PAUL-ANDRÉ MEYER

Inégalités de normes pour les intégrales stochastiques

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 12 (1978), p. 757-762
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1978__12__757_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1976/77

INEGALITES DE NORMES POUR LES INTEGRALES STOCHASTIQUES

par P.A. Meyer

Cette note est inspirée par un travail d'Emery sur les équations différentielles stochastiques, dans lequel l'inégalité

$$\|X_-\cdot M\|_{\underline{\underline{S}}^p} \leq c_p \|X\|_{\underline{\underline{S}}^p} \|M\|_{\underline{\underline{H}}^\infty} \quad (1 \leq p < \infty)$$

qui est un cas particulier de l'inégalité (8) ci-dessous, joue un rôle fondamental. Le but de la note est la recherche systématique d'inégalités de ce genre. On y montre que l'espace $\underline{\underline{H}}^\infty$ (analogue à L^∞) peut y être remplacé par un espace un peu plus gros (analogue à $\underline{\underline{BMO}}$) que nous noterons $\underline{\underline{H}}^\omega$ à défaut de meilleure notation[1]; on y étend les inégalités aux intégrales optionnelles, et on y donne enfin d'amusantes (et faciles) variantes de l'inégalité de Fefferman.

DEFINITIONS : NORMES $\underline{\underline{S}}^p$ ET $\underline{\underline{H}}^p$

Nous considérons un espace $(\Omega, \underline{\underline{F}}, P, (\underline{\underline{F}}_t))$ satisfaisant aux conditions habituelles. Soit X un processus optionnel ; nous supposerons X défini pour $t \in \mathbb{R}$, constant pour $t<0$ (la v.a. $X_t = X_{0-}$ pour $t<0$ étant $\underline{\underline{F}}_0$-mesurable) et nous poserons comme d'habitude

(1) $$X^*_{t-} = \sup_{s<t} |X_s| \quad , \quad X^*_t = \lim_{s \downarrow\downarrow t} X^*_s \quad , \quad X^* = X^*_\infty = X^*_{\infty-}$$

et nous désignerons[2] par $\|X\|_{\underline{\underline{S}}^p}$ la norme $\|X^*\|_{L^p}$, $\underline{\underline{S}}^p$ lui même étant pour $1 \leq p \leq \infty$ l'espace des processus X tels que $\|X\|_{\underline{\underline{S}}^p} < \infty$.

Si A est un processus à variation finie (pouvant présenter un saut en 0 ; on convient que $A_{0-}=0$), nous poserons[3] pour $1 \leq p \leq \infty$

(2) $$\|A\|_{\underline{\underline{V}}^p} = \left\| \int_{0-}^{\infty} |dA_s| \right\|_{L^p}$$

et nous définirons $\|A\|_{\underline{\underline{V}}^\omega}$ comme la plus petite constante $c \leq +\infty$ telle que

---

1. ω était la notation de Cantor pour le "premier nombre après l'infini" d'où la notation classique $\underline{\underline{C}}^\omega$ pour l'espace des fonctions analytiques. Ici la notation est moins satisfaisante, car on a $\underline{\underline{C}}^\omega \subset \underline{\underline{C}}^\infty$, mais $\underline{\underline{H}}^\omega \supset \underline{\underline{H}}^\infty$.
2. $\underline{\underline{S}}$ signifie "sup" . 3. $\underline{\underline{V}}$ signifie "variation".

(3) $\qquad \forall T$ t.a. $\quad E[\int_{T-}^{\infty} |dA_s| \,|\underline{\underline{F}}_T\,] \leq c$ p.s.

