SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

PAUL-ANDRÉ MEYER

Martingales locales fonctionnelles additives (II)

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 12 (1978), p. 786-803
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1978__12__786_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1976/77

MARTINGALES LOCALES FONCTIONNELLES ADDITIVES (II)

par P.A. Meyer

Cet exposé est la suite du précédent, avec la même notation. Nous faisons[1] l'hypothèse que le processus est de Hunt (quasi-continuité à gauche des tribus), mais nous nous en servirons le plus tard possible (nous l'indiquerons alors très explicitement). Les raffinements de résolvantes de Ray de l'exposé I sont inutiles ici, et nous travaillerons tout simplement sur les réalisations continues à droite canoniques à valeurs dans $\bar{E}=E\cup\{\partial\}$.

Voici quelques définitions supplémentaires dont nous aurons besoin : λ est une mesure σ-finie sur E, fixée dans tout l'exposé . Il serait très agréable de pouvoir prendre λ bornée, mais ce serait trop restrictif (en analyse, λ est le plus souvent la mesure de Lebesgue d'un $\mathbb{R}^k$). Nous supposons donc seulement que λU est σ-finie. Dans tout l'exposé, nous appelons ensembles pleins les ensembles presque-boréliens G possédant les propriétés suivantes

- G porte λ
- Pour tout $x\in G$, G^c est ε_x-polaire.

Soit A un ensemble presque-borélien, λ-négligeable et λ-polaire, et soit $B=A^c$. Alors B contient un ensemble plein. Une manière rapide de voir cela consiste à utiliser un théorème de Hunt qui affirme que, si λ' est bornée équivalente à λ, il existe f excessive telle que $\langle\lambda',f\rangle<\infty$ et que $f=+\infty$ sur A . Alors l'ensemble $\{f<\infty\}$ est plein et contenu dans B.

Si G est un ensemble plein, nous pouvons considérer le processus restreint à G, et sa réalisation continue à droite canonique sur l'ensemble $\Omega_G\subset\Omega$ des applications continues à droite à durée de vie à valeurs dans G.

Nous désignons par $\underline{\underline{H}}^p(\lambda)$ l'espace usuel de toutes les martingales locales $M=(M_t)$ de la famille $(\underline{\underline{F}}_t^\lambda)$, sous la mesure P^λ , telles que

$$(1)\qquad \|M\|_{\underline{\underline{H}}^p(\lambda)} = (E^\lambda[[M,M]_\infty^{p/2}\ ])^{2/p} < \infty$$

DEFINITION 1. L'espace $\underline{\underline{H}}_a^p(\lambda)$ ($\underline{\underline{H}}^p$ additif) est constitué par les éléments M de $\underline{\underline{H}}^p(\lambda)$ possédant la propriété suivante

Il existe un ensemble plein G tel que $M|_{\Omega_G}$ soit une FAM du processus restreint à G.

Nous dirons que G est un ensemble plein associé à M. Pour bien comprendre

1. Un appendice a été ajouté, sur la dualité dans le cas général.

Le rôle des ensembles pleins, démontrons tout de suite que

THEOREME 1. $\underline{\underline{H}}^p_a(\lambda)$ <u>est fermé dans</u> $\underline{\underline{H}}^p(\lambda)$, <u>ou encore</u>, $\underline{\underline{H}}^p_a(\lambda)$ <u>est complet</u>.

DEMONSTRATION. Soit (M^n) une suite de Cauchy dans $\underline{\underline{H}}^p_a(\lambda)$. Une intersection dénombrable d'ensembles pleins étant pleine, nous pouvons (quitte à nous restreindre à un ensemble plein associé à toutes les M^n et à appeler E cet ensemble !) supposer que toutes les M^n sont des FAM sur E. Nous pouvons aussi, quitte à remplacer la suite (M^n) par une suite extraite, supposer que

$$\sum_n \|M^n-M^{n+1}\|_{\underline{\underline{H}}^p(\lambda)} < \infty$$

Or la fonction $g_n=E^\cdot[[M^n-M^{n+1},M^n-M^{n+1}]_\infty^{p/2}]$ est excessive. Comme $p\geq 1$, il en est de même de $f_n=g_n^{1/p}$ par concavité, et par conséquent de $\sum_n f_n=f$.

Soit λ' une mesure de probabilité, équivalente à λ, et majorée par un multiple de λ . Nous avons aussi $\sum_n(<\lambda',g_n>)^{1/p} < \infty$; mais $(<\lambda',g_n>)^{1/p} \geqq <\lambda',g_n^{1/p}>=<\lambda',f_n>$ (inégalité de Jensen), donc $<\lambda',f> <\infty$. Comme λ' est équivalente à λ, l'ensemble $G=\{f<\infty\}$ est plein.

Or soit $x\in G$. La relation $f(x)<\infty$ signifie que $\sum_n \|M^n-M^{n+1}\|_{\underline{\underline{H}}^p(\varepsilon_x)} < \infty$. En particulier (la norme $\underline{\underline{H}}^p(\varepsilon_x)$ étant plus forte que la norme $\underline{\underline{H}}^1(\varepsilon_x)$, équivalente à la norme $\underline{\underline{H}}^1(\varepsilon_x)$ calculée avec la fonction maximale) nous avons pour tout t

$$\sum_n E^x[|M^n_t-M^{n+1}_t|] < cf(x) < \infty$$

Soit μ une loi de probabilité sur G , et soit μ' une loi équivalente telle que $<\mu',f> < \infty$; la suite (M^n_t) converge dans $L^1(P^{\mu'})$, et donc aussi en probabilité sous P^μ.

Nous sommes alors dans une situation où l'on peut appliquer - sur G et non plus sur E - les raisonnements de l'exposé 1 : il existe une <u>même</u> fonctionnelle additive sur Ω_G , $M=(M_t)$, telle que M^n_t converge en probabilité vers M_t pour toute loi P^μ , μ portée par G. Revenant aux notations précédentes, il y convergence dans L^1 de M^n_t vers M_t sous $P^{\mu'}$, et les M^n appartiennent à $\underline{\underline{H}}^1(\mu')$, donc M est une martingale sous $P^{\mu'}$, et une martingale locale sous P^μ. Pour finir, M est une FAM sur Ω_G . Enfin, la suite (M^n_t) converge aussi en probabilité vers M sous P^λ (utiliser une mesure bornée sur G équivalente à λ), donc la limite de M^n dans $\underline{\underline{H}}^1(\lambda)$ est égale à M.

Nous allons pouvoir appliquer aux éléments de $\underline{\underline{H}}^p_a(\lambda)$ tous les résultats de l'exposé I relatifs aux FAM : il faudra seulement, chaque fois, les appliquer dans un ensemble plein G dépendant de la fonctionnelle considérée.

Le moment est venu de donner quelques exemples de FAM, et d'interpréter la norme $\underline{\underline{H}}^p$, au moins pour p=2 .

a) Soit f une fonction, mettons bornée, qui appartient au domaine du générateur infinitésimal A du semi-groupe au sens suivant : il existe une fonction bornée g telle que $f=U_p(pf-g)$ pour tout p>0. Alors le processus

(2) $$C_t^f = f\circ X_t - f\circ X_0 - \int_0^t g\circ X_s ds$$

est une FAM . L'application $f \longmapsto \|C^f\|_{\underline{\underline{H}}^2}$ est une semi-norme sur le domaine $\underline{\underline{D}}(A)$ du générateur : dans le cas du mouvement brownien, c'est $\sqrt{<\lambda U, \text{grad}^2 f>}$. Il s'agit donc d'une norme étroitement liée à la norme énergie classique (celle-ci en est un cas limite, lorsque λU tend en croissant vers la mesure de Lebesgue).

b) Soit J une fonction $\underline{\underline{F}}$-mesurable sur Ω, mettons bornée, telle que

(3) $$J\circ\theta_t = J \quad \text{p.s. sur l'ensemble } \{t<\zeta\}$$

et telle en outre que $J([\partial])=0$, où $[\partial]$ est l'unique trajectoire à durée de vie nulle. Posons $j(x)=E^x[J]$. Alors $j(\partial)=0$ et le processus

(4) $$j\circ X_t - j\circ X_0 + JI_{\{t\geq\zeta\}}$$

est une FAM. Dans le cas classique où (X_t) est le mouvement brownien dans une boule ou un demi-espace, toute fonction J satisfaisant à (3) est de la forme $h\circ X_{\zeta-}$, où h est une fonction bornée sur la frontière, et $X_{\zeta-}$ est la limite à gauche à l'instant ζ dans la topologie euclidienne (qui n'est pas la topologie de Ray considérée plus haut, mais s'interpréterait en général comme une topologie de Martin). Alors j est le prolongement harmonique dans l'ouvert de la fonction h sur la frontière, et la norme $\underline{\underline{H}}^2$ peut encore s'interpréter comme une intégrale d'énergie.

