PAUL-ANDRÉ MEYER

Martingales locales fonctionnelles additives (I)

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 12 (1978), p. 775-785

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1978__12__775_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1976/77

MARTINGALES LOCALES FONCTIONNELLES ADDITIVES (I)

par P.A. Meyer

La théorie des intégrales stochastiques provient en grande partie du célèbre article de Kunita et S. Watanabe On square integrable martingales (1967). On a sans doute un peu oublié que cet article se composait de deux parties. La première, sur un espace probabilisé filtré sans structure particulière, est devenue depuis lors la théorie générale des intégrales stochastiques, et s'est enrichie de la notion de martingale locale, de la théorie de $\underline{\underline{H}}^1$. La seconde était consacrée aux martingales fonctionnelles additives (de carré intégrable) d'un processus de Hunt, et elle en est restée à peu près au point où Kunita et Watanabe l'avaient laissée. C'est elle que nous reprenons ici.

Notre but principal est l'étude des espaces $\underline{\underline{H}}^p_a(\lambda)$ de martingales additives, que nous définirons dans le second exposé, et de leurs duals. Le premier exposé comporte surtout des résultats techniques. Les espaces $\underline{\underline{H}}^p_a(\lambda)$ sont des intermédiaires naturels entre l'espace $\underline{\underline{H}}^p$ des probabilistes (formés de toutes les martingales de norme-$\underline{\underline{H}}^p$ finie) et l'espace $\underline{H}^p$ des analystes (formé uniquement des martingales associées aux fonctions harmoniques). Le résultat assez étonnant est que le dual de $\underline{\underline{H}}^1_a(\lambda)$ est un espace de martingales additives à sauts bornés, mais qui semble strictement plus gros que l'espace "$\underline{\underline{BMO}}$ additif".

On verra que la théorie de la dualité n'est pas tout à fait évidente, même dans le cas (trivial d'habitude) où $1<p<\infty$. On ne peut pas cumuler toutes les difficultés. Nous supposons donc, dans le second exposé, que le processus est "de Hunt" (i.e., que la filtration naturelle est quasi-continue à gauche), ce qui nous permet d'utiliser l'outil si commode de l'intégrale stochastique optionnelle[1].

NOTATIONS

Nous nous donnons un semi-groupe de Markov (P_t) sur un espace d'états E, sa résolvante (U_p), son noyau potentiel $U_0=U$ que nous supposons propre . Comme d'habitude, nous adjoignons à E un point-cimetière ∂, et nous prolongeons le semi-groupe à $\overline{E}=E\cup\{\partial\}$. Nous supposons que les hypothèses droites sont satisfaites, et nous plongeons $\overline{E}$ dans un compactifié de Ray F . L'ensemble des points de branchement est noté B.

Nous réalisons le semi-groupe (P_t) sur l'espace des trajectoires

- continues à droite et à durée de vie à valeurs dans $\overline{E}$, pour les deux topologies de $\overline{E}$ et de F,

1. Voir l'appendice de l'exposé II pour le cas général.

- admettant des limites à gauche dans $\bar{E}\cup B$, pour la topologie de F.

La possibilité d'un tel choix est établie dans Meyer-Walsh [1] : on commence par construire la réalisation canonique continue à droite du semi-groupe à valeurs dans $\bar{E}$, puis on remarque qu'elle est p.s. continue à droite dans $\bar{E}$ muni de la topologie de F, et pourvue de limites à gauche dans F. Puis on utilise le corollaire 2, p.156 de [1] pour vérifier que ces limites à gauche sont en fait dans $\bar{E}\cup B$ p.s., et enfin on se débarrasse des p.s. en jetant les mauvaises trajectoires.

En fait, nous oublierons à peu près complètement la topologie initiale de E, et même la structure borélienne initiale : le mot "fonction borélienne" se référera à la structure induite par F (une telle fonction est presque-borélienne pour la structure initiale). Nous utiliserons les notations usuelles

$$\Omega,\ \underline{\underline{F}}^{o},\ \underline{\underline{F}}^{o}_{t}\ ,\ X_t\ ,\ P^{\mu}\ \ldots\ldots$$

Nous dirons que le processus est <u>de Hunt</u> si, pour toute loi initiale μ, la famille de tribus complétée $(\underline{\underline{F}}^{\mu}_{t})$ - qui satisfait aux conditions habituelles - est quasi-continue à gauche. On sait (th.13) que cela signifie que l'ensemble B est inutile : les limites à gauche appartiennent p.s. à $\bar{E}$. Les sauts du processus X sont alors totalement inaccessibles, et X jouit de la propriété caractéristique des processus de Hunt usuels ($T_n\uparrow T \Rightarrow X_{T_n} \to X_T$ p.s. sur $\{T<\infty\}$) dans la topologie de Ray.