Il est clair que la norme $\underline{\underline{V}}^p$ est plus forte que la norme $\underline{\underline{S}}^p$ pour $1 \leq p \leq \infty$. Un théorème célèbre de Burkholder-Davis et Gundy affirme que si $\tilde{A}$ est la compensatrice (projection duale) prévisible de A, on a

(4) $$\|\tilde{A}\|_{\underline{\underline{V}}^p} \leq c_p \|A\|_{\underline{\underline{V}}^p} \quad (1 \leq p < \infty\text{ , faux pour } p=\infty\text{, vrai pour } p=\omega\text{)}$$

(séminaire X, p. 347, n° 25 a)). Ici, comme dans toute la suite, c_p désigne une constante qui dépend de p seulement, mais peut varier de place en place.

Rappelons la définition des espaces $\underline{\underline{H}}^p$ de martingales. Si N est une martingale, on a coutume de poser

(5) $$\|N\|_{\underline{\underline{H}}^p} = \|[N,N]_\infty^{1/2}\|_{L^p} \qquad (1 \leq p \leq \infty\text{)}$$

$\underline{\underline{H}}^p$ étant l'espace des martingales (locales) N telles que $\|N\|_{\underline{\underline{H}}^p} < \infty$. Il est bien connu (Burkholder, Davis et Gundy) que pour $1 \leq p < \infty$ les normes $\underline{\underline{H}}^p$ et $\underline{\underline{S}}^p$ sont équivalentes pour les martingales. Nous désignerons par $\|N\|_{\underline{\underline{H}}^\omega}$ la plus petite constante $c \leq +\infty$ telle que

(6) $\qquad \forall$ T t.a. $\quad E[\ ([N,N]_\infty - [N,N]_{T-})^{1/2} |\underline{\underline{F}}_T\ ] \leq c\quad$ p.s.

Cette définition peut paraître bizarre : on montre en effet sans peine (cf. séminaire IX, p. 218-220) que la norme $\underline{\underline{H}}^\omega$ est équivalente à la norme $\underline{\underline{BMO}}$. Mais avec la définition (6) nous ferons un petit bénéfice tout à l'heure.

DEFINITION. <u>Soit</u> M <u>une semimartingale admettant une décomposition</u> M=N+A (N martingale locale, A à variation finie). <u>Pour</u> $1 \leq p < \infty$, <u>posons</u>

$$j_p(N,A) = \|[N,N]_\infty^{1/2} + \int_{0-}^{\infty} |dA_s|\ \|_{L^p}$$

<u>et pour</u> $p=\omega$, <u>soit</u> $j_\omega(N,A)$ <u>la plus petite constante</u> c <u>telle que</u>

$$\forall\ T \text{ t.a. } \quad E[([N,N]_\infty - [N,N]_{T-})^{1/2} + \int_{T-}^{\infty} |dA_s|\ \ |\underline{\underline{F}}_T] \leq c \text{ \underline{p.s.}}$$

<u>Nous poserons alors</u>

(7) $$\|M\|_{\underline{\underline{H}}^p} = \inf_{M=N+A} j_p(N,A) \qquad (\ 1 \leq p \leq \infty \text{ \underline{ou} } p=\omega\ ).$$

On dit que M appartient à $\underline{\underline{H}}^p$ si $\|M\|_{\underline{\underline{H}}^p} < \infty$. La notation employée semble incohérente : en effet, soit M une martingale, et soit m sa norme $\underline{\underline{H}}^p$ en tant que martingale (5) ; elle est égale à $j_p(M,0)$, et la norme $\underline{\underline{H}}^p$ de M en tant que semimartingale, que nous noterons m', est a priori <u>plus petite</u> que m . Heureusement, il n'en est rien. Si M=N+A est une décomposition de M, on a

$$[M,M]_{\infty}^{1/2} \leqq [N,N]_{\infty}^{1/2} + [A,A]_{\infty}^{1/2} \leqq [N,N]_{\infty}^{1/2} + \int_{0-}^{\infty} |dA_s|$$

et en prenant la norme dans L^p on voit que $m \leqq j_p(N,A)$. De même pour $p=\omega$ en écrivant l'inégalité analogue pour $([M,M]_{T-}^{\infty})^{1/2}$. C'est la raison de la bizarre définition (6) !

