SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CLAUDE DELLACHERIE

Quelques exemples familiers, en probabilités, d'ensembles analytiques non boréliens

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 12 (1978), p. 746-756

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1978__12__746_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1976/77

QUELQUES EXEMPLES FAMILIERS, EN PROBABILITES, D'ENSEMBLES ANALYTIQUES, NON BORELIENS

par C. Dellacherie

On va montrer ici, pour répondre à des demandes (indépendantes) de K.L. Chung et D. Williams, que des êtres que l'on rencontre quotidiennement, en théorie des processus stochastiques, fournissent des exemples naturels d'ensembles analytiques non boréliens.

Nous allons en fait présenter d'abord trois exemples, sans démonstration, puis exposer une méthode générale pour démontrer qu'un ensemble analytique n'est pas borélien, et, enfin, revenir à nos exemples pour montrer que cette méthode leur est applicable.

I.- TROIS EXEMPLES

a) <u>L'ensemble des temps d'arrêt non finis</u> (temps discret) :

Soient E un ensemble infini dénombrable, Ω l'ensemble des applications de $\mathbb{N} = 1,2,\ldots$ dans E, et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les applications coordonnées sur $\Omega = E^{\mathbb{N}}$: $(\Omega,(X_n),\ldots)$ est l'espace canonique pour décrire, en temps discret, les processus à valeurs dans E. Nous munissons E de la topologie discrète et Ω de la topologie produit : Ω est un espace polonais, homéomorphe à $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, et les suites $\omega\in\Omega$ constantes à partir d'un certain rang forment une partie dénombrable dense dans Ω.

Soit T une application de Ω dans $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N}\cup\{+\infty\}$; on sait que T est un t.d'a. de la filtration naturelle de (X_n) ssi T vérifie le test de Galmarino :

$$\forall \omega,w\in\Omega \quad \forall n\in\mathbb{N} \quad T(\omega)>n \text{ et } w|n=\omega|n \Rightarrow T(w)>n \qquad (°)$$

où $\omega|n$ désigne la suite finie des n premiers termes de ω. Désignons par $\underline{\underline{T}}$ l'ensemble de tous les t.d'a., et munissons le de la topologie de la convergence simple sur Ω. Il n'est pas difficile de voir que $\underline{\underline{T}}$ est alors un espace compact métrisable : en effet, la convergence simple conserve la propriété (°) - d'où la compacité -, et $T\in\underline{\underline{T}}$ est uniquement déterminé par sa restriction aux suites ω constantes à partir d'un certain rang - d'où la métrisabilité -.

Considérons le sous-espace $\underline{\underline{P}} = \{T\in\underline{\underline{T}} : \exists\omega\ T(\omega) = +\infty\}$: $\underline{\underline{P}}$ <u>est une partie analytique</u>, <u>non borélienne</u>, <u>de</u> $\underline{\underline{T}}$. En fait, $\underline{\underline{P}}$ est une sorte d'ensemble analytique universel, dont l'étude revient à celle de la notion de schéma de Souslin (cf l'exposé "Ensembles analytiques et temps d'arrêt" de Meyer et moi, dans le volume IX).

b) <u>L'ensemble des applications continues à droite</u> (temps continu) :

Soient E un espace polonais, comportant au moins deux points, Ω l'ensemble des applications continues à droite de $\mathbb{R}_+$ dans E, et (X_t) les applications coordonnées sur Ω : $(\Omega,(X_t),\ldots)$ est l'espace canonique pour décrire, en temps continu, les "bons" processus à valeurs dans E.

Soit $W = E^{\mathbb{Q}_+}$, muni de la topologie produit : c'est un espace polonais. Et, si l'on identifie $\omega\in\Omega$ à sa restriction à $\mathbb{Q}_+$, on peut considérer Ω comme une partie de W ; la trace sur Ω de la tribu borélienne $\underline{\underline{B}}(W)$ de W est alors égale à la tribu $\underline{\underline{F}}^\circ$ engendrée par les X_t sur Ω.

