle de } H),$$

et le processus croissant $(\underline{\underline{F}}_t)$-adapté B associé. Le support du processus croissant B contient le graphe de $\tilde{L}$, par définition de la mesure m; de plus

$$m(\llbracket 0,L \rrbracket) = E(\tilde{Z}_{\tilde{L}}) = 1\ ;$$

B ne croît donc plus après L , d'où $\tilde{L} \leqslant L$.

On en déduit alors facilement que ($\tilde{Z} = 1$) est le plus grand fermé optionnel à gauche de L ; en particulier, $\tilde{Z}_{\tilde{L}}$ vaut 1 , d'où l'équivalence des conditions $\tilde{L} = L$ et $\tilde{Z}_L = 1$, et le point a) .

<u>Remarques</u> :

a) d'après (2), ($\dot{Z}_L = 1$) est égal à ($Z_{L-} = 1$) $\cap$ ($\Delta A_L = 0$).

Or $E(\Delta A_L) = E(\sum_s (\Delta A_s)^2)$.

$P(\dot{Z}_L = 1) = 1$ veut donc dire : L est fin d'un ensemble $(\underline{\underline{F}}_t)$-prévisible et la surmartingale Z est régulière.

b) on a $0 \leqslant \tilde{Z} - Z = {}^o(1_{[\![L]\!]})$ d'où

$${}^o(1_{(Z_L = 1)} 1_{[\![L]\!]}) = 1_{(Z = 1)} (\tilde{Z} - Z) = 0 .$$

En outre, les ensembles $(Z \neq Z_-)$ et $(\tilde{Z} \neq Z)$ étant optionnels minces, $(Z_L = 1)$ est inclus dans $(Z_{L-} = Z_L = \tilde{Z}_L = 1)$.

En particulier, si $P(Z_L = 1) = 1$, L est fin d'un ensemble $(\underline{\underline{F}}_t)$-prévisible et les conclusions du a) s'appliquent.

c) si on ne fait aucune hypothèse sur L, on introduit la filtration $(\underline{\underline{G}}_t^-)$ définie par :

$$\underline{\underline{G}}_t^- = (B \in \underline{\underline{G}}_\infty , \exists B_t \in \underline{\underline{F}}_t , B \cap (t < L) = B_t \cap (t < L)).$$

<u>Lemme 1</u> : <u>soit</u> H <u>un processus</u> $(\underline{\underline{G}}_t^-)$-<u>prévisible. Il existe un processus</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$-<u>prévisible</u> J <u>tel que</u> :

$$H_t \, 1_{(t \leqslant L)} = J_t \, 1_{(t \leqslant L)} .$$

<u>Démonstration</u>: la tribu $(\underline{\underline{G}}_t^-)$-prévisible est engendrée par

$\{0\} \times A$ $(A \in \underline{\underline{G}}_0^- = \underline{\underline{F}}_0)$ et $]t,\infty[\times A$ $(A \in \underline{\underline{G}}_t^-)$ et il suffit d'établir le résultat pour ces générateurs.

Si $A \in \underline{\underline{G}}_t^-$, il existe B dans $\underline{\underline{F}}_t$ tel que $A \cap (t < L) = B \cap (t < L)$.

Si $H = 1_{A \times]t,\infty[}$, il suffit de prendre $J = 1_{B \times]t,\infty[}$.

d) si L est la fin d'un ensemble $(\underline{\underline{F}}_t)$-optionnel, la filtration $(\underline{\underline{G}}_t)$

définie dans l'introduction est croissante et continue à droite. De plus, on a la représentation suivante des processus $(\underline{\underline{G}}_t)$-prévisibles, obtenue par DELLACHERIE et MEYER en [3], avec une démonstration différente:

<u>Lemme 1'</u>: <u>soit</u> H <u>un processus</u> $(\underline{\underline{G}}_t)$-<u>prévisible. Il existe deux processus</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$-<u>prévisibles</u> J <u>et</u> K <u>tels que</u> :

$$H_t = J_t \, 1_{(t \leqslant L)} + K_t \, 1_{(L < t)} \quad .$$

<u>Démonstration</u>: comme pour le lemme 1, il suffit de démontrer le résultat pour H de la forme $H = 1_{A \times]t,\infty[}$, avec $A \in \underline{\underline{G}}_t$;

il existe B et C dans $\underline{\underline{F}}_t$ tels que :

$$A = \{B \cap (t < L)\} \cup \{C \cap (L \leqslant t)\}.$$

Notons T_t le $(\underline{\underline{F}}_t)$-temps d'arrêt $T_t = \inf (v > t, \tilde{Z}_v = 1)$ et

$\mathcal{L}_s$ le processus $(\underline{\underline{F}}_t)$-prévisible (adapté et continu à gauche)

$\mathcal{L}_s = \sup (v < s, \tilde{Z}_v = 1)$.