Plus généralement, toute martingale appartenant à $\underline{\underline{H}}^p$ admet une décomposition canonique $M=\overline{N}+\overline{A}$ ($\overline{N}$ martingale locale, $\overline{A}$ prévisible nul en 0). On a $j_p(\overline{N},\overline{A}) \geq \|M\|_{\underline{\underline{H}}^p}$. Inversement, si $M=N+A$ est une décomposition de M, on a

$$\overline{A} = \tilde{A}-A_0 \quad , \quad \overline{N}=N+A_0+\overset{c}{A} \qquad (\overset{c}{A} = A-\tilde{A})$$

Donc d'après (6), en exceptant le cas $p=+\infty$, $\|\overline{A}\|_{\underline{\underline{V}}^p} \leqq c_p\|A\|_{\underline{\underline{V}}^p} \leqq c_p j_p(N,A)$ puis (comme $[\overset{c}{A},\overset{c}{A}]_s^t \leqq \int_s^t |d\overset{c}{A}_s| \leqq \int_s^t (|dA_s|+|d\tilde{A}_s|)$) $\|\overline{N}\|_{\underline{\underline{H}}^p} \leqq c_p j_p(N,A)$, et finalement $j_p(\overline{N},\overline{A}) \leqq c_p j_p(N,A)$. Finalement, on obtient une norme équivalente en considérant la norme $j_p(\overline{N},\overline{A})$ pour la seule décomposition canonique, à condition d'excepter $\underline{\underline{H}}^{\infty}$ (qui joue le rôle principal dans le travail d'Emery ...).

Noter que la norme $\underline{\underline{H}}^p$ est plus forte que la norme $\underline{\underline{S}}^p$, pour $1 \leqq p < \infty$.

LES INEGALITES : PREMIERE ETAPE

L'inégalité suivante figure dans le travail d'Emery . Elle est très utile malgré son caractère élémentaire .

LEMME 1. Si $1 \leqq p \leqq \infty$, $1 \leqq q \leqq \infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}$, et si X est prévisible, on a

(8) $$\|X \cdot M\|_{\underline{\underline{H}}^r} \leqq \|X\|_{\underline{\underline{S}}^p}\|M\|_{\underline{\underline{H}}^q}$$

et par conséquent, si $r<\infty$

(8') $$\|X \cdot M\|_{\underline{\underline{S}}^r} \leqq c_r\|X\|_{\underline{\underline{S}}^p}\|M\|_{\underline{\underline{H}}^q}$$

DEMONSTRATION. (8') résulte aussitôt de (8), la norme $\underline{\underline{S}}^r$ étant moins forte que la norme $\underline{\underline{H}}^r$, sauf pour $r=\infty$.

Soit $m > \|M\|_{\underline{\underline{H}}^q}$ et soit $M=N+A$ une décomposition telle que $j_p(N,A) \leqq m$.

Alors $X \cdot M$ admet la décomposition $X \cdot N+X \cdot A$, et on a

$$\left(\int_{0-}^{\infty} X_s^2 d[N,N]_s\right)^{1/2} + \int_{0-}^{\infty} |X_s dA_s| \leqq X^*\left([N,N]_{\infty}^{1/2} + \int_{0-}^{\infty} |dA_s|\right)$$

Après quoi on applique Hölder ($\|UV\|_{L^r} \leqq \|U\|_{L^p}\|V\|_{L^q}$) .