Disons qu'une partie de W est coanalytique si son complémentaire est analytique : Ω <u>est une partie coanalytique</u>, <u>non borélienne</u>, <u>de</u> W. (Ma référence la plus ancienne : Hoffmann-Jørgensen, "The theory of analytic sets", Lecture Notes N°10 de l'Université de Aarhus).

c) <u>Le temps d'entrée dans un fermé du processus càdlàg canonique</u> :

On désigne toujours par E un espace polonais mais, cette fois, Ω est l'ensemble des applications continues à droite et pourvues de limites à gauche de $\mathbb{R}_+$ dans E ; (X_t) désigne les applications coordonnées. On plonge, comme ci-dessus, Ω dans $W = E^{\mathbb{Q}_+}$: on a $\underline{\underline{F}}^\circ = \underline{\underline{B}}(W)_{|\Omega}$. Et, à cause de l'existence des limites à gauche, il est vrai, cette fois, que Ω est une partie borélienne de W. Par conséquent, les parties $\underline{\underline{F}}^\circ$-analytiques de Ω sont exactement les parties analytiques de W qui sont contenues dans Ω.

Soient F un fermé de E et T_F son temps d'entrée. On sait que T_F est un t.d'a. de $(\underline{\underline{F}}_t)$, où $(\underline{\underline{F}}_t)$ est la filtration augmentée habituelle de la filtration naturelle $(\underline{\underline{F}}^\circ_t)$ de (X_t). Mais, est-ce que T_F est un t.d'a. de $(\underline{\underline{F}}^\circ_{t+})$? Nullement, sauf si F est ouvert ! Nous montrerons, au §III, que, si F est une partie fermée non ouverte de E, alors, pour tout $t>0$, $\{T_F < t\}$ <u>est</u> $\underline{\underline{F}}^\circ$<u>-analytique</u>, <u>mais n'appartient pas à</u> $\underline{\underline{F}}^\circ$.

Nous passons maintenant à l'exposé de la méthode générale promise. En fait, pour ne pas être trop abstrait, nous commençons par étudier plus en détails l'exemple a), ce qui nous permettra d'illustrer ensuite notre discours sur les "dérivations". Pour les démonstrations des résultats généraux du §II, je renverrai à mon exposé "Les dérivations en théorie descriptive des ensembles et le théorème de la borne" paru dans le volume XI (voir aussi "Erratum et addendum..." dans ce volume).

II.- DERIVATIONS ET THEOREME DE LA BORNE

Reprenons l'espace métrisable compact $\underline{\underline{T}}$ des t.d'a. sur $\Omega = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, muni de sa structure d'ordre (partiel) habituel : $S \leq T$ ssi $\forall\omega\ S(\omega) \leq T(\omega)$. Noter que $\leq$ est un ordre compact (i.e. le graphe de $\leq$ dans $\underline{\underline{T}} \times \underline{\underline{T}}$ est compact) et que $(\underline{\underline{T}}, \leq)$ est une lattice complète (en fait, $\underline{\underline{T}}$ est stable pour les sup et inf de familles quelconques) ; nous noterons ϕ le plus petit élément, i.e. le t.d'a. identiquement égal à 1 .

Considérons maintenant l'opération de <u>dérivation</u> sur $\underline{\underline{T}}$, i.e. l'application notée d ou ' de $\underline{\underline{T}}$ dans $\underline{\underline{T}}$ définie par

$$d(T) = T' = \inf \{S \in \underline{\underline{T}} : S \geq T-1\}$$

On vérifie sans peine que l'on a

$$T'(\omega) > n \iff \exists w\ \omega|n = w|n \text{ et } T(w) > n+1$$

soit encore, si $\omega^{n,k}$ désigne la suite w telle que $w|n = \omega|n$ et que $X_m(w) = k$ pour $m > n$,

$$T'(\omega) > n \iff \exists k\ T(\omega^{n,k}) > n+1$$

On en déduit que d est une application borélienne de $\underline{\underline{T}}$ dans $\underline{\underline{T}}$ (elle est, en fait, de 1ère classe de Baire).D'autre part, vis à vis de $\leq$, d a les propriétés suivantes

$$\forall T\ \ d(T) \leq T \qquad\qquad \forall S,T\ \ S \leq T \Rightarrow d(S) \leq d(T)$$

Nous dirons que T est <u>parfait</u> si $d(T) = T$.