Rappelons que $\underline{\underline{F}} = \bigcap_{\mu} \underline{\underline{F}}^{\mu}$, et de même pour $\underline{\underline{F}}_t$. Nous avons déjà employé le mot <<p.s.>> pour signifier << P^{μ}-p.s. pour toute loi initiale μ sur $\bar{E}$ >> ; de même, les mots << évanescent>>, <<indistinguables>> seront employés pour qualifier un ensemble P^{μ}-évanescent pour toute loi P^{μ}, deux processus P^{μ}-indistinguables pour toute loi P^{μ}...

Nous utiliserons dans la suite le remarquable cours de troisième cycle <u>Fonctionnelles additives de Markov</u> de M. Sharpe (Laboratoire de Probabilités, Université Paris VI, 1973/74), qui n'est malheureusement pas publié. A la suite de Sharpe, nous dirons qu'un processus est <u>mesurable</u> (resp. <u>optionnel</u>, <u>prévisible</u>) s'il est indistinguable au sens défini plus haut d'un processus $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)\times\underline{\underline{F}}$-mesurable, resp. optionnel, prévisible par rapport à la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$. Ainsi, un processus Z peut être, pour toute loi initiale μ,P^{μ}-indistinguable d'un processus optionnel par rapport à $(\underline{\underline{F}}^{\mu}_t)$ sans être optionnel au sens précédent.

Nous passons à notre objet principal :

DEFINITION. <u>Une fonctionnelle additive est un processus</u> (A_t) <u>adapté à la famille</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$, <u>possédant les propriétés suivantes</u>

1) <u>Pour presque tout</u> ω, <u>la trajectoire</u> $A_{\cdot}(\omega)$ <u>est càdlàg.</u>, <u>à valeurs finies</u>, <u>nulle en</u> 0, <u>arrêtée à l'instant</u> $\zeta(\omega)$.

2) Pour tout couple (s,t), on a p.s. $A_{s+t}=A_s+A_t\circ\theta_s$.

A priori, l'ensemble de mesure nulle en 2) dépend de (s,t). Mais Walsh a montré dans [1] pour les fonctionnelles croissantes (et la même méthode est appliquée dans Meyer [2] pour les fonctionnelles quelconques) qu'il existe toujours une version parfaite d'une fonctionnelle additive : une fonctionnelle (A'_t) indistinguable de (A_t) pour laquelle 2) a lieu hors d'un ensemble de mesure nulle indépendant de (s,t).

Une fonctionnelle additive est un exemple de processus optionnel au sens de Sharpe. Soit en effet H l'ensemble des $\omega\in\Omega$ tels que $A_{\cdot}(\omega)$ ne soit pas càdlàg. ; H est P^μ-négligeable pour toute loi initiale μ, donc appartient à $\underline{\underline{F}}_0$. Si nous posons

$$B_t(\omega)=A_t(\omega) \text{ si } \omega\notin H \quad , \; B_t(\omega)=0 \text{ si } \omega\in H$$

nous obtenons un processus adapté à $(\underline{\underline{F}}_t)$, càdlàg. , indistinguable de (A_t).

Les deux classes de fonctionnelles additives que nous rencontrerons dans la suite sont les fonctionnelles additives croissantes (FAC) et les fonctionnelles additives martingales locales (en abrégé, fonctionnelles additives martingales, ou FAM), i.e. les f.a. (A_t) telles que (A_t) soit une P^μ-martingale locale pour toute loi initiale μ sur E (1).
Nous donnerons dans l'exposé II des exemples de FAM.

FONCTIONNELLES ADDITIVES CROISSANTES

Nous nous proposons surtout ici d'étudier les FAM, mais pour cela nous avons besoin de résultats auxiliaires sur les FAC. Nous allons pour cela rappeler en partie les résultats de Sharpe.

Une notion très fructueuse introduite par Sharpe a été celle de translation des processus : si $Z=(Z_t)$ est un processus, $\epsilon_u Z$ est le processus

$$(\epsilon_u Z)_t = Z_{t-u}\circ\theta_u \, I_{\{t\geq u\}}$$

Si Z est mesurable, resp. optionnel, prévisible, il en est de même de $\epsilon_u Z$. Enonçons maintenant le théorème de Sharpe sur la projection prévisible (on a exactement le même énoncé pour la projection optionnelle).