LE DUAL DE $\underline{\underline{H}}^p$: GENERALITES

Rappelons d'abord à quel point il est évident que, pour $1<p<\infty$, le dual du "gros" espace $\underline{\underline{H}}^p(\lambda)$ est $\underline{\underline{H}}^q(\lambda)$, où q désigne ici et dans toute la suite l'exposant conjugué de p : d'après les inégalités de Burkholder, la norme quadratique est équivalente à la norme maximale $\|M^*\|_{L^p(P^\lambda)}$. Comme $1<p<\infty$, l'inégalité de Doob nous dit que cette norme est elle même équivalente à $\|M_\infty\|_{L^p(P^\lambda)}$. Ainsi, $\underline{\underline{H}}^p(\lambda)$ n'est rien que $L^p(P^\lambda)$ avec une norme équivalente, et le résultat exprime simplement la dualité des espaces L^p. Ici, il nous faudra suivre un chemin plus compliqué : le seul résultat évident concerne $\underline{\underline{H}}_a^2(\lambda)$, qui est un espace de Hilbert, et donc son propre dual. Nous allons ramener tous les $\underline{\underline{H}}_a^p(\lambda)$ à $\underline{\underline{H}}_a^2(\lambda)$ par des opérateurs convenables d'intégrales stochastiques.

PREMIERE ETAPE

Nous allons montrer ici que le dual de $\underline{\underline{H}}_a^p(\lambda)$, pour $1\leq p\leq 2$, est un espace de martingales locales additives (en un sens à préciser).

Dans l'énoncé suivant, f est une fonction positive, et nous posons $f^* = \sup_s f\circ X_s$. L'énoncé suivant est trivial si λ est une mesure bornée (il suffit de prendre f bornée, et l'inégalité vaut pour tout p).

LEMME 1. Il existe une fonction bornée de la forme $f=Ug$, où g est partout >0 sur E, telle que l'on ait

$$E^\lambda[f^{*p}] < \infty \quad \text{pour } 1<p\leq 2 \tag{5}$$

DEMONSTRATION. La mesure λU est σ-finie sur E. Il existe donc une fonction h sur E, partout >0, telle que $<\lambda U,h> < \infty$. D'autre part, le noyau U est propre sur E. Il existe donc une fonction j partout >0 sur E telle que Uj soit bornée. Nous posons $g=h\wedge j$, et nous montrons que $f=Ug$ répond à la question.

Pour abréger les notations, notons A_t le processus croissant continu $\int_0^t g\circ X_s ds$, et M_t la martingale $E[A_\infty | \underline{\underline{F}}_t] = f\circ X_t + A_t$. Comme $f^* \leq M^*$, d'après l'inégalité de Doob il suffit de montrer que $E^\lambda[A_\infty^p] < \infty$.

Nous écrivons les deux égalités évidentes

$$A_\infty^p = p\int_0^\infty A_s^{p-1} dA_s \tag{6}$$

$$A_\infty^p = \int_0^\infty A_\infty^{p-1} dA_s \tag{7}$$

D'où par différence, comme $1<p\leq 2$

$$(1-\frac{1}{p})A_\infty^p = \int_0^\infty (A_\infty^{p-1} - A_\infty^{p-1})dA_s \leq \int_0^\infty (A_\infty - A_s)^{p-1} dA_s$$

Intégrons par rapport à P^x. Il vient

$$(1-\frac{1}{p})E^x[A_\infty^p] \leq E^x[\int_0^\infty E[(A_\infty - A_s)^{p-1} | \underline{\underline{F}}_s] dA_s]$$

$$\leq E^x[\int_0^\infty E[A_\infty - A_s | \underline{\underline{F}}_s]^{p-1} dA_s] \leq c^{p-1} E^x[A_\infty]$$

où c est une borne de $f=E^\cdot[A_\infty]$. Il ne reste plus qu'à intégrer par rapport à $\lambda(dx)$.

REMARQUE. La démonstration a une portée un peu plus générale. Si A n'était pas continu, mais engendrait un potentiel gauche borné (le potentiel gauche est la projection optionnelle du processus $A_\infty - A_{t-}$), on ferait le même raisonnement en remplaçant (6) par

$$A^p_\infty \geqq p\int_0^\infty A^{p-1}_{s-}dA_s \quad .$$

Cela s'applique en particulier au cas où A est prévisible et engendre un potentiel (ordinaire) borné.

Nous noterons f_- le processus prévisible $((f\circ X_s)_-)_{s>0}$, processus des limites à gauche de la surmartingale continue à droite $(f\circ X_s)$. Il est dominé par f^* .

LEMME 2 . Pour toute martingale locale M on a, pour $p\in[1,2]$

$$(8) \qquad \|f_-\cdot M\|_{\underline{\underline{H}}^p(\lambda)} \leqq c_p\|M\|_{\underline{\underline{H}}^2(\lambda)}$$

DEMONSTRATION. Le cas p=2 est trivial, f étant bornée, mais soulignons que p=1 n'échappe pas. Nous avons

$$\|f_-\cdot M\|^p_{\underline{\underline{H}}^p} = E^\lambda[(\int f^2\circ X_{s-}d[M,M]_s)^{p/2}] \leqq E^\lambda[\ f^{*p}\ [M,M]^{p/2}_\infty]$$

On applique Hölder avec les exposants conjugués 2/2-p et 2/p

$$\leqq (E^\lambda[(f^*)^{2p/2-p}])^{(2-p)/2}\ (E^\lambda[[M,M]_\infty\ ])^{p/2}$$

C'est l'inégalité cherchée avec $c_p = \|f^*\|_{2p/2-p}$.

Considérons une forme linéaire continue Γ sur $\underline{\underline{H}}^p_a(\lambda)$ $(1\leqq p\leqq 2)$, de norme γ . D'après (8), nous définissons une forme linéaire continue sur $\underline{\underline{H}}^2_a(\lambda)$ en posant

$$(9) \qquad J(M) = \Gamma(f_-\cdot M)$$

En effet, il résulte du théorème 6 de l'exposé I que, si M est une FAM qui appartient à $\underline{\underline{H}}^2_a(\lambda)$, $f_-\cdot M$ est une FAM, qui appartient à $\underline{\underline{H}}^p_a(\lambda)$ d'après (8). On prolonge alors à $\underline{\underline{H}}^2_a(\lambda)$ par continuité.

$\underline{\underline{H}}^2_a(\lambda)$ est un Hilbert. Rappelons comment il est mis en dualité avec lui même, et même un peu davantage : si U et V sont deux martingales locales quelconques (non nécessairement additives) on a l'inégalité de Kunita-Watanabe

$$\int_0^\infty|d[U,V]_s| \leqq (\ \int_0^\infty d[U,U]_s)^{1/2}(\int_0^\infty d[V,V]_s)^{1/2} \qquad \text{p.s.}$$

d'où l'on déduit , p et q étant conjugués

$$(10) \qquad E^\lambda[\int_0^\infty|d[U,V]_s|] \leqq (E^\lambda[[U,U]^{p/2}_\infty])^{1/p}\ (E^\lambda[[V,V]^{q/2}_\infty])^{1/q} = \|U\|_{\underline{\underline{H}}^p}\|V\|_{\underline{\underline{H}}^q}$$

On a une majoration du même type avec au dernier membre $c\|U\|_{\underline{\underline{H}}^1}\|V\|_{\underline{\underline{BMO}}}$ (inégalité de Fefferman).