Soit maintenant I l'ensemble des ordinaux dénombrables et définissons, pour $T \in \underline{\underline{T}}$, la <u>suite transfinie des dérivés successifs</u> $(T^i)_{i\in I}$ de T , par récurrence transfinie, comme suit

$$T^0 = T$$

$$T^j = \inf_{i<j} d(T^i) \quad (\text{si } j \text{ est de 1ère espèce, } T^j = d(T^{j-1}))$$

et associons à T son <u>indice</u> j(T) défini par

$$j(T) = \inf \{i \in I : T^i = \phi\} \quad \text{si } \{\ldots\} \text{ n'est pas vide}$$
$$= \text{aleph}_1 \qquad\qquad \text{si } \{\ldots\} \text{ est vide}$$

Noter que, comme un t.d'a. est bien défini par sa restriction à l'ensemble dénombrable des suites ω constantes à partir d'un certain rang, il existe en fait un ordinal dénombrable i tel que $T^j = T^i$ pour tout $j > i$: si i(T) est le plus petit ordinal vérifiant cette propriété, $S = T^{i(T)}$ est le plus grand t.d'a. parfait majoré par T , et on a $j(T) = i(T)$ si $S = \phi$ et $j(T) = \text{aleph}_1$ sinon. Il est alors facile de voir que l'on a $j(T) < \text{aleph}_1$ ssi T est un t.d'a. fini ; il n'est pas difficile non plus de montrer, même si cela surprend le novice, que, pour tout $i \in I$, il existe un t.d'a. fini T tel que $j(T) = i$: en particulier, on est assuré que $\sup_{T \text{ fini}} j(T) = \text{aleph}_1$ (nous identifions aleph_1 avec le premier ordinal non dénombrable).

Posons, finalement,

$C = \{T \varepsilon \underline{\underline{T}} : j(T) = \text{aleph}_1\}$ $\qquad D = \{T \varepsilon \underline{\underline{T}} : j(T) < \text{aleph}_1\}$

D'après ce qui précède, C est l'ensemble des t.d'a. non finis, qui avait été noté $\underline{\underline{P}}$ dans le §I. On a les résultats suivants, qui découleront d'un théorème général sur les dérivations :

a) C est analytique, D est coanalytique

b) $T \varepsilon C$ ssi il existe $S \neq \phi$ parfait tel que $S \leq T$

c) si A est une partie analytique de $\underline{\underline{T}}$ contenue dans D, alors
$$\sup_{T\varepsilon A} j(T) < \text{aleph}_1$$

d) en particulier,
$$\sup_{T\varepsilon D} j(T) = \text{aleph}_1 \Rightarrow \text{D (et donc C) n'est pas borélien}$$

Nous passons maintenant à l'étude des dérivations dans un contexte très large, mais sans chercher la plus grande généralité.

On se donne d'abord un espace métrisable séparable X, plongé dans un espace polonais $\hat{X}$ (si X est polonais, on prend $X = \hat{X}$). Suivant la terminologie du livre rose (i.e. la nouvelle édition de "Probabilités et Potentiel"), nous dirons qu'une partie A de X est analytique[1] si elle est $\underline{\underline{B}}(X)$-analytique ; comme $\underline{\underline{B}}(X)$ est la trace sur X de $\underline{\underline{B}}(\hat{X})$, A est analytique dans X ssi c'est la trace sur X d'une partie analytique $\hat{A}$ de $\hat{X}$. Ceci dit, on suppose X muni d'un ordre partiel $\leq$ vérifiant les conditions suivantes

1) il existe un plus petit élément pour $\leq$, noté ϕ

2) toute famille (non vide) filtrante décroissante d'éléments de X admet une borne inférieure

3) il existe une relation analytique $\dashv$ sur $\hat{X}$ telle que pour $x, y \varepsilon \hat{X}$,
$$x \dashv y \text{ et } y \varepsilon X \iff x \varepsilon X \text{ et } y \varepsilon X \text{ et } x \leq y$$

Cela implique que $\leq$ est un ordre analytique sur X.

On se donne ensuite une dérivation analytique d sur X, i.e. une application d de X dans X vérifiant les propriétés

1) $\forall x \quad d(x) \leq x \qquad \forall x,y \quad x \leq y \Rightarrow d(x) \leq d(y)$

2) la relation $x \leq d(y)$ est analytique sur X (c'est le cas si d est une application borélienne de X dans X)

On dit que x est parfait si $d(x) = x$.