THEOREME 1. *Soit Z un processus mesurable, positif ou borné. Il existe un processus prévisible Z^p, unique à un processus évanescent près, qui est pour toute loi initiale μ une projection prévisible de Z sous P^μ. De plus, pour $u\geq 0$ fixé, les processus $(\epsilon_u Z)^p$ et $\epsilon_u(Z^p)$ sont indistinguables.*

1. Nous ignorons s'il suffit que (A_t) soit une P^x-martingale locale pour tout $x\in E$.

En particulier, nous dirons qu'un processus $Z=(Z_t)_{t\geq 0}$ (resp. $(Z_t)_{t>0}$) est <u>homogène</u> si, pour tout u fixé, les processus $\theta_u Z$ et Z sont indistinguables sur $[u,\infty[$ (resp. sur $]u,\infty[$). Le théorème 1 entraîne que la projection prévisible d'un processus homogène est homogène.

DEMONSTRATION. Nous allons donner une démonstration différente de celle de Sharpe, reposant sur la formule magique de Dawson. En fait, nous ne donnerons qu'une esquisse, et renverrons à Meyer [2] pour les détails. Nous traiterons plutôt le cas de la projection optionnelle, qui est plus simple ([2] est plus spécialement consacré au cas prévisible).

Etant donnés $\omega, w \in \Omega$, et $t\geq 0$, nous définissons $\omega/t/w \in \Omega$ par

$$X_s(\omega/t/w) = X_s(\omega) \text{ si } s<t \text{ , } X_{s-t}(w) \text{ si } s\geq t$$

Soit b une fonction $\underline{\underline{F}}^\circ$-mesurable bornée sur Ω . Posons

$$b_t(\omega) = E^{X_t(\omega)}[b(\omega/t/.)]$$

Il n'est pas difficile de vérifier que 1) le processus (b_t) est optionnel , 2) $b_T=E^\mu[b|\underline{\underline{F}}^\mu_T]$ P^μ-p.s. pour toute loi initiale μ et tout temps d'arrêt borné T de la famille $(\underline{\underline{F}}^\mu_t)$. Il en résulte que (b_t) est projection optionnelle du processus constant $Z_t(\omega)=b(\omega)$.

On passe de là au cas où b est $\underline{\underline{F}}$-mesurable, par encadrement. Posons alors, pour tout processus Z positif ou borné, $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)\times\underline{\underline{F}}$-mesurable

$$Z^o_t(\omega) = E^{X_t(\omega)}[Z_t(\omega/t/.)]$$

Un raisonnement de classes monotones à partir du cas où $Z_t(\omega)=a(t)b(\omega)$ montre que Z^o est projection optionnelle de Z. Le point intéressant à noter est que Z^o est donné sans aucune indétermination, par un noyau appliqué à Z, et que $(\theta_u Z)^o=\theta_u(Z^o)$ <u>identiquement</u>.

Si Z est seulement mesurable au sens de Sharpe, on choisit Y $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)\times\underline{\underline{F}}$-mesurable et indistinguable de Z ($\theta_u Y$ et $\theta_u Z$ sont alors indistinguables pour tout u fixé) et l'on pose $Z^o=Y^o$; on retrouve alors le théorème de Sharpe.

Si l'on recherche seulement la forme prévisible du théorème de Sharpe (et non une forme plus précise pour les processus $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)\times\underline{\underline{F}}$-mesurables comme ci-dessus), on peut se ramener par classes monotones aux cas où $Z_t(\omega)=a(t)b(\omega)$, puis où $Z_t(\omega)=b(\omega)$, et l'on peut prendre alors

$$Z^p_0 = b_0 \quad , \quad Z^p_t = \liminf_{s\uparrow\uparrow t} b_s \text{ si } t>0$$

Nous donnons une application de ce théorème :

COROLLAIRE. <u>Soit</u> Z <u>un processus mesurable au sens de Sharpe</u>. <u>Supposons que</u>, <u>pour tout</u> x, Z <u>soit</u> P^x-<u>indistinguable d'un processus prévisible par rapport à</u> $(\underline{\underline{F}}^x_t)$. <u>Alors</u> Z <u>est prévisible au sens de Sharpe</u>.

En effet, on peut se ramener au cas où Z est borné, $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)\times\underline{\underline{F}}$-mesurable. Soit Y un processus prévisible par rapport à $(\underline{\underline{F}}_t)$, donc $\underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)\times\underline{\underline{F}}$-mesurable, indistinguable de Z^p . Les processus Z et Y sont P^x-indistinguables pour tout x, donc P^μ-indistinguables pour toute loi initiale μ par intégration, et Z est bien prévisible au sens de Sharpe.