REMARQUE. Dans quel cas peut on donner un sens à (8) pour X optionnel ? Nous pouvons toujours interpréter $X \cdot A$ comme intégrale de Stieltjes, $X \cdot N$ comme intégrale optionnelle, mais la somme $X \cdot N + X \cdot A$ dépend de la décomposition choisie, et ne peut être notée $X \cdot M$. Cette réserve étant faite, nous avons d'après Pratelli (séminaire X, p.352, n°38) si $r<\infty$

$$\|X\cdot N\|_{\underline{\underline{H}}^r} \leq c_r \|(\int_0^\infty X_s^2 d[N,N]_s)^{1/2}\|_{L^r} \leq c_r \|X^*[N,N]_\infty^{1/2}\|_{L^r} \leq c_r \|X\|_{\underline{\underline{S}}^p} \|N\|_{\underline{\underline{H}}^q}$$

La majoration pour $X \cdot A$ marche sans modification. D'où finalement

$$(9) \qquad j_r(X\cdot N, X\cdot A) \leq c_r \|X\|_{\underline{\underline{S}}^p}\, j_q(N,A) \qquad (1\leq p\leq\infty\ ,\ 1\leq q\leq\infty\ ,\ r<\infty)$$

Il y a un cas où l'on peut donner un sens raisonnable à $X \cdot M$, c'est celui où la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$ est quasi-continue à gauche. On définit alors $X\cdot M = X\cdot\overline{N} + X\cdot\overline{A}$ relativement à la décomposition canonique $M=\overline{N}+\overline{A}$ de M. Dans ce cas on a une formule analogue à (8) pour X optionnel et $r<\infty$, avec une constante c_r au second membre.

LES INEGALITES : SECONDE ETAPE

Nous arrivons à la partie essentielle de cette note : que se passe t'il dans (8) pour $q=\omega$? La réponse est simple.

THEOREME 1. <u>On a pour</u> $1\leq p<\infty$, <u>si</u> X <u>est prévisible</u>

$$(11) \qquad \|X\cdot M\|_{\underline{\underline{H}}^p} \leq c_p \|X\|_{\underline{\underline{S}}^p} \|M\|_{\underline{\underline{H}}^\omega}$$

REMARQUE. Si X est optionnel , et M admet la décomposition N+A, on a de même

$$(11') \qquad j_p(X\cdot N,\ X\cdot A) \leq c_p \|X\|_{\underline{\underline{S}}^p}\, j_\omega(N,A)$$

Pour la démonstration, nous décomposons M en N+A, où N appartient à $\underline{\underline{BMO}}$ et A à $\underline{\underline{V}}^\omega$, et nous étudions séparément X· et X· . Pour étudier le premier processus, il nous faut un calcul :

LEMME 2. <u>On a pour tout t.a.</u> T (<u>que</u> X <u>soit prévisible ou non</u>)

$$(12) \qquad E[\int_{T-}^\infty |X_s|\,|dA_s|\,|\underline{\underline{F}}_T] \leq \|A\|_{\underline{\underline{V}}^\omega} E[X_\infty^*\,|\underline{\underline{F}}_T]$$

COROLLAIRE. <u>On a pour</u> $1\leq p<\infty$

$$(13) \qquad \|X\cdot A\|_{\underline{\underline{V}}^p} \leq c_p \|X\|_{\underline{\underline{S}}^p} \|A\|_{\underline{\underline{V}}^\omega} \ .$$

DEMONSTRATION. Lorsque p=1, le corollaire se déduit de (12) en prenant T=0 et en intégrant. Lorsque p>1, il résulte de (12) et du lemme de Garsia (séminaire IX p. 216, lemme 2 et sa variante). Démontrons (12) en posant $B_t = \int_{0-}^t |dA_s|$, $m=\|A\|_{\underline{\underline{V}}^\omega}$. Nous avons

$$E[\int_{T-}^{\infty} |X_{s-}dA_s| \,|\, \underline{\underline{F}}_T] \leq E[\int_{T-}^{\infty} X_s^* \, dB_s | \underline{\underline{F}}_T]$$
$$= E[\int_{T-}^{\infty} (B_\infty - B_{s-}) dX_s^* + X_{T-}^* (B_\infty - B_{T-}) | \underline{\underline{F}}_T]$$
$$\leq mE[(X_\infty^* - X_{T-}^*) + X_{T-}^* | \underline{\underline{F}}_T] = mE[X_\infty^* | \underline{\underline{F}}_T]$$

Pour passer de l'avant dernière ligne à la dernière, on utilise le fait que le processus croissant (X_t^*) est optionnel, ce qui permet de remplacer le processus $(B_\infty - B_{s-})$ par sa projection optionnelle, bornée par m.