A tout $x \varepsilon X$ on peut alors, comme dans le cas particulier des t.d'a., associer la suite transfinie $(x^i)_{i\varepsilon I}$ des dérivés successifs de x, puis

----

1) Dans notre terminologie, qui n'est pas celle de Choquet etc, le fait pour A d'être analytique dépend du "contexte" X et n'est pas une notion absolue ; suivant la terminologie de Bourbaki, la notion absolue correspondante est celle de partie souslinienne (par exemple, une partie analytique de $\hat{X}$, polonais, est souslinienne). C'est en partie pour ne pas avoir à entrer dans ces subtiles distinctions de vocabulaire que nous avons distingué, dès l'abord, un bon plongement de X.

l'<u>indice</u> $j(x)$ de x ; enfin, comme ci-dessus, on définit deux parties disjointes et complémentaires C et D de X par

$$C = \{x \varepsilon X : j(x) = \aleph_1\} \qquad D = \{x \varepsilon X : j(x) < \aleph_1\}$$

mais on n'a plus, en général, de caractérisation "naturelle" de C et D ne faisant pas appel à la dérivation d.

Cependant, dans ce cadre général, on a les mêmes résultats que ceux annoncés plus haut (sauf qu'il n'est pas exclu que $\sup_{x\varepsilon D} j(x) < \aleph_1$) :

THEOREME.- <u>Si</u> d <u>est une dérivation analytique sur</u> $(X,\leq)$, <u>alors</u>

a) C <u>est analytique</u>, D <u>est coanalytique</u>, <u>dans</u> X

b) $x \varepsilon C$ <u>ssi il existe</u> $y \neq \phi$ <u>parfait tel que</u> $y \leq x$

c) $j(.)$ <u>vérifie le</u> théorème de la borne : <u>si</u> $\hat{A}$ <u>est une partie analytique de</u> $\hat{X}$ <u>contenue dans</u> D , <u>alors</u>

$$\sup_{x\varepsilon\hat{A}} j(x) < \aleph_1$$

d) <u>en particulier</u>,

$$\sup_{x\varepsilon D} j(x) = \aleph_1 \Rightarrow D \text{ n'est pas borélien dans } \hat{X}$$

REMARQUE.- Si X est l'ensemble des compacts de $[0,1]$ muni de la topologie de Hausdorff, si $\leq$ est la relation d'inclusion et si d est la dérivation classique de Cantor, on retrouve en b) un théorème de Cantor et en d) un théorème d'Hurewicz (on sait, d'après Cantor, que l'on a dans ce cas $\sup_{x\varepsilon D} j(x) = \aleph_1$, et que D est l'ensemble des compacts dénombrables).

Je ne puis m'empêcher de dire quelques mots sur la démonstration de ce théorème car elle s'écrit bien dans le langage probabiliste. Considérons l'espace polonais $W = \hat{X}^{\mathbb{N}}$ et l'application S de W dans $\overline{\mathbb{N}}$ définie comme suit : on désigne par (X_n) les applications coordonnées sur W , par $\dashv$ la relation analytique sur $\hat{X}$ associée à $\leq$ au point 3) ci-dessus et par R une relation analytique sur $\hat{X}$ telle que sa restriction à X soit égale à la relation associée à d (i.e., pour $x,y \varepsilon X$, on a $x R y$ ssi on a $x \leq d(y)$) ; on note $\not\dashv$ (resp $\not R$) la négation de $\dashv$ (resp de R) ; finalement, on pose

$$S(w) = 1 + \inf\{n \geq 2 : X_n(w) = \phi \text{ ou } X_n(w) \not\dashv X_1(w) \text{ ou } X_n(w) \not R\, X_{n+1}(w)\}$$

On vérifie sans peine que, pour tout n, $\{S > n\}$ est une partie analytique de W - nous dirons que S est une <u>fonction analytique</u> sur W -, et que S vérifie le test de Galmarino (°) :

$$\forall w,w' \varepsilon W \quad \forall n \varepsilon \mathbb{N} \quad S(w) > n \text{ et } w|n = w'|n \Rightarrow S(w') > n$$