Il suffit alors de prendre $J = 1_B \, 1_{]t,\infty[}$ et

$$K = 1_B \, 1_{]\!]T_t,\infty[\![} + 1_C \, 1_{]t,\infty[} \, 1_{(\mathcal{L}_. \leqslant t)} \quad .$$

e) de la représentation des ensembles $(\underline{\underline{G}}_t^-)$-prévisibles sur $[\![0,L]\!]$ on déduit facilement que

- pour tout $(\underline{\underline{G}}_t^-)$-temps d'arrêt T, il existe un $(\underline{\underline{F}}_t)$-temps d'arrêt S tel que $T \wedge L = S \wedge L$;
- les processus $(\underline{\underline{G}}_t^-)$-optionnels nuls sur $[\![L,+\infty]\!]$ sont les processus $U \, 1_{[\![0,L[\![}$ pour U $(\underline{\underline{F}}_t)$-optionnel.

Par suite, on a :

<u>Lemme 2</u> : <u>soit</u> L <u>fin d'un ensemble</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$-<u>optionnel</u>;

a) <u>soit</u> X <u>une</u> $(\underline{\underline{G}}_t)$-<u>martingale locale arrêtée en</u> L ; <u>alors</u> X <u>est une</u> $(\underline{\underline{G}}_t^-)$-<u>martingale locale</u>.

b) <u>soit</u> Y <u>une</u> $(\underline{\underline{G}}_t^-)$-<u>martingale locale, arrêtée en</u> L. <u>On suppose que</u> Y_L <u>est</u> $\underline{\underline{G}}_L$-<u>mesurable. Alors</u> Y <u>est une</u> $(\underline{\underline{G}}_t)$-<u>martingale locale</u>.

<u>Démonstration</u>:

a) on peut supposer, par arrêt, que X est une $(\underline{\underline{G}}_t)$-martingale uniformément intégrable. Soient alors $A \in \underline{\underline{G}}_s^-$, $A_s \in F_s$ tels que

$A \cap (s < L) = A_s \cap (s < L)$ et soit $t > s$.

$A \cap (s < L)$ est dans $\underline{\underline{G}}_s$, tandis que sur $(L \leqslant s)$, X_t vaut X_L , d'où

$$\begin{aligned} E(X_t ; A) &= E(X_t ; A \cap (s < L)) + E(X_t ; A \cap (L \leqslant s)) \\ &= E(X_s ; A) . \end{aligned}$$

b) d'après les remarques précédentes, Y est $(\underline{\underline{G}}_t)$-optionnel. $\underline{\underline{G}}_t$ étant inclus dans $\underline{\underline{G}}_t^-$ pour tout t, le résultat est acquis si Y est uniformément intégrable. Sinon, soit (T_n) une suite de $(\underline{\underline{G}}_t^-)$-temps d'arrêt, croissant vers $+\infty$, et réduisant Y .

Soit T'_n un $(\underline{\underline{F}}_t)$-temps d'arrêt tel que $L \wedge T_n = L \wedge T'_n$ et soit $S_n = T'_n$ sur $(T'_n < L)$, $S_n = +\infty$ sinon .

La suite de $(\underline{\underline{G}}_t)$-temps d'arrêt (S_n) a les mêmes propriétés que la suite (T_n).

Des lemmes 1, 1', et 2, on déduit la

<u>Proposition 2</u> : <u>soit</u> H <u>un processus</u> $(\underline{\underline{G}}_t^-)$-<u>prévisible borné . Alors</u>

$$H_L \, 1_{(L \leqslant t)} - \int_0^{t \wedge L} \frac{H_s}{Z_{s-}} \, dA_s$$

<u>est une</u> $(\underline{\underline{G}}_t^-)$-<u>martingale (et une</u> $(\underline{\underline{G}}_t)$-<u>martingale si</u> L <u>est fin d'un ensemble</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$-<u>optionnel</u>).

<u>Démonstration</u>: il suffit de le démontrer pour $H = 1$. Soit alors θ un processus $(\underline{\underline{G}}_t^-)$-prévisible borné et J $(\underline{\underline{F}}_t)$-prévisible tel que $\theta_t\, 1_{(t \leqslant L)} = J_t\, 1_{(t \leqslant L)}$.

On a vu en [7] , que $P\,(Z_{L-} = 0) = 0$; $dA_.$ est donc portée par $(Z_- \neq 0)$, ce qui permet d'écrire :

$$E(\theta_L) = E(J_L) = E\left(\int_0^\infty J_s\, dA_s\right) = E\left(\int_0^L \frac{J_s}{Z_{s-}}\, dA_s\right)$$

$$= E\left(\int_0^L \frac{\theta_s}{Z_{s-}}\, dA_s\right)$$

d'où les résultats annoncés.