Nous passons aux martingales. Soit N appartenant à $\underline{\underline{H}}^\omega = \underline{\underline{BMO}}$. Notre problème consiste à établir que

(14) $$\|X \bullet N\|_{\underline{\underline{H}}^p} \leq c_p \|X\|_{\underline{\underline{S}}^p} \|N\|_{\underline{\underline{BMO}}} \qquad (1 \leq p < \infty)$$

après quoi le théorème 1 résulte du rapprochement de (13) et (14). On peut se borner à établir (14) lorsque X est <u>borné</u>.

Soit p' l'exposant conjugué de p si $1<p<\infty$, et $p'=\omega$ si $p=1$. La martingale $X \bullet N$ appartient à $\underline{\underline{BMO}} \subset \underline{\underline{H}}^p$, et nous avons donc

$$\|X \bullet N\|_{H^p} \leq c_p \sup_L E[\int_{0-}^{\infty} d[X \bullet N, L]_s]$$

L parcourant la boule unité de $\underline{\underline{H}}^{p'}$. Pour finir, il nous suffit de prouver que

(15) si $\|N\|_{\underline{\underline{BMO}}} \leq 1$, $\|L\|_{\underline{\underline{H}}^{p'}} \leq 1$, $E[\int_{0-}^{\infty} d[X \bullet N, L]_s] \leq c_p \|X\|_{\underline{\underline{S}}^p}$

pour tout processus borné X. Nous distinguons maintenant deux cas :

a) $1<p<\infty$. Nous écrivons cette espérance $E[\int d[N, X \bullet L]_s]$. D'après le lemme 1, nous avons

(16) $$\|X \bullet L\|_{\underline{\underline{H}}^1} \leq c\|X\|_{\underline{\underline{S}}^p} \|L\|_{\underline{\underline{H}}^{p'}} \leq c\|X\|_{\underline{\underline{S}}^p}$$

et (15) se réduit à l'inégalité de Fefferman, puisque $\|N\|_{\underline{\underline{BMO}}} \leq 1$.

b) Si p=1, nous écrivons l'espérance (15) sous la forme $E[\int_{0-}^{\infty} X_s \, d[L,N]_s]$, et nous remarquons que

(17) $$|d[L,N]_s| \leq \frac{1}{2}(d[L,L]_s + d[N,N]_s)$$

engendre un potentiel gauche borné. Puis nous appliquons (13) pour p=1.

Compte tenu de (9), cette démonstration s'applique aussi bien au cas où X est optionnel.

L'inégalité (11) est probablement le résultat de théorie des martingales qui ressemble le plus aux inégalités de Calderon-Zygmund.

SUR L'INEGALITE DE FEFFERMAN

L'énoncé suivant étend dans deux directions l'inégalité de Fefferman (sans être plus profond ! c'en est une conséquence facile) : remplacement des martingales par des semimartingales, remplacement de $\underline{\underline{H}}^1$ par $\underline{\underline{H}}^p$

THEOREME 2. <u>Soient</u> U <u>et</u> V <u>deux semimartingales</u>. <u>On a pour</u> $1 \leqq p < \infty$

$$\|[U,V]\|_{\underline{\underline{V}}^p} = \|\int_{0-}^{\infty} |d[U,V]_s|\,\|_{L^p} \leqq c_p \|U\|_{\underline{\underline{H}}^p} \|V\|_{\underline{\underline{H}}^\omega} \tag{17}$$

DEMONSTRATION. Nous écrivons U=M+A, V=N+B, où A et B sont prévisibles.