Dans ces conditions, le produit scalaire sur $\underline{\underline{H}}^2(\lambda)$ est

$$(U,V) = E^{\lambda}[\int_0^{\infty} d[U,V]_s] = E^{\lambda}[[U,V]_{\infty}] ,$$

et cela vaut en particulier pour $H_a^2(\lambda)$. Par conséquent il existe un élément L de $\underline{\underline{H}}_a^2(\lambda)$ tel que, pour tout M de $\underline{\underline{H}}_a^2(\lambda)$

$$(11) \qquad J(M) = \Gamma(f_-.M) = E^{\lambda}[[M,L]_{\infty}]$$

L'idée de la démonstration est que, pour $K \in \underline{\underline{H}}_a^p$, on a $\Gamma(K)=E^{\lambda}[[K,N]_{\infty}]$ avec $N = \frac{1}{\bar{f}} \cdot L$, mais cela exige quelques précautions. En effet, f est strictement positive sur E, mais nulle en ∂, donc le processus f_- n'est pas strictement positif en général. Le lemme suivant entraîne que ce défaut n'est pas trop grave.

LEMME 3. <u>Soit</u> (i_t) <u>l'indicatrice de l'ensemble prévisible</u> $\{f_-=0\}$. <u>Pour toute</u> FAM[1](M_t) <u>on a</u> $i \cdot M=0$.

Le même résultat vaut alors, par continuité, pour les éléments des $\underline{\underline{H}}_a^r$.

DEMONSTRATION. On a $i=I_{]\zeta,\infty[} + i_{[S]}$, où S est le temps d'arrêt $\zeta_{\{(f\circ X_\zeta)_- = 0\}}$.

$I_{]\zeta,\infty[}\cdot M=0$, car M est arrêtée à ζ . Le temps d'arrêt S est prévisible, car $I_{[S]} = 1-i-I_{]\zeta,\infty[}$ est prévisible. Soit (S_n) une suite annonçant S sous P^{λ} ; comme $X_S=\partial$, X_S est mesurable par rapport à $\bigvee_n \underline{\underline{F}}^{\lambda}_{S_n}$, et d'après un résultat classique sur les processus de Markov, cela entraîne que $\underline{\underline{F}}^{\lambda}_S = \underline{\underline{F}}^{\lambda}_{S-} = \bigvee_n \underline{\underline{F}}^{\lambda}_{S_n}$. Donc toute martingale uniformément intégrable est continue P^{λ}-p.s. à l'instant S, et le même résultat vaut pour toute martingale locale. D'autre part, il est bien connu que pour tout temps prévisible S et toute martingale locale M, $I_{[S]}\cdot M$ est le processus $\Delta M_S I_{[S,\infty[}$. Ce processus est donc nul, et le lemme est établi.

Nous posons maintenant

$$(12) \qquad h_- = \frac{1}{f_-} \quad ; \quad j^n = I_{\{f_->1/n\}} \quad , \; h^n = h_- j^n \quad .$$

LEMME 4. <u>Soit</u> $\underline{\underline{U}}$ <u>l'ensemble des</u> $M \in \underline{\underline{H}}_a^p$ <u>tels que l'intégrale stochastique</u> $h_-\cdot M$ <u>existe et appartienne à</u> $\underline{\underline{H}}_a^2$. <u>Alors</u> $\underline{\underline{U}}$ <u>est dense dans</u> $\underline{\underline{H}}_a^p$.

DEMONSTRATION. Nous construisons pour $M \in \underline{\underline{H}}_a^p(\lambda)$ une suite d'éléments de $\underline{\underline{U}}$ qui converge vers M. Quitte à changer de notation, nous pouvons supposer que E tout entier est un ensemble plein associé à M.

D'après le théorème 3 de l'exposé I, appliqué à la FAC [M,M], il existe un processus optionnel et homogène $C=(C_t)_{t>0}$, partout > 0 et

1. Tout ceci s'étend bien entendu aux FAM sur Ω_G , où G est plein. Nous ne ferons plus ce genre de commentaires dans la suite.

borné par 1, et tel que la fonction $E^{\cdot}[\int_0^{\infty} C_s^2 d[M,M]_s]$ soit bornée sur E. Quitte à diminuer encore un peu C, nous pouvons supposer que le processus $|C_t \Delta M_t|$ est borné par 1. Montrons alors, en imitant le lemme 1, que l'intégrale optionnelle $V=C\cdot M$ appartient à $\underline{\underline{H}}_a^2$ (noter que c'est une FAM d'après le théorème 6 de l'exposé I, et qu'elle appartient à $\underline{\underline{H}}_a^p$). Nous posons

$$A_t = (\int_0^t C_s^2 d[M,M]_s)^{p/2}$$

Comme $C\leq 1$, nous avons $E^{\lambda}[A_{\infty}] \leq E^{\lambda}[[M,M]_{\infty}^{p/2}] < \infty$. D'autre part $E[A_{\infty}-A_T|\underline{\underline{F}}_T] = E^{X_T}[\int_0^{\infty} C_s^2 d[M,M]_s]$ est borné indépendamment du temps d'arrêt T, et comme $\Delta A_T \leq (C_T^2 \Delta M_T^2)^{p/2} \leq 1$, le potentiel gauche $j_T = E[A_{\infty}-A_{T-}|\underline{\underline{F}}_T]$ est borné par une constante a, indépendamment de T . Nous avons alors pour tout $r>1$ entier

$$E^x[A_{\infty}^r] \leq r!\, a^{r-1}\, E^x[A_{\infty}]$$

inégalité classique. Alors en intégrant par rapport à $\lambda(dx)$ nous avons aussi $E^{\lambda}[A_{\infty}^r] < \infty$ pour tout r entier, donc pour r réel

Prenant $r=2/p$, nous obtenons $E^{\lambda}[\int_0^{\infty} C_s^2 d[M,M]_s] < \infty$. Or cette quantité majore $\|C\cdot M\|_{\underline{\underline{H}}^2}$.

Maintenant, nous posons $Z^n = (nC\wedge 1)j^n$. Z^n est un processus optionnel homogène et borné , et $Z^n\uparrow j=1-i$ lorsque $n\to\infty$, de sorte que $Z^n\cdot M = K$ converge dans $\underline{\underline{H}}^p$ vers $(1-i)\cdot M = M$ (lemme 3). Nous avons d'autre part

$$E^{\lambda}[\int_0^{\infty} h_{s-}^2 d[K,K]_s] \leq E^{\lambda}[\int_0^{\infty} n^2 C_s^2 h_{s-}^2 j_s^n d[M,M]_s] \leq n^4 E^{\lambda}[\int_0^{\infty} C_s^2 d[M,M]_s] < \infty$$

car $h_{s-} j_s^n \leq n$. Le lemme est établi.

Passons à la caractérisation de la forme linéaire Γ . Nous avons construit plus haut le processus $L\in\underline{\underline{H}}_a^2$. Supposons pour un instant que l'intégrale stochastique $N=h_-\cdot L$ existe en tant que P^{λ}-martingale locale (en fait il nous faudra vérifier cela, par un chemin un peu détourné). Montrons que

(13) Pour $K\in\underline{\underline{U}}$, $E^{\lambda}[\int_0^{\infty} |d[K,N]_s|] \leq \gamma \|K\|_{\underline{\underline{H}}^p}$

(14) Pour $K\in\underline{\underline{U}}$, $\Gamma(K) = E^{\lambda}[[K,N]_{\infty}]$

En effet, soit $M=h_-\cdot K$, qui existe et appartient à $\underline{\underline{H}}_a^2$ par définition de $\underline{\underline{U}}$. On a $K=f_-\cdot M$ d'après le lemme 3 . Alors

$$\Gamma(K) = J(M) = E^{\lambda}[[M,L]_{\infty}] \qquad \text{avec } E^{\lambda}[\int_0^{\infty}|d[M,L]_s|] < \infty$$

Mais il s'agit ici d'i.s. prévisibles , donc

$E^{\lambda}[\int|d[M,L]_s|] = E^{\lambda}[\int h_{s-}|d[K,L]_s|] = E^{\lambda}[\int|d[K,N]_s|]$

ce qui donne un sens au membre de droite de (14), et le même argument consistant à faire passer h_- d'un côté de la virgule à l'autre montre que $\Gamma(K)=E^{\lambda}[[K,N]_{\infty}]$.