Disons qu'une application T de W dans $\overline{\mathbb{N}}$ est un t.d'a. si elle vérifie le test (°). Lorsque $\hat{X}$ est dénombrable, muni de la topologie discrète, la condition (°) entraine que T est une fonction continue, mais ce n'est pas le cas en général : T peut être alors très loin d'être mesurable (prendre une partie H quelconque de $\hat{X}$ et poser $T(w) = 1$ si $X_1(w) \varepsilon H$ et

$T(w) = 2$ si $X_1(w) \notin H$). Cela n'empêche que l'on peut définir, comme dans le cas où $\hat{X} = \mathbb{N}$, le dérivé T' de T et la suite transfinie $(T^i)_{i\in I}$ des dérivés successifs de T, et finalement l'indice $j(T)$ de T. Maintenant, si T n'est pas fini, il est facile de voir que l'on a toujours $j(T)$ égal à aleph_1, mais, en général, la réciproque est fausse si $\hat{X}$ n'est pas dénombrable. On a cependant le théorème important suivant, dégagé par les logiciens des travaux classiques russo-polonais (et écrit dans un autre langage : celui des relations bien fondées) :

2 THEOREME.- Soit T un t.d'a. analytique sur W. Alors T est fini ssi l'indice $j(T)$ est $< \text{aleph}_1$.

Revenons maintenant à notre t.d'a. analytique S associé à la dérivation d et voyons, rapidement, comment le théorème 2 permet de démontrer le point c) du théorème 1 (qui en est la partie cruciale). Soit $\hat{A}$ une partie analytique de $\hat{X}$ contenue dans D et posons

$$S_{\hat{A}}(w) = S(w) \quad \text{si } w \in \hat{A} \qquad S_{\hat{A}}(w) = 1 \quad \text{si } w \notin \hat{A}$$

On définit ainsi un t.d'a. analytique $S_{\hat{A}}$ sur W, et il n'est pas difficile de voir que $S_{\hat{A}}$ est fini. On sait alors, d'après le théorème 2, que son indice $j(S_{\hat{A}})$ est $< \text{aleph}_1$, et il n'est pas difficile, non plus, de vérifier que $\sup_{x\in\hat{A}} j(x)$ est majoré par $j(S_{\hat{A}}) + 1$.

III.- RETOUR AUX EXEMPLES

Nous ne revenons pas sur l'exemple a), dont il a été abondamment question au cours du §II. Pour les exemples b) et c), il nous faut introduire un ordre et des dérivations adéquates. Au lieu de traiter chaque exemple séparément, nous allons montrer comment, d'une manière générale, on peut construire des dérivations relatives aux divers espaces "canoniques" considérés en théorie des processus stochastiques en temps continu. Nous reprenons, en fait, l'exemple probabiliste de l'exposé "Les dérivations en théorie descriptive..." , p 41 du vol. XI, en en améliorant la présentation et la correction mathématique...

Soit E un espace polonais auquel on adjoint un point isolé δ. Nous désignons par Ω l'ensemble des trajectoires continues à droite, à durée de vie, dans l'espace d'états E : on a $\omega\in\Omega$ ssi ω est une application continue à droite de $\mathbb{T} = [0,\infty]$ dans $E' = E\cup\{\delta\}$ telle que $\omega(\infty) = \delta$ et que $\omega(t) = \delta$ si on a $\omega(s) = \delta$ pour un $s < t$; nous désignerons par $[\delta]$ l'application constante égale à δ. On définit, comme d'habitude, pour $t\in\mathbb{T}$, les applications coordonnées (X_t) par $X_t(\omega) = \omega(t)$ et les opérateurs de translations (θ_t) par $X_s(\theta_t(\omega)) = X_{t+s}(\omega)$ en convenant que $t + \infty = \infty$. Enfin, on munit Ω de la tribu $\underline{\underline{F}}^\circ$ engendrée par les X_t, E' étant muni de sa tribu borélienne $\underline{\underline{B}}(E')$, et de la filtration naturelle $(\underline{\underline{F}}^\circ_t)$ associée à (X_t) : en particulier, les applications $(t,\omega)\to X_t(\omega)$ et $\to\theta_t(\omega)$ sont mesurables pour les tribus $\underline{\underline{B}}(\mathbb{T})\times\underline{\underline{F}}^\circ$ et $\underline{\underline{B}}(E')$. On considère d'autre part l'ensemble $W = E'^{\mathbb{Q}_+}$ que l'on munit de la topologie polonaise produit, et, identifiant $\omega\varepsilon\Omega$ à sa restriction à $\mathbb{Q}_+$, on plonge Ω dans W : il est alors facile de voir que $\underline{\underline{F}}^\circ$ est égale à la trace de $\underline{\underline{B}}(W)$ sur Ω.