Passons aux projections duales. Etant donné un processus $Z \geqq 0$, et un processus croissant A (fini, nul en 0), notons $Z*A$ le processus croissant

$$(Z*A)_t = \int_0^t Z_s dA_s \qquad \text{intégrale de Stieltjes}$$

(le . sera réservé pour l'intégrale stochastique). On vérifie sans peine que $\theta_u(Z*A) = (\theta_u Z)*(\theta_u A)$.

THEOREME 2. Soit $A=(A_t)$ un processus croissant, tel que A_t soit $\underline{\underline{F}}$-mesurable pour tout t, nul en 0, et tel que la fonction $E^{\cdot}[A_\infty]$ soit bornée sur E . Il existe alors un processus croissant $(\tilde{A}_t)$, prévisible (au sens de Sharpe) tel que $\tilde{A}$ soit projection duale prévisible de A sous P^μ pour toute loi initiale μ. De plus, pour tout u fixé, les processus $\theta_u\tilde{A}$ et $(\theta_u A)^\sim$ sont indistinguables.

DEMONSTRATION. Pour tout processus mesurable positif Z, posons

$$R_x(Z) = E^x[\int_0^\infty Z_s^p dA_s]$$

La fonction $R_{\cdot}(Z)$ est universellement mesurable sur $\bar{E}$. En particulier, posons pour $B \in \underline{\underline{F}}^\circ$

$$R_t(x,B) = R_x[[0,t]\times B]$$

Nous avons là une mesure sur $\underline{\underline{F}}^\circ$, bornée, absolument continue par rapport à P^x. Choisissons une fonction $\alpha_t(x,\omega)$, $\underline{\underline{B}}_u(\bar{E})\times\underline{\underline{F}}^\circ$-mesurable, telle que pour tout x $\alpha_t(x,.)$ soit une densité de $R_t(x,.)$ par rapport à P^x - un tel choix est possible du fait que $\underline{\underline{F}}^\circ$ est séparable. Puis posons

$$\alpha_t^1(x,\omega) = \sup_{\substack{s \text{ rationnel} \\ s<t}} \alpha_s(x,\omega) \quad , \quad \alpha_t^2(x,\omega) = \alpha_{t+}^1(x,\omega)$$

enfin, le processus (α_t^2) est croissant, mais pas nécessairement fini ni nul en 0 ; on pose donc

$$\alpha_t^3(\omega) = \alpha_t^2(\omega) \text{ si } \alpha_{\cdot}^2(\omega) \text{ est finie et nulle en 0, } =0 \text{ sinon .}$$

Enfin, on pose

$$\tilde{A}_t(\omega) = \alpha_t^3(X_0(\omega),\omega)$$

$\tilde{A}_t$ est $\underline{\underline{F}}$-mesurable. Pour toute loi P^x, $\tilde{A}_t$ est une densité de $R_t(x,.)$ par rapport à P^x . En intégrant par rapport à $\mu(dx)$, on voit que $\tilde{A}$ est projection prévisible duale de A sous P^μ. En particulier, $\tilde{A}_t$ est $\underline{\underline{F}}_t^\mu$-mesurable, donc ($\mu$ étant arbitraire) $\underline{\underline{F}}_t$-mesurable. De même, le corollaire du théorème 1 entraîne que $\tilde{A}$ est prévisible (au sens de Sharpe).

[Il y a une petite subtilité de démonstration si l'on veut traiter le cas où la fonction $E^{\cdot}[A_\infty]$ n'est pas bornée sur $\bar{E}$, mais seulement finie : on remplacera μ par une mesure équivalente λ telle que $E^\lambda[A_\infty]<\infty$, en remarquant que $\underline{\underline{F}}_t^\mu=\underline{\underline{F}}_t^\lambda$]