Reste à établir (13) (rappelons que γ est la norme de Γ). Nous utiliserons la remarque suivante : il existe un processus (ε_t) optionnel et homogène, à valeurs dans $\{-1,1\}$, donnant la densité de la fonctionnelle additive $[K,N]_s$ par rapport à sa valeur absolue $\int|d[K,N]_s|$. Posons $\bar{K}=\varepsilon\cdot K$ (intégrale optionnelle). On vérifie que $\bar{K}\in\underline{\underline{U}}$, et alors

$$E^{\lambda}[\int|d[K,N]_s|] = E^{\lambda}[\int\varepsilon_s d[K,N]_s] = E^{\lambda}[[\bar{K},N]_{\infty}] = \Gamma(\bar{K}) \leq \gamma\|\bar{K}\|_{\underline{\underline{H}}^p} \leq \gamma\|K\|_{\underline{\underline{H}}^p}$$

En fait, nous ne savons pas que N existe. Nous procédons ainsi. Nous posons $N^n=h_-j^n.L$, qui existe certainement puisque h_-j^n est borné par n, et $K^n=j^n\cdot K$, et nous posons $\Gamma_n[K]=\Gamma[K^n]$, $L^n=j^n\cdot L$. Alors pour $K\in\underline{\underline{U}}$ on a $\Gamma_n(K)=\Gamma(K^n)=E^{\lambda}[[K^n,L]_{\infty}] = E^{\lambda}[[K,L^n]_{\infty}]$; comme $h_-\cdot L^n=N^n$ existe, le raisonnement ci-dessus nous donne

(15) Pour $K\in\underline{\underline{U}}$ $E^{\lambda}[|d[K,N^n]_s|] \leq \gamma\|K\|_{\underline{\underline{H}}^p}$

(16) Pour $K\in\underline{\underline{U}}$ $\Gamma(K^n) = E^{\lambda}[[K,N^n]_{\infty}] = E^{\lambda}[[K^n,N^n]_{\infty}]$

Nous faisons les remarques suivantes : L est une FAM sur un ensemble Ω_G, où G est plein . Le théorème 6 de l'exposé I entraîne alors que N^n est une FAM sur Ω_G . De plus, on a $N^n=j^n\cdot N^{n+1}$, donc les processus croissants $[N^n,N^n]$ augmentent quand n croît. Si nous montrons alors que (pour $1<p\leq 2$; le cas p=1 sera étudié séparément) les normes des N^n dans $\underline{\underline{H}}^q(\lambda)$ sont uniformément bornées, les N^n formeront une suite de Cauchy dans $\underline{\underline{H}}^q$; L étant une FAM sur un ensemble Ω_G , où G est plein, le théorème 6 de l'exposé I entraîne que N^n est aussi une FAM sur Ω_G , et le théorème 1 de l'exposé II montre alors que N appartient à $\underline{\underline{H}}^q_a(\lambda)$. La dualité des $\underline{\underline{H}}^p_a(\lambda)$ est alors à la portée de la main.

SECONDE ETAPE

Les lemmes suivants constituent l'étape cruciale de la démonstration. Ils seront appliqués aux N^n , mais l'indice n est omis. Rappelons que les N^n appartiennent à $\underline{\underline{H}}^2_a(\lambda)$.

L'hypothèse de quasi-continuité à gauche est utilisée pour la première fois, de manière essentielle, dans la démonstration du lemme 5.

LEMME 5. <u>Soit</u> $N\in\underline{\underline{H}}^2_a(\lambda)$ <u>satisfaisant à</u> (13). <u>Soit</u> $(F_t)_{t>0}$ <u>un processus optionnel et homogène</u>, <u>et soit</u> $F^*=\sup_t|F_t|$. <u>On a alors</u>

(17) $E^{\lambda}[\int_0^{\infty} F_s^2\, d[N,N]_s]^{1/2} \leq \gamma(E^{\lambda}[(F^*)^{2p/2-p}])^{2-p/2p}$

<u>Ici</u> p <u>appartient à l'intervalle</u> [1,2[, <u>et on souligne que</u> p=1 <u>est permis</u>

DEMONSTRATION. Si le second membre de (17) vaut $+\infty$, il n'y a rien à démontrer ; supposons le donc fini, et notons le c . Comme F n'intervient que par son cérré, nous pouvons supposer $F \geq 0$; remplaçant alors F par $F \wedge nf_-$ et faisant tendre n vers l'infini, nous pouvons supposer de plus que F est majoré par un multiple de f_- .

Soit M un élément de la boule unité de $\underline{\underline{H}}^2_a(\lambda)$. Appliquons l'inégalité de Hölder aux exposants conjugués $2/(2-p)$ et $2/p$

$$\|F\cdot M\|_{\underline{\underline{H}}^p} \leqq (E^\lambda[(\int_0^\infty F_s^2 d[M,M]_s)^{p/2}])^{2/p} \leqq (E^\lambda[(F^*)^p[M,M]_\infty^{p/2}])^{2/p}$$

(la première inégalité est en fait une égalité s'il y a quasi-continuité à gauche ; sans cette hypothèse, cf. le séminaire X p.352 th. 38).

$$\leqq (E^\lambda[(F^*)^{2p/2-p}])^{(2-p)/2p}\,(E^\lambda[[M,M]_\infty])^{1/2} = c.1$$

D'autre part, comme F est majoré par un multiple de f_- , nous avons $F\cdot M \in \underline{\underline{U}}$, et (13) nous donne

$$E^\lambda[\int_0^\infty |d[F\cdot M,N]_s|] \leqq \gamma\|F\cdot M\|_{\underline{\underline{H}}^p} \leqq \gamma c$$

en particulier, en posant $K=F\cdot N$

$$|E^\lambda[[M,K]_\infty]| = |E^\lambda[\int F_s d[M,N]_s]| \leqq \gamma c$$

Or $K=F.N$, N appartient à $\underline{\underline{H}}^2_a$, F est borné, donc $K \in \underline{\underline{H}}^2_a$. Faisant parcourir à N la boule unité de $\underline{\underline{H}}^2_a$, il vient

$$\|K\|_{\underline{\underline{H}}^2_a} \leqq \gamma c$$

Le côté gauche est égal au premier membre de (17) si la martingale locale N est quasi-continue à gauche. Sinon, ce lemme et le reste de la démonstration s'écroulent. Voir cependant l'appendice.

Remplaçant F par $\sqrt{F}$ nous obtenons sous les memes hypothèses

<u>Si</u> F <u>est optionnel</u>, <u>homogène et positif</u>, <u>on a</u>

$$E^\lambda[\int_0^\infty F_s d[N,N]_s] \leqq \gamma^2 E^\lambda[(F^*)^{p/(2-p)}]^{2-p/p} \tag{18}$$

LEMME 6. <u>Avec les mêmes hypothèses sur</u> N, <u>nous avons</u>

$$\|N\|_{\underline{\underline{H}}^q} \leqq \frac{q}{2}\gamma \tag{19}$$

DEMONSTRATION. Nous devons rappeler d'abord quelques résultats sur les projections optionnelles, vrais sur des espaces probabilisés filtrés quelconques. Soient α et β deux exposants conjugués ($1<\alpha<\infty$) et $(Z_t)_{t>0}$ un processus mesurable, avec $Z^* = \sup_t |Z_t|$. Soit Z^o sa projection optionnelle. Le processus Z^o étant dominé par la martingale $E[Z^*|\underline{\underline{F}}_t]$, l'inégalité de Doob nous dit que

$$\|(Z^o)^*\|_{L^\alpha} \leqq \beta\|Z^*\|_{L^\alpha}$$

Ce résultat vaut aussi pour la projection cooptionnelle $(Z_t^{\hat{o}})_{t>0}$ de (Z_t) sur notre espace Ω habituel (cf. Séminaire VIII, p. 262-287) qui n'est guère que la projection optionnelle sur la famille de tribus du processus de Markov retourné. Cette projection est un processus mesurable et homogène, dont nous prenons à nouveau la projection optionnelle $Z_t^{\hat{o}o} = U_t$, et nous avons

(20) $$\|U^*\|_{L^\alpha} \leqq \beta^2 \|Z^*\|_{L^\alpha}$$

Supposons que le processus Z soit positif ; la mesure aléatoire $d[N,N]_s$ est à la fois optionnelle et cooptionnelle, donc nous avons

$$E^\lambda[\int_0^\infty Z_s d[N,N]_s\ ] = E^\lambda[\int_0^\infty U_s d[N,N]_s\ ]$$

Prenons en particulier pour (Z_t) un processus constant : $Z_t(\omega)=H(\omega)$ pour tout $t>0$; désignant toujours par (U_t) le processus $Z^{\hat{o}o}$ nous avons

$$E^\lambda[H[N,N]_\infty\ ] = E^\lambda[\int Z_s d[N,N]_s] = E^\lambda[\int U_s d[N,N]_s]$$

$$\leqq \gamma^2 E^\lambda[(U^*)^{p/(2-p)}]^{(2-p)/p} = \gamma^2 \|U^*\|_{L^\alpha}$$

d'après (18), avec $\alpha=p/2-p$, dont l'exposant conjugué est $\beta=q/2$. Ainsi

$$E^\lambda[H[N,N]_\infty\ ] \leqq \gamma^2\beta^2\|H\|_{L^\alpha} \quad \text{pour toute v.a. } H \geqq 0$$ d'après (20)

et finalement $\|[N,N]_\infty\|_{L^\beta} \leqq \gamma^2\beta^2$, qui équivaut à (19).