Montrons, rapidement, que Ω est au moins coanalytique dans W (pour plus de détails, voir IV-18 et 19 du livre rose ; on pourrait aussi attendre, pour établir ce fait, d'avoir défini un ordre analytique sur $\mathbb{T}\times W'$, où W' est une partie coanalytique de W contenant Ω, et une dérivation analytique d sur $\mathbb{T}\times W'$ telle que $\Omega = D$, puis conclure par le point a) du théorème 1. Mais cela compliquerait la définition de l'ordre et des dérivations de ne pas savoir, a priori, que Ω est coanalytique). Disons qu'une fonction S de W dans $\mathbb{T}$ est <u>coanalytique</u> si, pour tout $t\varepsilon\mathbb{T}$, $\{S\geq t\}$ est coanalytique (soit, si $\{S<t\}$ est analytique) ; pour vérifier que S est coanalytique, il suffit évidemment de considérer les t rationnels, et on peut remplacer "$\geq$" par "$>$". Noter, d'autre part, que tout début d'une partie borélienne (et même analytique) de $\mathbb{T}\times W$ est une fonction coanalytique. Ceci dit, Ω est coanalytique parce que l'on a $\Omega = \{S=\infty\}$, où S est le début de la partie borélienne H de $\mathbb{T}\times W$

$$H = \{(t,w) : \exists r,s\,\varepsilon\,\mathbb{Q}_+\ r<s \text{ et } w(r)\neq\delta \text{ et } w(s)=\delta,\text{ ou } \exists(r_n)\subset\mathbb{Q}_+$$
$$r_n\downarrow t \text{ et } \lim_n w(r_n) \text{ n'existe pas ou est } \neq w(t) \text{ si } t\varepsilon\mathbb{Q}_+\}$$

Nous définissons maintenant un ordre (partiel) $\leq$ sur $\mathbb{T}\times\Omega$ en posant

$$(t,\omega)\leq(s,w)\quad\text{ssi}\quad s\leq t \text{ et } \omega=\theta_{t-s}(w)$$

où $\theta_{t-s}(w)=[\delta]$ si $t=\infty$; la transitivité de $\leq$ est assurée par la propriété de semi-groupe de (θ_t). On vérifie sans peine que $(\infty,[\delta])$ est le plus petit élément pour cet ordre, et que toute famille (non vide) filtrante décroissante d'éléments de $\mathbb{T}\times\Omega$ admet une borne inférieure (si $(t_j,\omega_j)_{j\varepsilon J}$ est une telle famille, sa borne inférieure est égale à (t,ω) où $t=\sup_{j\varepsilon J} t_j$ et où ω est égal à $\theta_{t-t_1}(\omega_1)$, où (t_1,ω_1) est un élément choisi de la famille). Nous allons montrer d'autre part qu'il existe une relation analytique $\dashv$ sur $\mathbb{T}\times W$ vérifiant, pour $\omega,w\,\varepsilon\,W$,

$$(t,\omega)\dashv(s,w) \text{ et } w\,\varepsilon\,\Omega \iff \omega\,\varepsilon\,\Omega \text{ et } w\,\varepsilon\,\Omega \text{ et } (t,\omega)\leq(s,w)$$