Reste à voir le comportement des projections duales lors des translations. Pour vérifier que les deux processus croissants prévisibles nuls sur $[0,u[$ $\theta_u\tilde{A} = B$, $(\theta_u A)^\sim = C$ sont indistinguables, il suffit de vérifier que pour tout processus prévisible borné Z, nul sur $[0,u[$, et toute loi initiale μ

$$E^\mu[(Z*B)_\infty] = E^\mu[(Z*C)_\infty]$$

Il suffit de le faire pour des processus Z qui engendrent la trace sur $[u,\infty[$ de la tribu prévisible : Sharpe montre que l'on peut se restreindre à des processus de la forme

$$Z_t(\omega) = I_{[u,\infty[}(t)H(\omega)\theta_u Y(t,\omega)$$

où H est $\underline{\underline{F}}_u$-mesurable positive bornée, et Y est prévisible positif. Dans ce cas, d'après la propriété de Markov simple

$$E^\mu[(Z*B)_\infty] = E^\mu[H(\theta_u Y*\theta_u\tilde{A})_\infty] = E^\mu[H.(Y*\tilde{A})_\infty \circ\theta_u] = E^\lambda[(Y*\tilde{A})_\infty]$$

où λ est la mesure $\lambda(K)=E^\mu[H.I_K\circ X_u]$. Aussi $\qquad = E^\lambda[(Y*A)_\infty]$

$$E^\mu[(Z*C)_\infty] = E^\mu[(Z*\theta_u A)_\infty] = E^\mu[H(\theta_u Y*\theta_u A)_\infty] = E^\mu[H.(Y*A)_\infty \circ\theta_u]$$

cqfd. $\qquad = E^\lambda[(Y*A)_\infty]$.

REMARQUE. Lorsque A satisfait à la relation d'additivité de la définition 1 (sans être nécessairement une fonctionnelle additive : A n'est pas supposé adapté), on a $(\theta_u A)_t = (A_t - A_u)I_{\{t\geq u\}}$. Par projection prévisible duale, il vient $(\theta_u\tilde{A})_t = (\tilde{A}_t - \tilde{A}_u)I_{\{t\geq u\}}$. Autrement dit, A est une fonctionnelle additive prévisible.
Mais pour construire $\tilde{A}$ dans ce cas particulier, on n'a pas besoin du théorème 2 : $\tilde{A}$ est la fonctionnelle additive prévisible engendrant le potentiel de la classe (D) $f=E^\cdot[A_\infty]$.

REMARQUE. Au lieu de supposer que $E^\cdot[A_\infty]$ est bornée ou même finie, faisons les hypothèses suivantes

a) Le processus croissant A est localement intégrable pour toute mesure P^x,

b) On peut écrire $A = \Sigma_n B_n$, où les processus croissants B_n satisfont aux hypothèses du théorème 2.

Nous pouvons alors poser $\tilde{A} = \Sigma_n \tilde{B}_n$; la mesure aléatoire $d\tilde{A}$ est projection prévisible de dA sous P^μ pour toute loi initiale μ, et la condition a) entraîne que $\tilde{A}$ est <u>à valeurs finies</u> . La propriété relative aux translations (en particulier l'additivité de $\tilde{A}$ si A est additive) s'étend alors trivialement.

Nous allons maintenant établir un théorème important pour l'étude des FAM. Voir les remarques suivant la démonstration, pour le cas des fonctionnelles quasi-continues à gauche .

THEOREME 3. <u>Soit</u> A <u>une FAC</u> . <u>Il existe un processus optionnel et homogène</u> $(Z_t)_{t>0}, >0$ <u>hors d'un ensemble évanescent et tel que la fonctionnelle additive</u> $B=Z*A$ <u>ait un potentiel</u> $E^{\bullet}[B_{\infty}]$ <u>borné</u>.

DEMONSTRATION. 1) <u>Traitons le cas où</u> A <u>est continue</u>. Soit (Q_t) le semi-groupe déduit de (P_t) par le changement de temps (τ_t)associé à A : $Q_t(x,h) = E^x[h\circ Y_t]$, où $Y_t=X_{\tau_t}$ (avec la convention usuelle $X_{\infty} = \partial$). Le noyau potentiel V de (Q_t) est égal à U_A . D'après la transience de (P_t), il existe une fonction $k>0$ sur E (nulle en ∂) telle que $g=Uk$ soit bornée. Pour tout x et tout temps d'arrêt T tel que $P^x\{T>0\}\neq 0$, on a $P_T(x,g)<g(x)$. En particulier, la fonction $h=g-Q_1 g = g-P_{\tau_1} g$ est strictement positive partout sur E. D'autre part, on a $Vh\leqq g$, donc U_Ah est bornée. Le processus cherché est alors $Z_t=h\circ X_t$.

2) <u>Traitons le cas où</u> A <u>est (parfaite) purement discontinue, avec des sauts compris entre</u> a <u>et</u> b ($0<a<b<\infty$) .