Nous avons tout ce qu'il nous faut pour établir le théorème principal de cet exposé.

THEOREME 2. <u>Pour $1<p<\infty$, le dual de $\underline{\underline{H}}_a^p(\lambda)$ s'identifie à $\underline{\underline{H}}_a^q(\lambda)$, ces deux espaces étant mis en dualité par la forme bilinéaire</u> (induite sur $\underline{\underline{H}}_a^p \times \underline{\underline{H}}_a^q$ par la forme sur $H^p \times H^q$)

$$(M,N) = E^\lambda[[M,N]_\infty\ ] = E^\lambda[M_\infty N_\infty\ ]$$

DEMONSTRATION. On sait (inégalité de Kunita-Watanabe) que cette forme bilinéaire est continue. En particulier, la norme de la forme linéaire sur $\underline{\underline{H}}_a^p$ associée à $N \in \underline{\underline{H}}_a^q$ est au plus égale à $\|N\|_{\underline{\underline{H}}^q}$.

Inversement, nous venons de voir que toute forme linéaire continue Γ sur $\underline{\underline{H}}_a^p$ $(1<p<2)$ de norme γ , satisfait à

$$\text{pour } M \in \underline{\underline{U}} ,\quad \Gamma(M) = (M,N) ,\ \text{avec } N \in \underline{\underline{H}}_a^q ,\ \|N\|_{\underline{\underline{H}}^q} \leqq \frac{q}{2}\gamma$$

Comme N appartient à $\underline{\underline{H}}_a^q$, cette relation vraie sur le sous-espace dense $\underline{\underline{U}}$ de $\underline{\underline{H}}_a^p$ est vraie sur $\underline{\underline{H}}_a^p$ entier, et le dual de $\underline{\underline{H}}_a^p$ s'identifie à $\underline{\underline{H}}_a^q$.

Ce résultat n'a été établi que pour $1<p<2$; mais $\underline{\underline{H}}_a^p$ est un sous-espace fermé de $\underline{\underline{H}}^p$ réflexif , il est donc réflexif, et le dual de $\underline{\underline{H}}_a^q$ s'identifie à $\underline{\underline{H}}_a^p$. Le cas p=2 échappe à ce raisonnement, mais il est évident.

LE PROBLEME DU DUAL DE $\underline{\underline{H}}^1_a(\lambda)$

Nous supposons maintenant que p=1. Nous avons établi (à une nuance près dont nous parlerons après l'énoncé) le résultat suivant (cf. (18))

<u>Soit</u> Γ <u>une forme linéaire sur</u> $\underline{\underline{H}}^1_a(\lambda)$, <u>de norme</u> γ . <u>Il existe alors un ensemble plein</u> G, <u>et une</u> FAM N <u>sur</u> Ω_G <u>tels que pour</u> $M\in\underline{\underline{U}}$ (dense dans $\underline{\underline{H}}^1_a$)

(21) $\quad E^\lambda[\int|d[M,N]_s|] \leqq \gamma\|M\|_{H^1} \quad , \quad \Gamma(M) = E^\lambda[[M,N]_\infty]$

<u>et alors nous avons, pour tout processus</u> $F=(F_t)_{t>0}$, <u>optionnel</u>, <u>homogène</u>,

(22) $\quad E^\lambda[\int_0^\infty|F_s|d[N,N]_s] \leqq \gamma^2 E^\lambda[F^*] \qquad (F^* = \sup_t|F_t|)$

Seulement, à l'inverse de ce qui se passait pour p>1, nous ne saurons ni exprimer autrement la propriété (22) comme dans le lemme 6, ni montrer qu'une FAM qui satisfait à (22) définit une forme linéaire continue sur $\underline{\underline{H}}^1_a(\lambda)$. Il y aura cependant deux résultats positifs intéressants, par lesquels nous commencerons.

Quelle est la "nuance" dont il était question plus haut ? Dans l'étude de $\underline{\underline{H}}^p_a$ pour p>1, nous avons construit N par un chemin détourné, en passant par des FAM N^n qui convergeaient vers N dans $\underline{\underline{H}}^q_a$. Nous ne pouvons plus procéder ainsi, car nous ne savons plus dans quel espace faire converger les N^n. Nous construisons dons N, suivant une méthode de Chung-Walsh, par une attaque directe.

La méthode de Chung-Walsh consiste à ne pas rendre absorbant le point ∂, mais à ajouter toute une hiérarchie de points nouveaux ∂_1, ∂_2 ... le processus sautant de ∂ à ∂_1 , de ∂_1 à ∂_2... au bout d'un temps exponentiel de paramètre 1. Désignant par $\hat{E}$ l'ensemble $E\cup\{\partial,\partial_1,\partial_2,\ldots\}$, la description ci-dessus permet de construire un semi-groupe $(\hat{P}_t)$ qui induit (P_t) sur E, et qui est transient sur $\hat{E}$ entier.

Appelons niveau -1 l'ensemble E, niveau 0 l'ensemble $\{\partial\}$, niveau 1 l'ensemble $\{\partial_1\}$... Munissons $\hat{E}$ de la topologie somme des différents niveaux, appelons $\hat{\Omega}$ l'ensemble des applications continues à droite de $\mathbb{R}_+$ dans $\hat{E}$ dont le niveau est une fonction croissante du temps, n'ayant que des sauts unité. Alors Ω est un sous-ensemble de $\hat{\Omega}$, formé des trajectoires qui ne dépassent jamais le niveau 0. Si nous munissons $\hat{\Omega}$ de la mesure $\hat{P}^\lambda$, il est très facile de voir que $\underline{\underline{H}}^p_a(\lambda)$ est isométrique au sous-espace de $\hat{\underline{\underline{H}}}^p_a(\lambda)$ formé des fonctionnelles arrêtées au temps $\zeta=T_{E^c}$. Une forme linéaire Γ sur $\underline{\underline{H}}^p_a(\lambda)$ se prolonge en une forme linéaire $\hat{\Gamma}$ sur $\hat{H}^p_a(\lambda)$ par la formule $\hat{\Gamma}(M)=\Gamma(M^\zeta)$ (arrêt à ζ) ; d'autre part, le nouveau semi-groupe a une durée de vie infinie et est transient sur $\hat{E}$ tout entier, et il n'y a donc aucune difficulté quant à la définition de N . Ayant défini N sur $\hat{\Omega}$, N^ζ est une FAM sur Ω qui définit la même forme linéaire sur $H^p_a(\lambda)$, et nous avons ce que nous désirons. Le lecteur préférera peut être cette méthode, même lorsque p>1.

Voici le premier résultat <<positif>>. Comme d'habitude, nous raisonnons sur E tout entier au lieu d'un ensemble plein.

THEOREME 3. Soit N une FAM satisfaisant à (22). Il existe un ensemble plein G tel que, pour toute loi μ portée par G, le processus $|\Delta N_t|$ soit borné par γ à un ensemble P^{μ}-évanescent près.

DEMONSTRATION. Nous utiliserons une version parfaite de la FAM N (exposé I). La fonction

$$a(x) = P^x\{ N_{.} \text{ admet un saut } >\gamma \text{ en valeur absolue } \}$$

est alors excessive . Si nous montrons que a est λ-négligeable, il nous suffira de prendre $G=\{a=0\}$ pour obtenir l'ensemble plein cherché. Tout revient donc à travailler sous la seule mesure initiale λ.