1) $$\|\int_{0-}^{\infty} |d[U,B]_s|\,\|_{L^p} = \|\sum_s |\Delta U_s \Delta B_s|\,\|_{L^p} = \|\Delta U \cdot B\|_{\underline{\underline{V}}^p} \leqq c_p \|\Delta U\|_{\underline{\underline{S}}^p} \|B\|_{\underline{\underline{V}}^\omega} \quad (13)$$
$$\leqq c_p \|U\|_{\underline{\underline{H}}^p} \|V\|_{\underline{\underline{H}}^\omega} .$$

2) $$\|\int_{0-}^{\infty} |d[A,N]_s|\,\|_p = \|\sum_s |\Delta A_s \Delta N_s|\,\|_{L^p} \leqq c\|N\|_{\underline{\underline{BMO}}} \|\sum_s |\Delta A_s|\,\|_{L^p}$$
car N a des sauts bornés par $c\|N\|_{\underline{\underline{BMO}}}$
$$\leqq c\|N\|_{\underline{\underline{BMO}}} \|A\|_{\underline{\underline{V}}^p} \leqq c_p \|U\|_{\underline{\underline{H}}^p} \|V\|_{\underline{\underline{H}}^\omega} .$$

3) Reste le cas le plus important, la majoration de $\int |d[M,N]_s|$. Il s'agit de démontrer que pour toute v.a. $Z \in L^{p'}$ (où p' est l'exposant conjugué de p, qui est >1 puisque $p<\infty$, et qui peut être supposé fini, le cas p=1 étant l'inégalité de Fefferman usuelle) on a

$$E[Z\int_{0-}^{\infty} |d[M,N]_s|\,] \leqq c_p \|Z\|_{L^{p'}} \|M\|_{\underline{\underline{H}}^p} \|N\|_{\underline{\underline{BMO}}}$$ (il suffit de traiter le cas où Z est borné)

Soit (H_t) un processus optionnel à valeurs dans [-1,1], densité de $|d[M,N]|_s$ par rapport à $d[M,N]_s$; le côté gauche s'écrit

$$E[Z\int_{0-}^{\infty} H_s d[M,N]_s] = E[\int_{0-}^{\infty} X_s d[M,N]_s\,] = E[\int_{0-}^{\infty} d[X\cdot M,N]_s\,]$$

où (X_s) est le processus $H_s E[Z|\underline{\underline{F}}_s]$. Il n'y a aucune difficulté quant à l'existence de ces diverses intégrales, puisque la v.a. Z et le processus X sont bornés. Nous avons d'après (9)

$$\|X\cdot M\|_{\underline{\underline{H}}^1} \leqq c_p \|X\|_{\underline{\underline{S}}^{p'}} \|M\|_{\underline{\underline{H}}^p} \leqq c_p \|Z\|_{L^{p'}} \|M\|_{\underline{\underline{H}}^p}$$

d'après l'inégalité de Doob, puisque p'>1 . Et finalement, nous majorons $E[\int d[X\cdot M,N]_s]$ par l'inégalité de Fefferman ordinaire. Le théorème est établi.

REMARQUE. (17) vaut aussi pour p=ω. D'après l'inégalité $2|d[U,V]| \leqq d[U,U]+d[V,V]$, il suffit de montrer que [U,U] engendre un potentiel gauche borné. On écrit U=M+A , $[U,U] \leqq 2([M,M]+[A,A])$, avec $M \in \underline{\underline{BMO}}$, et $A \in \underline{\underline{V}}^\omega$. Puis $E[[A,A]_{T-}^{\infty}|\underline{\underline{F}}_T] \leqq E[(\int_{T-}^{\infty}|dA_s|)^2|\underline{\underline{F}}_T] \leqq 2c^2$ si le potentiel de $\int|dA|$ est $\leqq c$.