Désignons par T_n le n-ième saut de A ($T_0=0$ par convention), posons $Y_n= X_{T_n}$, $Q(x,h)= E^x[h\circ X_{T_1}]$. Le processus (Y_n) est markovien discret, avec Q pour noyau de transition. La fonction g étant Q-excessive, $g-Qg = h$ est partout >0 sur E, et le noyau potentiel discret $V= \Sigma_n Q^n$ satisfait à $Vh\leqq g$ bornée (en fait, on a même l'égalité). D'autre part on a $U_Ah \leqq bVh$, et le processus cherché est encore $Z_t=h\circ X_t$.

3) Passons au cas général : nous écrivons $A = A^c + \Sigma_{n\in\mathbb{Z}} A^n$, où A^n est la somme des sauts de A compris dans l'intervalle $[2^{-n},2^{-n+1}[$. Soit h partout >0 telle que $U_Ah \leqq 1$; soit h_n partout >0 telle que $U_{A^n}h_n\leqq 1$. Soit C l'ensemble $\{(t,\omega): t>0 \ , \Delta A_t(\omega)=0\}$, et soit C_n l'ensemble $\{(t,\omega) : t>0, \ 2^{-n}\leqq\Delta A_t(\omega)<2^{-n+1}\}$. Alors on peut prendre

$$Z_t = h\circ X_t I_C + \Sigma_n 2^{-|n|} h_n\circ X_t I_{C_n}$$

COROLLAIRE. <u>Si</u> A <u>est localement intégrable pour toute loi</u> P^x, <u>sa compensatrice prévisible existe et est une fonctionnelle additive</u>.

DEMONSTRATION. Nous prenons $B=Z*A$ comme ci-dessus, puis nous posons $B_n =(\frac{1}{Z}I_{\{2^{-n}\leqq Z<2^{-n+1}\}})*B$. Alors $A=\Sigma_{n\in\mathbb{Z}} B_n$, et les fonctionnelles additives B_n ont un potentiel borné. On applique alors la seconde remarque suivant le théorème 2.

REMARQUE. Un théorème célèbre de Kunita-Watanabe [1], établi pour des processus de Hunt sous hypothèse (L) , puis étendu par Walsh-Weil [1] aux processus de Ray sous hypothèse (L), enfin par Benveniste [1] au cas général, affirme qu'une FAC purement discontinue ~~<u>quasi-continue à gauche</u>~~ A (i.e. à sauts totalement inaccessibles) admet la représentation

$$A_t = \Sigma_{0<s\leqq t} I_{\{X_{s-}\in E\}} f(X_{s-},X_s)$$

où f est une fonction positive sur $\overline{E}\times\overline{E}$, mesurable par rapport au produit de la tribu presque-borélienne par elle même, et nulle sur la diagonale. Il revient au même de dire, sous la forme de Walsh-Weil, qu'un temps terminal T totalement inaccessible est un temps d'entrée

$$T = \inf \{ t>0 : (X_{t-},X_t)\in G \}$$

où G est un ensemble presque-borélien dans $\overline{E}\times\overline{E}$, disjoint de la diagonale.

A l'aide de ce théorème, on peut montrer que lorsque A est quasi-continue à gauche, le processus Z du théorème 3 peut être pris de la forme

$$Z_t = j(X_{t-},X_t)$$

où j est une fonction presque-borélienne partout >0 sur F×F.

FONCTIONNELLES ADDITIVES MARTINGALES LOCALES

Nous nous servirons à plusieurs reprises du lemme suivant, dû à C. Doléans-Dade [1] sous une forme à peine moins bonne (convergence dans L^2 au lieu de convergence en probabilité). La forme ci-dessous a été dégagée dans les travaux de C. Stricker et M. Yor sur les intégrales stochastiques dépendant d'un paramètre.

LEMME. <u>Soit</u> (M_n) <u>une suite de fonctions</u> $\underline{\underline{F}}$<u>-mesurables sur</u> Ω, <u>qui converge en probabilité</u>/P^μ <u>pour toute loi initiale</u> μ. <u>Il existe alors une v.a.</u> $\underline{\underline{F}}$<u>-mesurable</u> M <u>telle que</u> M_n <u>converge vers</u> M <u>en probabilité pour toute loi</u> P^μ.

DEMONSTRATION. On peut utiliser les filtres rapides de Mokobodzki, mais ce n'est pas nécessaire.