Soit un nombre $\delta>\gamma$. Le processus $\sum_{s\leq t} |\Delta N_t| I_{\{|\Delta N_t|>\delta\}} = C_t$ est une FAC, et d'après le théorème 3 de l'exposé I il existe une fonction g, partout >0 sur E, telle que la fonction $E^{\cdot}[\int_0^{\infty} g\circ X_s dC_s]$ soit bornée sur E. Soit f la fonction du lemme 1, et soit $j=f\wedge g$, fonction >0 sur E . Soit $\varepsilon>0$, et soit $F_t=I_{\{|\Delta N_t|\geq\delta\ ,\ j(X_t)\geq\varepsilon\}}$; on a $F^*=I_A$, où A est l'ensemble $\{ \exists t>0 : |\Delta N_t|\geq\delta,\ j(X_t)\geq\varepsilon \}$, et comme $E^{\lambda}[f^{*2}]<\infty$ (lemme 1) on a $P^{\lambda}(A)<\infty$. Avec cette définition de (F_t), le côté gauche de (22) majore $\delta^2 P^{\lambda}(A)$, le côté droit vaut $\gamma^2 P^{\lambda}(A)$, et comme $\delta>\gamma$, $P^{\lambda}(A)<\infty$, c'est que $P^{\lambda}(A)=0$, donc N n'a pas de sauts $\geq \delta$... Hélas, non, pas entièrement:on a seulement montré que N n'a pas de saut $\geq\delta$ tel que $j(X_t)>0$, et cela laisse la place pour un saut $\geq\delta$ à l'instant ζ ; mais nous connaissons le remède, qui consiste à travailler sur $\hat{E}$, avec un semi-groupe transient dont la durée de vie est infinie. Le théorème 3 est établi.

THEOREME 4. Les relations (21) sont vraies, non seulement pour $M\in\underline{\underline{U}}$, mais pour $M\in\underline{\underline{H}}^1_a(\lambda)$.

DEMONSTRATION. Soit $M\in\underline{\underline{H}}^1_a(\lambda)$. Nous avons construit dans la démonstration du lemme 4 des martingales $M^n=Z^n\cdot M$ qui convergent vers M dans $\underline{\underline{H}}^1_a(\lambda)$, avec des processus $Z^n \leq 1$ qui vont en croissant vers 1 p.p. pour le processus croissant [M,M], et tels que $M^n\in\underline{\underline{U}}$. Ecrivons (21) pour les M^n : $E^{\lambda}[\int|d[M^n,N]_s|] \leq \gamma\|M^n\|_{\underline{\underline{H}}^1(\lambda)} \leq \gamma\|M\|_{\underline{\underline{H}}^1(\lambda)}$

Mais le premier membre vaut $E^{\lambda}[\int Z^n_s|d[M,N]_s|]$, il tend donc vers $E^{\lambda}[\int|d[M,N]_s|]$ (car d[M,N] est absolument continu par rapport à d[M,M]), et la première des relations (21) passe à la limite.

Mais alors Γ et la forme linéaire continue $M \longmapsto E^{\lambda}[[\ ,N]_{\infty}]$ coïncident sur $\underline{\underline{U}}$, donc sur $\underline{\underline{H}}^1_a(\lambda)$ entier, et la seconde relation est vraie elle aussi.

Nous tenons nos deux résultats positifs. D'une manière imprécise, c'est à dire en oubliant le rôle des ensembles pleins, ils expriment à eux deux que le dual de $\underline{\underline{H}}^1_a(\lambda)$ est un espace de FAM à sauts bornés.

LE DUAL DE $\underline{\underline{H}}^1_a(\lambda)$ EST IL $\underline{\underline{BMO}}_a(\lambda)$?

Revenons pour un instant à la théorie générale des processus : la situation y est tout analogue à (22) . Le dual de $\underline{\underline{H}}^1$ y est un espace de martingales locales N telles que

(23) Pour tout processus optionnel $Z \geq 0$, $E[\int_0^\infty Z_s d[N,N]_s] \leq cE[Z^*]$.

Mais ici la conclusion est immédiate : prenant $Z=I_{[T,\infty[}$, où Z est un temps d'arrêt, nous en déduisons $E[[N,N]_\infty-[N,N]_{T-}] \leq cP\{T<\infty\}$, et remplaçant T par T_A $(A \in \underline{\underline{F}}_T)$ $E[[N,N]_\infty-[N,N]_{T-}|\underline{\underline{F}}_T] \leq c$ p.s.. Autrement dit, N appartient à $\underline{\underline{BMO}}$. La condition (23) exprime donc entièrement la continuité de la forme linéaire $M \mapsto E[[M,N]_\infty]$ sur $\underline{\underline{H}}^1$.

D'autre part, l'appartenance à $\underline{\underline{BMO}}$ peut se déduire aussi de l'ensemble des deux conditions suivantes :

(24) a) N est à sauts bornés (donc localement de carré intégrable)

b) Pour tout processus prévisible $Z \geq 0$, $E[\int_0^\infty Z_s d[N,N]_s] \leq cE[Z^*]$.

En effet, b) permet de reprendre le raisonnement précédent avec $Z=I_{]T,\infty[}$, et il en résulte que [N,N] a un potentiel borné, ce qui, combiné avec a), entraîne l'appartenance à $\underline{\underline{BMO}}$.

Revenons maintenant aux processus de Markov ; nous avons déja démontré l'analogue de 24 a). Nous sommes donc tentés de remplacer (22) par

(25) Pour tout processus prévisible homogène $Z \geq 0$, $E^\lambda[\int Z_s d[N,N]_s] \leq cE[Z^*]$

(avec $c=\gamma^2$) et d'en tirer les conséquences. Noter que, N étant à sauts bornés, la FAC $\langle N,N\rangle$ existe, et que (25) peut aussi bien être énoncé pour $\langle N,N\rangle$ que pour [N,N]. Ce que nous espérons démontrer, c'est que $N \in \underline{\underline{BMO}}_a(\lambda)$, c'est à dire (compte tenu du théorème 3, qui règle la question des sauts) qu'il existe un ensemble plein G sur lequel la fonction $E^\cdot[\langle N,N\rangle_\infty]$ est bornée. Et malheureusement, nous n'arriverons pas à déduire cela de (25).

Pour montrer les difficultés, nous ne donnerons que plus de poids à nos raisonnements en nous plaçant sous les meilleures conditions possibles : λ bornée, et ne chargeant pas les ensembles de potentiel nul ; durée de vie finie, afin de pouvoir retourner le temps ; processus de Hunt ainsi que son dual.

On perd certainement très peu d'information en restreignant (25) aux processus Z prévisibles et cooptionnels . Or un théorème d'Azéma dit que (pour un processus ayant un bon dual) les processus prévisibles et co-optionnels sont de la forme $(f\circ X_{t-})_{t>0}$. On est donc ramené à la forme

(26) $\quad E^{\lambda}[\int f\circ X_{s-}\, d\langle N,N\rangle_s\,] \leqq cE^{\lambda}[\ \sup_s f\circ X_{s-}]$

Du côté gauche, on peut (si on veut) remplacer X_{s-} par X_s , car $\langle N,N\rangle$ est continue. Il suffit en fait d'écrire cela pour les ensembles , car si (26) est vraie pour les indicatrices d'ensembles, on retrouve (26) pour f quelconque en l'écrivant pour $I_{\{f>t\}}$ et en intégrant en t de 0 à $+\infty$. Autrement dit, (26) équivaut à

(27) $\quad E^{\lambda}[\int I_A\circ X_s\, d\langle N,N\rangle_s\,] \leqq c\langle\lambda,e_A^{!}\rangle \qquad$ (ou $I_A\circ X_{s-}$)

où $e_A^{!}(x) = P^x\{\ \exists t>0 : X_{t-}\in A\}$. Pour un processus de Hunt, Hunt a montré que $e_A^{!}\leqq e_A = P^{\cdot}\{\exists t>0 : X_t\in A\}$. Pour un processus dont le dual est de Hunt, on a par retournement du temps que $e_A\leqq e_A^{!}$, d'où l'égalité.