On notera A' le processus (3) $\quad A'_t = \displaystyle\int_0^{t \wedge L} \frac{1}{Z_{s-}}\, dA_s$;

d'après la proposition 2, A' est la projection duale $(\underline{\underline{G}}_t^-)$-prévisible (et $(\underline{\underline{G}}_t)$-prévisible si L est fin d'optionnel) de $1_{(L \leqslant t)}$ et on peut donner une nouvelle caractérisation des fins d'ensembles $(\underline{\underline{F}}_t)$-prévisibles :

<u>Proposition 3</u> : <u>les assertions suivantes sont équivalentes</u> :

a) L <u>est fin d'un ensemble</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$-<u>prévisible</u> ;

b) $Z_{L-} = 1$ <u>p.s.</u> ;

c) $dA_.$ <u>est portée par</u> $(Z_- = 1)$;

d) $A_t = A_{t \wedge L}$;

e) $1_{(L \leqslant t)} - A_t$ <u>est une</u> $(\underline{\underline{G}}_t^-)$-<u>martingale</u> ;

f) $A = A'$.

Remarque : on ne suppose pas, dans l'énoncé de la proposition 3, que L est fin d'un ensemble $(\underline{\underline{F}}_t)$-optionnel. Mais, si l'on fait cette hypothèse, l'assertion

e') $1_{(L \leq t)} - A_t$ est une $(\underline{\underline{G}}_t)$-martingale

équivaut à chacune des assertions a),....,f) .

Démonstration: l'équivalence des points a),b),c) et d) a été établie par AZEMA en [1] . En outre, la formule (3) montre a) $\Rightarrow$ f) $\Rightarrow$ d) ; la proposition 2 donne l'équivalence de e) et f).

Nous aurons encore besoin des résultats suivants:

Lemme 3 :

1) Z^c *désignant la partie martingale locale continue de* Z, *on a, pour tout* x *de* $\mathbb{R}$:

$$\int_0^{\cdot} 1_{(Z_s = x)} \, dZ_s^c = 0 \ .$$

2) *Les intégrales* $\int_0^{\cdot} 1_{(Z_{s-} = 0)} \, dA_s$ *et* $\int_0^{\cdot} 1_{(Z_{s-} = 0)} \, dZ_s$ *sont nulles*.

Démonstration:

1) Pour tout t de $\mathbb{R}_+$, on a

$$\int_0^t 1_{(Z_s = x)} \, d \langle Z^c, Z^c \rangle_s = \int_{\{x\}} L_t^a \, da = 0 \ ,$$

L^a désignant le temps local en a de la semi-martingale Z. Ceci entraine la première assertion.

2) On procède en plusieurs étapes :

a) la semi-martingale $\int_0^{\cdot} 1_{(Z_{s-}=0)}\, dZ_s$ est continue, car le processus de ses sauts, à savoir $1_{(Z_{t-}=0)}\, \Delta Z_t$ est identiquement nul, d'après les propriétés de l'annulation d'une surmartingale positive (ici: Z).

b) On a vu dans la démonstration de la Proposition 2 (comme conséquence de [7]), que $dA_{\cdot}$ est portée par $(Z_- \neq 0)$. L'intégrale $\int_0^{\cdot} 1_{(Z_{s-}=0)}\, dA_s$ est donc nulle .

c) Utilisant la décomposition $Z = M - A$, on sait, d'après b), que $\int_0^{\cdot} 1_{(Z_{s-}=0)}\, dZ_s$ est une martingale locale, continue d'après a). Elle est donc égale à $\int_0^{\cdot} 1_{(Z_s=0)}\, dZ_s^c$, qui est nulle d'après 1).

Nous allons maintenant étudier les propriétés du $(\underline{\underline{G}}_t^-)$-temps d'arrêt L :

<u>Proposition 4</u> : a) L <u>est un</u> $(\underline{\underline{G}}_t^-)$-<u>temps d'arrêt prévisible si, et seulement si</u>, L <u>est un</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$-<u>temps d'arrêt prévisible</u>.

b) <u>soient</u> $L_1 = L$ <u>sur</u> $(\Delta A_L = 0)$, $L_1 = +\infty$ <u>sur</u> $(\Delta A_L > 0)$

$L_2 = L$ <u>sur</u> $(\Delta A_L > 0)$, $L_2 = +\infty$ <u>sur</u> $(\Delta A_L = 0)$;

L_1 (<u>resp</u>. L_2) <u>est la partie totalement inaccessible</u> (<u>resp. accessible</u>) <u>du</u> $(\underline{\underline{G}}_t^-)$-<u>temps d'arrêt</u> L.

<u>En particulier</u> L <u>est totalement inaccessible si, et seulement si, pour tout</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$-<u>temps d'arrêt prévisible</u> T, $P(L = T) = 0$.

c) <u>Si</u> L <u>est fin d'un ensemble</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$-<u>optionnel, on peut remplacer la filtration</u> $(\underline{\underline{G}}_t^-)$ <u>par</u> $(\underline{\underline{G}}_t)$ <u>dans les points a) et b)</u>.