On se ramène au cas où les M_n sont comprises entre -1 et 1. Etant donné $x\in E$, soit N(n,x) le plus petit entier tel que

$$p\geqq N(n,x),\ q\geqq N(n,x) \Rightarrow E^x[|M_p-M_q|] \leqq 2^{-n}$$

La suite des fonctions $K_n(x,\omega) = M_{N(n,x)}(\omega)$ est telle que pour tout x , $K_n(x,.)$ converge P^x-p.s. vers une limite en probabilité/P^x de la suite (M_n). Posons donc

$$K(x,\omega) = \liminf_n K_n(x,\omega)$$

fonction mesurable du couple (x,ω), puis

$$M(\omega) = K(X_0(\omega),\omega)$$

Alors, pour tout x, (M_n) converge dans $L^1(P^x)$ vers M. En intégrant par rapport à $\mu(dx)$, $\int\mu(dx)E^x[|M-M_n|] = E^\mu[|M-M_n|] \to 0$, et le lemme est établi.

Notre première application va consister à montrer que le crochet droit d'une FAM est une FAC. Signalons, sans donner de détails, que le corollaire du théorème 3 permet de montrer que le crochet oblique d'une martingale locale additive, localement de carré intégrable pour toute loi P^x , est également une FAC.

THEOREME 4. <u>Soit</u> $M=(M_t)$ <u>une FAM. Il existe une FAC</u> (A_t) <u>telle que, pour toute loi</u> μ , (A_t) <u>soit une version du crochet</u> $[M,M]_t$ <u>sous</u> P^μ.
(Une telle version est tout naturellement notée $[M,M]$) .

DEMONSTRATION. Nous fixons t . Nous savons que les sommes

$$M_t^n = \sum_{i<2^n} (M_{t^n_{i+1}} - M_{t^n_i})^2 \quad \text{où } t_i^n = i2^{-n}t$$

convergent en probabilité vers le crochet de M sous P^μ, quelle que soit la loi μ. Appliquant le lemme, nous construisons une v.a. A_t^1 $\underline{\underline{F}}$-mesurable telle que M_t^n converge vers A_t^1 en probabilité P^μ, quelle que soit μ.

On vérifie aussitôt que A_t^1 est $\underline{\underline{F}}_t$-mesurable, et que $s\leq t \Rightarrow A_s^1 \leq A_t^1$ p.s.. On peut alors régulariser A^1 en un processus croissant A, qui est une version du crochet droit pour toute loi P^μ.

Pour vérifier l'additivité, nous écrivons que (s étant fixé)

$$A_t = \lim M_t^n \text{ en probabilité sous } P^{\mu P_s}$$

ce qui, d'après la propriété de Markov simple, nous donne

$$A_t \circ \theta_s = \lim M_t^n \circ \theta_s \text{ en probabilité sous } P^\mu$$

$$= \lim \Sigma_i \, (M_{t^n_{i+1}+s} - M_{t^n_i+s})^2 \text{ sous } P^\mu \text{ d'après l'additivité de } M$$

Ajoutons les v.a. M_s^n , qui convergent vers A_s sous P^μ, nous obtenons une somme approximant sous P^μ le crochet $[M,M]_{t+s}$, c'est à dire A_{t+s}. Par conséquent $A_{t+s}=A_s + A_t\circ\theta_s$ P^μ-p.s., et le théorème est établi.

Nous passons maintenant à la décomposition d'une martingale locale M en sa partie continue M^c et sa partie somme compensée de sauts M^d. Nous n'avons pas essayé de tout dire dans l'énoncé : c'est la démonstration qui contient les résultats dont nous nous servirons pour traiter les intégrales stochastiques plus loin.

THEOREME 5. <u>Soit</u> $M=(M_t)$ <u>une</u> FAM. <u>Il existe alors une</u> FAM <u>continue</u> M^c <u>qui est, pour toute loi</u> μ, <u>une version de la partie continue de</u> M <u>sous</u> P^μ.

DEMONSTRATION. Soit $\overset{+}{M}{}_t^n = \Sigma_{s\leq t} \, \Delta M_s I_{\{\Delta M_s \geq 1/n\}}$; c'est une FAC localement intégrable pour toute loi P^x (du fait que $[M,M]_t^{1/2}$ est localement intégrable). D'après le corollaire du théorème 3, elle admet une compensatrice prévisible, qui est une FAC. Remplaçant M par $-M$, nous construisons de même $\overset{-}{M}{}^n$ et sa compensatrice prévisible. D'où par différence une fonctionnelle additive prévisible $\widetilde{M}^n$, différence de deux FAC, telle que $K^n=M^n-\widetilde{M}^n$ soit une FAM.