Soit μ la mesure associée à la fonctionnelle $\langle N,N\rangle$; alors $U(\mu f)= U_{\langle N,N\rangle}f$ pour toute fonction positive f, et (27) s'écrit

(28) $\quad \langle\lambda,U(\mu I_A)\rangle \leqq c\langle\lambda,e_A\rangle$ pour tout A , et on rappelle[1] $\langle\lambda,U(\mu I_A)\rangle=\mu(A)$

et nous saurions démontrer que le dual de $\underline{\underline{H}}^1_a(\lambda)$ est $\underline{\underline{BMO}}_a$ si nous savions que

(29) Une mesure μ qui satisfait à (28) a un potentiel $U\mu$ borné

[Noter que si $U\mu$ est borné par c, et μ est associée à la FAC continue $\langle N,N\rangle$, alors $g=U(\mu I_A)$ satisfait à $g\leqq c$, $P_Ag=g$, donc $g\leqq P_Ac=ce_A$, et (28) est bien satisfaite]. Or je dis que si le copotentiel $\hat{U}\mu$ est borné par c, on a aussi (28). En effet, qu'est ce que cela signifie ? que la densité de Radon-Nikodym $\mu U/\lambda U$ est bornée par c, autrement dit que si f est positive, $\langle\mu,Uf\rangle \leqq c\langle\lambda,Uf\rangle$, ou que si h est excessive, $\langle\mu,h\rangle$ $c\langle\lambda,h\rangle$. Mais alors , μ étant associée à une FAC continue, on a $I_A\leqq e_A$ μ-p.p., donc $\langle\mu,I_A\rangle \leqq c\langle\lambda,e_A\rangle$, c'est à dire (28). Tout cela peut d'ailleurs se voir en théorie d'Azéma, et en toute généralité (sans hypothèses de dualité).

Dans ces conditions (29) signifierait[2] qu'une mesure μ qui ne charge pas les semi-polaires, et a un copotentiel borné, a aussi un potentiel borné ? C'est incroyable. Mokobodzki m'a dit qu'en fait il existe des exemples de mesures satisfaisant à (28), et qui ne sont pas somme d'une mesure ayant un potentiel borné et d'une mesure ayant un copotentiel borné, mais il n'a jamais rédigé (ni expliqué) cela. En tout cas, la méthode de démonstration échoue, et je crois quant à moi que le dual de $\underline{\underline{H}}^1_a(\lambda)$ n'est pas $\underline{\underline{BMO}}_a(\lambda)$.

1. Cela exprime que le copotentiel $\hat{U}\lambda$ est égal à 1.
2. Raisonnement heuristique... μ n'est pas quelconque ici.

Evidemment, il resterait encore une possibilité : que le dual de $\underline{\underline{H}}^1_a(\lambda)$ soit $\underline{\underline{BMO}}_a(\lambda)$, mais que la propriété (22), ou (sauts bornés et (28)), ne suffise pas - contrairement à ce qui se passe en théorie générale des processus - à exprimer que $M \longmapsto E^{\lambda}[[M,N]_{\infty}]$ est continue sur $\underline{\underline{H}}^1_a(\lambda)$. J'aurais tendance à croire qu'en fait les deux difficultés sont présentes à la fois : entre les trois propriétés ($N \in \underline{\underline{BMO}}_a(\lambda)$), (N définit une forme linéaire continue sur $\underline{\underline{H}}^1_a(\lambda)$) et (22), on a des implications dans le sens $\Longrightarrow$, mais aucune implication dans le sens $\Longleftarrow$.

APPENDICE : LE DUAL DE $\underline{\underline{H}}^p_a(\lambda)$, $1<p<\infty$, SANS HYPOTHESE DE HUNT

Nous nous proposons ici de reprendre la démonstration du théorème 2 (dual de $\underline{\underline{H}}^p_a(\lambda)$, $1<p<\infty$[1]) sans exiger la quasi-continuité à gauche, ce qui exige une méthode un peu différente. Nous utiliserons la méthode du paragraphe sur le dual de $\underline{\underline{H}}^1_a(\lambda)$ pour nous simplifier la vie : rappelons qu'elle permet de se ramener à un processus sur un espace $\hat{E}$, à durée de vie infinie et transient sur l'espace entier. Il existe alors (lemme 1) une fonction $f=Ug>0$ sur $\hat{E}$, telle que le processus $f_-=(f\circ X)_-$ soit localement borné inférieurement, nous posons $h_-=1/f_-$, et nous désignons par $\underline{\underline{U}}$ (lemme 4) l'ensemble des $M\in\underline{\underline{H}}^p_a$ tels que $h_-.M$ - qui maintenant a toujours un sens - appartienne à $\underline{\underline{H}}^2_a$. Nous savons aussi ((13),(14)) qu'il existe une FAM N (sur un ensemble plein G, mais nous ferons comme si G était l'espace entier) telle que

$$\text{pour } K\in\underline{\underline{U}}\ ,\ E^{\lambda}[\textstyle\int|d[K,N]_s|] \leqq \gamma\|K\|_{\underline{\underline{H}}^p} \quad\text{et}\quad \Gamma(K)=E^{\lambda}[[K,N]_{\infty}]$$

Il s'agit de vérifier que N appartient à $\underline{\underline{H}}^q_a(\lambda)$.

Tout d'abord, le lemme 5 marche évidemment pour les processus F homogènes et <u>prévisibles</u> , et la démonstration du lemme 6 entraîne (en utilisant des projections prévisibles au lieu d'optionnelles) que la partie continue N^c de N appartient à $\underline{\underline{H}}^q_a(\lambda)$. Ce sont donc les sauts qui nous intéressent.

Nous utilisons un raffinement du théorème 3 de l'exposé I : il existe un processus optionnel et homogène $(C_t)_{t>0}$, >0 sur $\mathbb{R}^*_+\times\Omega$ et tel que la fonction $E^{\bullet}[\int C_s d[N,N]_s]$ soit, non seulement bornée, mais majorée par un multiple de la fonction excessive $f=Ug>0$. L'existence d'un tel processus peut s'établir, soit directement, soit en appliquant le théorème 3 de l'exposé I au semi-groupe $\frac{1}{f}P_t(.,fdy)$. En particulier, la fonction $E^{\bullet}[\int C_s d[N,N]_s]$, majorée par un multiple de f, est λ-intégrable si f a été bien choisie.

1. Comme plus haut, on supposera $1<p<2$ (le cas général s'y ramène).

Soit H l'ensemble homogène et optionnel $\{(t,\omega) : \Delta N_t(\omega)\neq 0\}$. Nous représentons H comme réunion des ensembles homogènes et optionnels

$$H_k = \{ \tfrac{1}{k} < |\Delta N_t| < k \ ,\ C_t > 1/k \ ,\ f_{t-} > 1/k \}$$

et nous faisons quelques remarques : la fonctionnelle $\sum_{s\leq t} I_{H_k}(s) = J_t$ est majorée par $k^3\int_0^t C_s d[N,N]_s$, donc la fonction $E^{\cdot}[J_\infty]$ est bornée et majorée par un multiple de f. Comme les sauts de J sont bornés par 1, le potentiel gauche de J est borné, et nous avons (cf. démonstration du lemme 4) une inégalité de la forme $E^{\cdot}[J_\infty^r] \leq r!a^{r-1}E^{\cdot}[J_\infty]$ pour r entier, donc $E^\lambda[J_\infty^r] < \infty$ pour tout r.