<u>Démonstration</u>:

a) Si L est un $(\underline{\underline{G}}_t^-)$-temps d'arrêt prévisible, soit (T_n) une suite de $(\underline{\underline{G}}_t^-)$-temps d'arrêt annonçant L . T_n est en fait un $(\underline{\underline{F}}_t)$-temps d'arrêt.

b) Les sauts de A sont $(\underline{\underline{F}}_t)$-prévisibles; le graphe de L_2 est inclus dans l'ensemble prévisible pour $(\underline{\underline{F}}_t)$, et donc pour $(\underline{\underline{G}}_t^-)$, mince, $(\Delta A > 0)$; L_2 est donc un $(\underline{\underline{G}}_t^-)$-temps d'arrêt accessible.
Par contre, si T est un $(\underline{\underline{G}}_t^-)$-temps d'arrêt prévisible,

$$P(L_1 = T < +\infty) = P(L = T;\ \Delta A_L = 0)$$

$$= E\left(\int_0^L \frac{1}{Z_{u-}} 1_{(u = T)\cap(\Delta A_u = 0)}\, dA_u\right) \qquad (\text{ Proposition } 2)$$

$$= E\left(\frac{1}{Z_{T-}} \Delta A_T\, 1_{(T \leqslant L)\cap(\Delta A_T = 0)}\right) = 0 .$$

<u>3) Les formules de décomposition avant</u> L.

On ne fait pas ici d'hypothèse sur L (hormis que c'est une variable aléatoire à valeurs dans $]0,+\infty[$), et on travaille donc avec la filtration $(\underline{\underline{G}}_t^-)$. Rappelons que l'on a montré en [7] que, si X est une $(\underline{\underline{F}}_t)$-martingale locale, $X_{t\wedge L}$ est une $(\underline{\underline{G}}_t^-)$-semi-martingale (spéciale); le théorème suivant permet d'expliciter la décomposition de $X_{t\wedge L}$ (relativement à $(\underline{\underline{G}}_t^-)$).

<u>Théorème 1</u> : <u>soit</u> X <u>une</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$-<u>martingale locale. On note</u> B <u>la projection duale</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$-<u>prévisible de</u> $\Delta X_L 1_{(L\leqslant t)}$ <u>et</u> $C = \langle X,M\rangle + B$.

<u>Alors les processus</u> :

$$(4) \qquad \tilde{X}_t = X_t 1_{(t<L)} + \int_0^{t\wedge L} \frac{1}{Z_{s-}} (X_{s-}\, dA_s - d\langle X,M\rangle_s) \quad \underline{\text{et}}$$

$$(5) \quad \bar{X}^L_t = X_{t\wedge L} - \int_0^{t\wedge L} \frac{1}{Z_{s-}} 1_{(Z_{s-}<1)} \, dC_s$$

<u>sont deux</u> $(\underline{\underline{G}}^-_t)$-<u>martingales locales</u>.

<u>Il existe, de plus, une constante universelle</u> a, <u>telle que</u>

$$\| \bar{X}^L \|_{H^1(\underline{\underline{G}}^-_\cdot)} \leqslant a \quad \| X \|_{H^1(\underline{\underline{F}}_\cdot)} .$$

<u>En outre, la décomposition canonique de la</u> $(\underline{\underline{G}}^-_t)$-<u>semi-martingale spéciale</u> X^L <u>est donnée par</u> $\bar{X}^L + (X^L - \bar{X}^L)$, <u>c'est à dire</u>: $\bar{X}^L$ <u>est une</u> $(\underline{\underline{G}}^-_t)$-<u>martingale locale et</u> $(X^L - \bar{X}^L)$ <u>est un processus</u> $(\underline{\underline{G}}^-_t)$-<u>prévisible à variation bornée</u>.

<u>Démonstration</u>:

1) D'après le lemme 3, les intégrales qui figurent dans la formule (4) ont bien un sens. Par localisation, on peut supposer:

X appartient à $H^1(\underline{\underline{F}}_\cdot)$.

Montrons que, pour $H \in \underline{\underline{G}}^-_s$ et $s < t$, on a $E(\tilde{X}_t - \tilde{X}_s \,;\, H) = 0$.