Pour toute loi initiale μ, K^n converge en probabilité/P^μ vers une version de la partie somme compensée de sauts de M sous P^μ. Utilisant à nouveau le lemme, nous construisons un même processus (K_t) tel que pour tout t, K_t^n converge vers K_t en probabilité/P^μ pour toute loi μ.

Pour toute loi μ, (K_t) est une modification d'un processus càdlàg. Il est alors possible de le régulariser en un processus càdlàg. , que nous noterons tout naturellement M^d, et qui est une martingale locale sous toute loi P^μ. On pose $M^c=M-M^d$.

Reste à vérifier l'additivité de M^d. Comme pour le théorème 4, le fait que K_t^n tend vers M_t^d sous $P^{\mu P_s}$ entraîne que $K_t^n \circ \theta_s = K_{t+s}^n - K_s^n$ converge vers $M_t^d \circ \theta_s$ en probabilité/P^μ , d'où la relation $M_t^d \circ \theta_s = M_{t+s}^d - M_s^d$ P^μ-p.s..

Voici le dernier théorème de cet exposé, et le plus important pour l'exposé II. Nous ne considérerons que le cas de processus optionnels <u>bornés</u> ; nous venons de voir le type de passage à la limite qui permet de se libérer de cette hypothèse si nécessaire.

THEOREME 6. <u>Soit</u> $M=(M_t)$ <u>une</u> FAM, <u>et soit</u> $Z=(Z_t)$ <u>un processus optionnel borné</u>. <u>Il existe un processus càdlàg. noté</u> $Z{\cdot}M$, <u>adapté à</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$, <u>qui est pour toute loi initiale</u> μ <u>une version de l'intégrale stochastique de</u> Z <u>sous</u> P^μ. <u>On a de plus pour tout</u> u <u>fixé</u>

$$(\epsilon_u Z){\cdot}M \;=\; \Theta_u(Z{\cdot}M) \text{ à un processus évanescent près .}$$

COROLLAIRE. <u>Si</u> Z <u>est homogène</u>, $Z{\cdot}M$ <u>est une</u> FAM .

DEMONSTRATION. Traitons d'abord le cas où Z est prévisible borné. Lorsque Z est prévisible élémentaire, tout est évident. On étend alors tous les résultats par classes monotones, en utilisant la convergence en probabilité et le lemme comme dans les résultats antérieurs.

Passons au cas optionnel. Nous pouvons, grâce au théorème 5, séparer les cas où M est continue et où M est purement discontinue. Le premier cas est trivial, car $Z{\cdot}M = Z^p{\cdot}M$, où Z^p est la projection prévisible de Z (théorème 1), et on est donc ramené au cas prévisible. Pour traiter le cas purement discontinu, nous reprenons les notations de la démonstration du théorème 5 . Soit $A^n = Z{*}M^n$, processus à variation localement intégrable ; alors $Z{\cdot}M^n$ est la différence entre A^n et sa compensatrice prévisible $\widetilde{A}^n$ (théorème 2), et pour toute loi μ, $Z{\cdot}M^n$ converge en probabilité/P^μ vers une version de l'intégrale optionnelle de Z par rapport à M sous P^μ. On applique le lemme, etc.

BIBLIOGRAPHIE

A. BENVENISTE [1]. Noyaux de Lévy d'un processus de Hunt sans hypothèse (L). Séminaire de Probabilités VII, p. 1-24.

C. DOLEANS-DADE [1]. Intégrales stochastiques dépendant d'un paramètre. Publ. Inst. Stat. Univ. Paris 16, 1967, p. 23-34.

H. KUNITA et S. WATANABE. On square integrable martingales. Nagoya M. J, 30, 1967, p. 209-246.

P.A. MEYER [1]. La perfection en probabilité. Séminaire de Probabilités VI, p. 243-252.

P.A. MEYER [2]. Sur la démonstration de prévisibilité de Chung et Walsh. Séminaire de Probabilités IX, p. 530-533.

P.A. MEYER et J. WALSH [1]. Quelques applications des résolvantes de Ray. Invent. Math. 14, 1971, p. 143-166.

J. WALSH [1]. The perfection of multiplicative functionals. Séminaire de Probabilités VI, p. 233-242.

J. WALSH et M. WEIL [1]. Représentation des temps terminaux. Application aux systèmes de Lévy. Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 5, 1972, p. 121-155.

Pour tout ce qui touche aux résolvantes de Ray, on pourra consulter également l'excellente monographie

R.K. GETOOR . Markov processes : Ray resolvents and right processes. Lecture Notes in Mathematics 440, Springer 1975.