Nous démontrons ensuite :

LEMME 7. <u>Soit</u> F <u>un processus homogène et optionnel</u>. <u>Alors</u>

(30) $$E^\lambda[\sum_s |F_s \Delta N_s|] \leq c(E^\lambda[(\sum_{s\in H} F_s^2)^{p/2}])^{1/p}$$

DEMONSTRATION. Par convergence monotone, on se ramène au cas où F est <u>borné</u> en valeur absolue. Puis, remplaçant F par FI_H , au cas où F est nul hors de H . Puis, à nouveau par convergence monotone, au cas où F est nul hors de H_k . Soit alors une constante m bornant |F) ; on a

$$\sum_s |F_s \Delta N_s| \leq mk \sum_s I_{H_k}(s) \leq mkJ_\infty$$

et le côté gauche de (30) est fini. Il suffit alors de démontrer l' inégalité analogue, mais avec la valeur absolue à l'extérieur

(31) $$|E^\lambda[\sum_s F_s \Delta N_s]| \leq c(\ldots)^{1/p}$$

car (31), appliquée à $F_s \mathrm{sgn}(\Delta N_s)$, nous donne (30). Dans ces conditions, considérons la fonctionnelle additive

$$A_t = \sum_{s\leq t} F_s$$

On a $\int_0^t |dA_s| \leq mJ_t$, donc A admet une compensatrice prévisible $\tilde{A}$, et nous pouvons considérer la FAM $M_t = A_t - \tilde{A}_t$. Comme $E^{\cdot}[\int |dM_s|]$ est bornée et λ-intégrable, la v.a. $\int |dM_s|$ appartient à tout $L^r(\lambda)$, et il en est de même de M^* . Donc M appartient à tout $\underline{\underline{H}}_a^r(\lambda)$. L'intégrale stochastique $h_-\cdot M$ est alors la compensée de $h_- * A$, et comme h_- est borné sur H_k le même raisonnement montre que $h_-\cdot M$ appartient à tout $\underline{\underline{H}}_a^r(\lambda)$, en particulier à $\underline{\underline{H}}_a^2$, et cela signifie que $M\in\underline{\underline{U}}$. On a donc

$$\Gamma(M) = E^\lambda[[M,N]_\infty] \quad , \quad \text{et} \quad |E^\lambda[[M,N]_\infty]| \leq \gamma \|M\|_{\underline{\underline{H}}^p}$$

Et maintenant, on établit en théorie des martingales que

(32) $$E[[M,N]_\infty] = E[\sum_s \Delta A_s \Delta N_s] = E[\sum_s F_s \Delta N_s]$$

(33) $$\|M\|_{H^p} = (E[(\sum_s \Delta M_s^2)^{p/2}])^{1/p} \leq a(E[(\sum_s F_s^2)^{p/2}])^{1/p}$$

(on dira un mot tout à la fin de l'exposé sur ces inégalités). Le lemme en résulte aussitôt.

Il reste maintenant à établir que $(\sum_s \Delta N_s^2)^{1/2}$ appartient à L^q. A cet effet, nous faisons la remarque suivante : soit Z un processus borné mesurable, mais par ailleurs quelconque, et soit $F=\hat{\hat{Z}}^{oo}$ la projection optionnelle de la projection cooptionnelle de Z . Alors on a (l'hypothèse p>1 joue un rôle essentiel)

(34) $\quad E^\lambda[(\sum_{s\in H} F_s^2)^{p/2}] \leq a_p E^\lambda[(\sum_{s\in H} Z_s^2)^{p/2}]$

Pour voir cela, on réduit le cas de H à celui des H_k , puis on traite successivement le cas de la projection optionnelle et celui de la projection cooptionnelle (qui revient au précédent par retournement). Pour traiter la projection optionnelle , on représente H_k comme réunion de graphes disjoints de temps d'arrêt $T_1<T_2\ldots$ et, en posant $\underline{\underline{F}}_{T_n}=\underline{\underline{G}}_n$, à une inégalité du type

(35) $\quad E^\lambda[\,(\sum_n E[Z_n|\underline{\underline{G}}_n]^2)^{p/2}] \leq a_p E^\lambda[(\sum_n Z_n^2)^{p/2}]$

Cette inégalité, due à Stein , est démontrée quelque part dans les séminaires, mais je n'en ai plus la référence. Je la démontre donc aussi à la fin.

D'autre part, on a aussi $E^\lambda[\sum_s F_s I_{H_k}(s)\Delta N_s] = E^\lambda[\sum_s Z_s I_{H_k}(s)\Delta N_s]$, car la mesure aléatoire $\sum_{s\in H_k} \Delta N_s \varepsilon_s$ est à la fois optionnelle et cooptionnelle. Raisonnant comme on l'a fait sur F, on déduit de (30) et (34) que

$$E^\lambda[\sum_s |Z_s \Delta N_s|] \leq c'(E^\lambda[(\sum_{s\in H} Z_s^2)^{p/2}])^{1/p}$$

Représentons H comme réunion d'une suite de graphes disjoints de v.a. T_n (pas nécessairement des t.a.), posons $\Delta_n = \Delta N_{T_n} I_{\{T_n<\infty\}}$. Nous déduisons de (36) que pour <u>toute</u> suite (Z_n) de v.a. réelles, nous avons

$$E^\lambda[\sum_n |Z_n\Delta_n|\,] \leq c'(E^\lambda[(\sum_n Z_n^2)^{p/2}])^{1/p}$$

Mais ceci nous dit que la suite (Δ_n) définit une forme linéaire continue sur l'espace $L^p(\ell^2)$, elle appartient donc à $L^q(\ell^2)$, et le théorème est établi.

DEMONSTRATION DES INEGALITES DE MARTINGALES UTILISEES

Nous commençons par (35). Posons $E[Z_n|\underline{\underline{G}}_n]=z_n$, $U_n=Z_n^2$, $E[U_n|\underline{\underline{G}}_n]=u_n$. Si p est $\geqq 2$, nous avons d'après l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy

$$\| \sum_n u_n \|_{L^{p/2}} \leq c_p \| \sum_n U_n \|_{L^{p/2}}$$

et cette inégalité est meilleure que (35), car $z_n^2 \leq u_n$. Supposons donc p<2 . Pour être certains que tout a un sens, nous pouvons supposer que $Z_n=0$ pour n assez grand. Alors nous avons

$$\| (\textstyle\sum_n z_n^2)^{1/2}\|_{L^p} = \|(z_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{L^p(\ell^2)} = \sup E[\textstyle\sum_n z_n H_n]$$

la suite (H_n) parcourant la boule unité du dual $L^q(\ell^2)$ de $L^p(\ell^2)$. Mais posons $h_n=E[H_n|\underline{\underline{G}}_n]$; nous avons $q\geq 2$, donc le résultat précédent entraîne que $\|h_n\|_{L^q(\ell^2)}$ reste borné par une constante a_q , et alors

$$E[\textstyle\sum_n z_n H_n] = E[\textstyle\sum_n Z_n h_n] \leq \|(h_n)\|_{L^q(\ell^2)} \|(Z_n)\|_{L^p(\ell^2)}$$
$$\leq a_q \|(\textstyle\sum_n Z_n^2)^{1/2}\|_{L^p} .$$

Passons à (33) : il s'agit de démontrer que si A est un processus à variation intégrable, M la martingale compensée de A, alors $\|M\|_{\underline{\underline{H}}^p} \leq a\|(\sum_s \Delta A_s^2)^{1/2}\|_{L^p}$. Il suffit de traiter cela lorsque A n'a pas de partie continue, et ne saute qu'en des instants $T_1,\dots,T_N$, où chaque temps d'arrêt T_i est soit totalement inaccessible, soit prévisible. On coupe alors en deux le processus A, pour se ramener au cas où les sauts de A sont portés, ou par des temps d'arrêt totalement inaccessibles $T_1<T_2\dots<T_N$, ou par des temps prévisibles $T_1<\dots<T_N$. Le premier cas est trivial, car $[M,M]_\infty$ est <u>égal</u> à $\sum_s \Delta A_s^2$. Dans le second cas, on a $\Delta M_{T_i} = \Delta A_{T_i} -E[\Delta A_{T_i}|\underline{\underline{F}}_{T_i-}]^2$, donc

$$\| (\textstyle\sum \Delta M_{T_i}^2)^{1/2}\|_{L^p} \leq \|(\textstyle\sum \Delta A_{T_i}^2)^{1/2}\|_{L^p} + \|(\textstyle\sum E[\Delta A_{T_i}|\underline{\underline{F}}_{T_i-}]^2)^{1/2}\|_{L^p}$$

et on applique (35).

Reste (32). C'est tout simple : on se ramène à A comme ci-dessus , et par arrêt au cas où N est dans $\underline{\underline{H}}^1$ (on rappelle aussi que les sauts de A étaient bornés). La partie totalement inaccessible de A ne donne aucune difficulté, car $\Delta A_s=\Delta M_s$. Quant à la partie prévisible, on a en l'un des T_i

$$E[\Delta M_{T_i} \Delta N_{T_i}] = E[\Delta A_{T_i} \Delta N_{T_i}] - E[\Delta N_{T_i} E[\Delta A_{T_i}|\underline{\underline{F}}_{T_i-}]]$$

et la dernière espérance est nulle, car ΔN_{T_i} est orthogonale à $\underline{\underline{F}}_{T_i-}$.