Par définition de $\underline{\underline{G}}^-_s$, il existe $H_s \in \underline{\underline{F}}_s$, tel que

$$H \cap (s < L) = H_s \cap (s < L) .$$

On a :

$$E(\tilde{X}_t - \tilde{X}_s \,;\, H) = E(\hat{X}_t - \tilde{X}_s \,;\, H \cap (s < L))$$
$$= E(\tilde{X}_t - \tilde{X}_s \,;\, H_s) .$$

D'autre part, on a :

$$E(\tilde{X}_t - \tilde{X}_s \,;\, H_s) = E\left(X_t Z_t - X_s Z_s + \int_s^t \frac{1_{(u \leqslant L)}}{Z_{u-}} dD_u \,;\, H_s \right)$$

avec $D = X_- \cdot A - \langle X, M \rangle$. Soit :

$$E(\tilde{X}_t - \tilde{X}_s \,;\, H_s) = E(X_t Z_t - X_s Z_s + D_t - D_s \,;\, H_s)$$

$= 0$, par une simple application de la formule d'Ito .

2) Remarquons maintenant que

$$\bar{X}_t^L = X_t 1_{(t < L)} + X_L 1_{(L \leqslant t)} - \int_0^{t \wedge L} \frac{1}{Z_{s-}} 1_{(Z_{s-} < 1)} dC_s$$

$$= \tilde{X}_t + (X_{L-} 1_{(L \leqslant t)} - \int_0^{t \wedge L} \frac{X_{s-}}{Z_{s-}} dA_s)$$

$$+ (\Delta X_L 1_{(L \leqslant t)} - \int_0^{t \wedge L} \frac{1}{Z_{s-}} (1_{(Z_{s-} < 1)} dB_s - 1_{(Z_{s-} = 1)} d \langle X, M \rangle_s))$$

La proposition 2, le lemme 4 ci-dessous et la première partie de la démonstration, montrent que l'on vient de décomposer $\bar{X}^L$ en la somme de trois $(\underline{\underline{G}}_t^-)$-martingales locales.

3) La constante universelle c qui figure ci-dessous varie de place en place.

$$E \left(\int_0^L \frac{1}{Z_{s-}} 1_{(Z_{s-} < 1)} | dC_s | \right) = E \left(\int_0^\infty 1_{(Z_s \leqslant 1)} | dC_s | \right)$$

est majoré par $E \left(\int_0^\infty | d \langle X, M \rangle_s | \right) + E (| \Delta X_L |)$, donc par

$$E (| \Delta X_L |) + c \quad \| X \|_{H^1(\underline{\underline{F}}_.)} \cdot \| M \|_{BMO} \leqslant c \| X \|_{H^1(\underline{\underline{F}}_.)}$$

car on sait que $\| M \|_{BMO}$ est majoré par $2 \sqrt{3}$ (cf. [5] p.334) .

$(\bar{X}^L)^*$ étant majoré par $X^* + \int_0^L \frac{1}{Z_{s-}} 1_{(Z_{s-} < 1)} | dC_s |$,

le théorème 1 est démontré.

Voici le lemme auxiliaire utilisé:

Lemme 4 : a) $\Delta X_L \, 1_{(L \leq t)} - \int_0^{t \wedge L} \frac{1}{Z_{s-}} \, dB_s$

est une (G_t^-)-martingale locale.

b) $1_{(Z_- = 1)} \cdot B = - 1_{(Z_- = 1)} \cdot \langle X, M \rangle$.

Démonstration: par localisation, on peut supposer : $X \in H^1(\underline{\underline{F}}_.)$.

a) On procède comme pour la proposition 2 .

b) Soit (T_n) une suite de $(\underline{\underline{F}}_t)$-temps d'arrêt épuisant les sauts de X . Si H est un processus $(\underline{\underline{F}}_t)$-prévisible borné, on a :

$$E (H_L \, \Delta X_L \; ; Z_{L-} = 1) = \sum_n E (H_{T_n} \, \Delta X_{T_n} \; ; L = T_n , Z_{T_n -} = 1)$$

$$= \sum_n E (H_{T_n} \, \Delta X_{T_n} \; ; Z_{T_n -} = 1 , L \leq T_n) \quad (\text{Proposition } 1)$$

$$= \sum_n E (H_{T_n} \, \Delta X_{T_n} \, (1 - Z_{T_n}) , Z_{T_n -} = 1) \quad ((Z_- = 1) \subset (\tilde{Z} = 1))$$

$$= - E (\int_0^\infty H_u \, 1_{(Z_{u-} = 1)} \, d [X,Z]_u) .$$

Or, $[X,Z] = [X,M] - [X,A]$; A étant prévisible, $[X,A]$ est une martingale locale (YOEURP) et la projection duale $(\underline{\underline{F}}_t)$-prévisible de $[X,Z]$ est $\langle X,M \rangle$.

Remarque 1 : la formule (5) fournit une nouvelle démonstration des inégalités obtenues par DELLACHERIE et MEYER en [3] . En effet, il est montré en [3] qu'il existe une constante universelle d telle que, pour toute $(\underline{\underline{F}}_t)$-semi-martingale X, on ait

$$(*) \qquad \| X^L \|_{H^1(\underline{\underline{G}}^-_.)} \leq d \, \| X \|_{H^1(\underline{\underline{F}}_.)} .$$

On remarque aisément que, pour démontrer (*), il suffit de se restreindre aux martingales X de $H^1(\underline{\underline{F}}_.)$. On a

$$\| X^L \|_{H^1(\underline{\underline{G}}^-_.)} \leqslant \| \bar{X}^L \|_{H^1(\underline{\underline{G}}^-_.)} + \| X^L - \bar{X}^L \|_{H^1(\underline{\underline{G}}^-_.)}$$

Or, dans l'énoncé du théorème 1, figure une constante universelle a telle que $\| \bar{X}^L \|_{H^1(\underline{\underline{G}}^-_.)} \leqslant a \ \| X \|_{H^1(\underline{\underline{F}}_.)}$; de plus, dans la démonstration du théorème 1 (partie 3)), on a montré l'existence d'une constante universelle b, telle que $\| X^L - \bar{X}^L \|_{H^1(\underline{\underline{G}}^-_.)} \leqslant b \ \| X \|_{H^1(\underline{\underline{F}}_.)}$

Finalement, on a montré (*).

4) Les formules de décomposition.

On suppose, dans ce paragraphe, que L est fin d'un ensemble $(\underline{\underline{F}}_t)$-optionnel. On conserve les notations du théorème 1 ; on peut alors énoncer le

Théorème 2 : soit X une $(\underline{\underline{F}}_t)$-martingale locale. Alors le processus

$$(6) \quad \bar{X}_t = X_t + \int_0^t 1_{(L < s)} \frac{1}{1 - Z_{s-}} dC_s - \int_0^{t \wedge L} \frac{1}{Z_{s-}} 1_{(Z_{s-} \leqslant 1)} dC_s$$

est une $(\underline{\underline{G}}_t)$-martingale locale. De plus, il existe une constante universelle a telle que :

$$\| \bar{X} \|_{H^1(\underline{\underline{G}}_.)} \leqslant a \ \| X \|_{H^1(\underline{\underline{F}}_.)} .$$

En outre, la décomposition canonique de la $(\underline{\underline{G}}_t)$-semi-martingale spéciale X est donnée par $\bar{X} + (X - \bar{X})$, c'est à dire: $\bar{X}$ est une $(\underline{\underline{G}}_t)$-martingale locale et $X - \bar{X}$ un processus $(\underline{\underline{G}}_t)$-prévisible à variation bornée.

<u>Démonstration</u>:

1) Par localisation, on peut supposer: $X \in H^1(\underline{\underline{F}}_{.})$

2) L'intégrale

$$\int_0^t \left(1_{(s \leqslant L)} 1_{(Z_{s-} < 1)} \frac{1}{Z_{s-}} + 1_{(s > L)} \frac{1}{1 - Z_{s-}}\right) |dC_s| = K_t$$

est bien définie: $E(K_\infty) = 2\, E\left(\int_0^\infty 1_{(Z_{s-} < 1)} |dC_s|\right)$

est majoré par $c \, \|X\|_{H^1(\underline{\underline{F}}_{.})}$, où c est une constante universelle (voir la démonstration du théorème 1, point 3)).

Il existe donc une constante universelle a telle que $a \, \|X\|_{H^1(\underline{\underline{F}}_{.})}$ majore $E(\bar{X}^*)$.

Il nous reste donc à démontrer que $\bar{X}$ est une $(\underline{\underline{G}}_t)$-martingale locale.

3) Soient alors $s < t$ et $A \in \underline{\underline{F}}_s$. Calculons $U = E(\bar{X}_t - \bar{X}_s \,;\, A)$.

$$U = E\left(1_A \int_s^t 1_{(L < u)} \frac{1}{1 - Z_{u-}} dC_u\right)$$

$$- E\left(1_A \int_s^t 1_{(Z_{u-} < 1) \cap (u \leqslant L)} \frac{1}{Z_{u-}} dC_u\right) = 0$$

(C commute avec la projection $(\underline{\underline{F}}_t)$-prévisible).

4) Par une nouvelle localisation, on peut supposer que la martingale locale $Z_- \cdot X + X_- \cdot M$ est une martingale uniformément intégrable. Compte tenu de 3), il nous suffit de montrer maintenant que

$V = E(\bar{X}_t - \bar{X}_s \,;\, A \cap (L \leqslant s))$ est nul. Or $V = V_1 + V_2$, où

$$V_1 = E(X_t - X_s \,;\, A \cap (L \leqslant s)) = - E(X_t - X_s \,;\, A \cap (s < L))$$

$$V_2 = E\left(1_A \int_s^t 1_{(L < u)} \frac{1}{1 - Z_{u-}} dC_u \,;\, L \leqslant s\right).$$

Notons $T_s = \inf (v > s, \tilde{Z}_v = 1)$;
sur $(T_s < +\infty)$, $\tilde{Z}_{T_s} = 1$.

Si $u > s$, $(L \leqslant s) = (L < u) \cap (T_s \geqslant u)$ tandis que
$(s < L \leqslant t) = (L \leqslant t) \cap (T_s \leqslant t)$; d'où

$$V_2 = E (1_A \int_s^{T_s \wedge t} 1_{(L < u)} \frac{1}{1 - Z_{u-}} dC_u)$$

$$= E (1_A \int_s^{T_s \wedge t} 1_{(Z_{u-} < 1)} dC_u)$$

$$= E (C_{T_s \wedge t} - C_s ; A) \quad \text{(d'après le lemme 4)} .$$

Si l'on remarque que $(s < L \leqslant T_s \wedge t) = (L = T_s \leqslant t)$, on peut écrire,

$$V_2 = E (\langle X,M \rangle_{T_s \wedge t} - \langle X,M \rangle_s ; A) + E (\Delta X_L ; L = T_s \leqslant t ; A) \quad (7)$$

$$-V_1 = E (X_t ; A \cap (t < L)) - E (X_s ; A \cap (s < L)) + E (X_t ; A ; s < L \leqslant t)$$

$$= E (X_t Z_t - X_s Z_s ; A) + E (X_t (1 - Z_t) ; A \cap (T_s \leqslant t)).$$

La formule d'Ito permet d'écrire :

$$X_t Z_t = X_s Z_s + \int_s^t Z_{u-} dX_u + \int_s^t X_{u-} dM_u - \int_s^t X_{u-} dA_u + [X,Z]_t - [X,Z]_s .$$

On peut donc écrire V_1 sous la forme :

$$V_1 = E (1_A \int_s^t X_{u-} dA_u) - E (\langle X,M \rangle_t - \langle X,M \rangle_s ; A)$$

$$- E (X_{T_s} (1 - Z_{T_s}) ; A \cap (T_s \leqslant t)) - E (\int_{T_s}^t X_{u-} dA_u ; A \cap (T_s \leqslant t))$$

$$+ E (\langle X,M \rangle_t - \langle X,M \rangle_{T_s} ; A \cap (T_s \leqslant t)) , \quad \text{soit :}$$

$$V_1 = E\left(1_A \int_s^{T_s \wedge t} X_{u-}\, dA_u \right) - E\left(1_A \int_s^{T_s \wedge t} d < X,M >_u \right)$$

$$- E\left(X_{T_s} (\tilde{Z}_{T_s} - Z_{T_s}) \; ; \; A \cap (T_s \leqslant t) \right)$$

$$V_1 = E\left(X_{L-} \; ; \; A \cap (s < L \leqslant T_s \wedge t)\right) - E\left(X_L \; ; \; A \cap (L = T_s \leqslant t) \right)$$

$$- E\left(<X,M>_{T_s \wedge t} - <X,M>_s \; ; \; A \right) . \quad (8)$$

En comparant (7) et (8), on obtient $V = V_1 + V_2 = 0$, ce qui termine la démonstration du théorème 2 .

Remarques

1) si L est fin d'un ensemble $(\underline{\underline{F}}_t)$-prévisible, $Z_{L-} = 1$ p.s. ; $1_{(Z_- < 1)} \cdot B$ est donc nul et on peut remplacer C par $< X,M >$ dans la formule (6) .

2) La formule (6) fournit une nouvelle démonstration des inégalités obtenues en [3] par DELLACHERIE et MEYER (voir la remarque 1 du paragraphe 3).

3) Dans son travail ([2]), M. BARLOW suppose, outre le fait que L est fin d'un ensemble $(\underline{\underline{F}}_t)$-optionnel, que

- toute $(\underline{\underline{F}}_t)$-martingale est continue ;
- pour tout $(\underline{\underline{F}}_t)$-temps d'arrêt T, $P(L = T) = 0$.

L est alors en fait fin d'un ensemble $(\underline{\underline{F}}_t)$-prévisible et l'expression de $\bar{X}$ est

$$(6') \quad \bar{X}_t = X_t + \int_0^t \left(1_{(L < s)} \frac{1}{1 - Z_s} - 1_{(s \leqslant L, Z_s < 1)} \frac{1}{Z_s} \right) d < X,M >_s$$

4) Une fois cet article achevé, nous avons reçu un nouveau travail de M. BARLOW, intitulé :

Study of a filtration expanded to include an honest time,
où l'auteur obtient, entre autres résultats, l'analogue de notre théorème 2, pour les $(\underline{\underline{F}}_t)$-martingales de carré intégrable. Ceci est une légère restriction par rapport à notre énoncé, valable pour les martingales locales, mais M. Barlow obtient le résultat supplémentaire :

$$E\,(\,(\bar{X})^2_\infty\,) \leqslant E\,(\,X^2_\infty\,)\,,$$

montrant ainsi que l'application linéaire : $X \longrightarrow \bar{X}$ est continue de $H^2(\underline{\underline{F}}_.)$ dans $H^2(\underline{\underline{G}}_.)$.

Nous allons tirer de la confrontation de ce résultat et du nôtre, par interpollation, d'autres inégalités :
dans la suite, on identifie une martingale uniformément intégrable à la variable terminale. Notons T l'application :

$$T : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{loc}(\underline{\underline{F}}_.) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{loc}(\underline{\underline{G}}_.) \\ X & \longrightarrow & \bar{X} \end{array}$$

D'après notre théorème 2, il existe une constante universelle a telle pour toute $(\underline{\underline{F}}_t)$-martingale X de $H^1(\underline{\underline{F}}_.)$, on ait

$$\|TX\|_{L^1(\underline{\underline{G}}_\infty)} \leqslant \|TX\|_{H^1(\underline{\underline{G}}_.)} \leqslant a\ \|X\|_{H^1(\underline{\underline{F}}_.)}$$

D'après les inégalités de Hölder et de Doob, on a , pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\|TX\|_{L^1(\underline{\underline{G}}_\infty)} \leqslant a_\varepsilon\ \|X\|_{L^{1+\varepsilon}(\underline{\underline{F}}_\infty)}\ .$$

D'autre part, d'après le résultat de BARLOW, on a

$$\|TX\|_{L^2(\underline{\underline{G}}_\infty)} \leqslant \|X\|_{L^2(\underline{\underline{F}}_\infty)}\ .$$

Soit $\theta \in \,]0,1[$, et $\varepsilon > 0$.

Posons $\dfrac{1}{p_\varepsilon(\theta)} = \dfrac{1-\theta}{1+\varepsilon} + \dfrac{\theta}{2}$, et $\dfrac{1}{q(\theta)} = (1-\theta) + \dfrac{\theta}{2}$.

Lorsque θ décrit l'intervalle $]0,1[$, $q(\theta)$ décrit l'intervalle $]1,2[$. Fixons $\theta \in]0,1[$. Lorsque ε décrit $]0,1[$, $p_\varepsilon(\theta)$ décrit l'intervalle $]q(\theta),2[$.

D'après les deux dernières inégalités écrites, et le théorème d'interpolation de RIESZ-THORIN (cf, par exemple, [8] , p.261), on a , pour tout θ de $]0,1[$, et $\varepsilon \in]0,1[$:

$$\|TX\|_{L^{q(\theta)}(\underline{\underline{G}}_\infty)} \leqslant C_{\theta,\varepsilon} \|X\|_{L^{p_\varepsilon(\theta)}(\underline{\underline{F}}_\infty)} ,$$

avec $C_{\theta,\varepsilon}$ constante universelle.

D'après les remarques faites sur les intervalles de variation de $q(\theta)$ et $p_\varepsilon(\theta)$, on a, pour tout couple (p,q) tel que $1 < q < p < 2$:

$$\|TX\|_{L^q(\underline{\underline{G}}_\infty)} \leqslant C'_{p,q} \|X\|_{L^p(\underline{\underline{F}}_\infty)} , \quad \text{ou encore}$$

$$\|TX\|_{H^q(\underline{\underline{G}}_.)} \leqslant C''_{p,q} \|X\|_{H^p(\underline{\underline{F}}_.)}$$

avec $C'_{p,q}$ et $C''_{p,q}$ des constantes universelles.

La question naturelle qui se pose alors est : T est-elle continue de $H^p(\underline{\underline{F}}_.)$ dans $H^p(\underline{\underline{G}}_.)$, pour $1 < p < 2$? En général, nous ne savons pas y répondre.

<u>Références</u> :

[1] AZEMA J. : Quelques applications de la théorie générale des processus, I Inventiones math., Vol.18, 1972.

[2] BARLOW M. : Martingale representation with respect to expanded σ-fields (à paraitre , 1977)

[3] DELLACHERIE C. et MEYER P.A. : A propos du travail de Yor sur le grossissement des tribus (dans ce volume).

[4] MEYER P.A. : Résultats d'Azéma en théorie générale des processus. Séminaire de Probabilités VII, Lecture Notes in Math.321 Springer Verlag 1973 .

[5] MEYER P.A. : Un cours sur les intégrales stochastiques. Séminaire de Probabilités X, Lecture Notes in Math. 511, 1976 .

[6] YOEURP CH. : Décomposition des martingales locales et formules exponentielles. Séminaire de Probabilités X, Lecture Notes in Math. 511, 1976 .

[7] YOR M. : Grossissement d'une filtration et semi-martingales: théorèmes généraux.(dans ce volume).

[8] BOURBAKI N. : Intégration (XIII) Hermann.

T.Jeulin et M.Yor

Laboratoire de Calcul des Probabilités

Tour 46, 3° Etage,

2, Place Jussieu

75230 Paris Cedex 05 .