Nous remarquons d'abord que, $(t,\omega)\to\theta_t(\omega)$ étant une application mesurable de $(\mathbb{T}\times\Omega,\underline{\underline{B}}(\mathbb{T})\times\underline{\underline{F}}^\circ)$ dans lui-même, c'est aussi une application mesurable de $(\mathbb{T}\times\Omega,\ \underline{\underline{B}}(\mathbb{T})\times\underline{\underline{F}}^\circ)$ dans $(\mathbb{T}\times W,\ \underline{\underline{B}}(\mathbb{T}\times W))$ car $\underline{\underline{F}}^\circ=\underline{\underline{B}}(W)_{|\Omega}$ et $\underline{\underline{B}}(\mathbb{T})\times\underline{\underline{B}}(W)=\underline{\underline{B}}(\mathbb{T}\times W)$. Alors, d'après un théorème classique de Doob (cf I-18 ou III-18 du livre rose), $\mathbb{T}\times W$ étant polonais, il existe une application borélienne $(t,w)\to\phi_t(w)$ de $\mathbb{T}\times W$ dans lui-même telle que sa restriction à $\mathbb{T}\times\Omega$ soit égale à $(t,w)\to\theta_t(w)$. Posons alors, pour $\omega,w\,\varepsilon\,W$,

$$(t,\omega)\dashv(s,w)\quad\text{ssi}\quad w\notin\Omega \text{ ou } [s\leq t \text{ et } \omega=\phi_{t-s}(w)]$$

Il est facile de vérifier que $\dashv$ a les propriétés voulues.

Maintenant que nous avons un ordre adéquat sur $\mathbb{T}\times\Omega$, passons aux dérivations. Nous allons donner un procédé assez général pour construire des dérivations analytiques sur $\mathbb{T}\times\Omega$. Nous nous donnons une fonction T de Ω dans $\mathbb{T}$ vérifiant les conditions suivantes

1) T est <u>coanalytique</u> sur Ω (i.e. $\{T\geq t\}$ est coanalytique dans Ω pour tout t)

2) T est <u>surterminal</u> sur Ω , i.e., pour tout $\omega\varepsilon\Omega$ et tout $t\varepsilon\mathbb{T}$, on a

$$T(\omega)\leq t+T(\theta_t(\omega))$$

Par exemple, pour toute partie borélienne (et même analytique) A de E, les temps d'entrée

$$D_A(\omega) = \inf\{t\geq 0 : X_t(\omega)\varepsilon A\} \qquad T_A(\omega) = \inf\{t>0 : X_t(\omega)\varepsilon A\}$$

sont des fonctions coanalytiques surterminales. Noter aussi que, si T° est une fonction coanalytique sur Ω , alors la fonction T définie par

$$T(\omega) = \inf_{t\varepsilon\mathbb{T}}(t+T^\circ(\theta_t(\omega))$$

est à la fois coanalytique et surterminale. Ceci dit, soit donc T une fonction coanalytique surterminale sur Ω et voyons comment lui associer une dérivation analytique sur $\mathbb{T}\times\Omega$, notée $\underline{\theta}_T$. On pose pour cela

$$\underline{\theta}_T(t,\omega) = (t+T(\omega),\theta_{T(\omega)}(\omega))$$

pour tout $(t,\omega)\varepsilon\mathbb{T}\times\Omega$. Il est clair que l'on a $\underline{\theta}_T(t,\omega)\leq(t,\omega)$; la surterminalité de T ("oubliée" dans l'exposé du vol. XI précité...) assure que l'on a $(t,\omega)\leq(s,w) \Rightarrow \underline{\theta}_T(t,\omega)\leq\underline{\theta}_T(s,w)$: c'est un calcul standard bien ennuyeux à écrire. Il reste à vérifier que la relation sur $\mathbb{T}\times\Omega$ $(t,\omega)\leq\underline{\theta}_T(s,w)$ est analytique, ce qui résulte des équivalences

$$(t,\omega)\leq\underline{\theta}_T(s,w) \Leftrightarrow (t,\omega)\leq(s+T(w),\theta_T(w)) \Leftrightarrow s+T(w)\leq t \text{ et } \omega=\theta_{t-s}(w)$$

Par ailleurs, si l'on définit, comme à l'accoutumée, la suite transfinie des itérés successifs $(T^i)_{i\varepsilon I}$ de T par

$$T^0=0 \qquad T^1=T$$
$$T^{i+1} = T^i+T\circ\theta_{T^i}$$
$$T^j = \sup_{i<j} T^i \text{ si } j \text{ est un ordinal de 2ème espèce}$$

alors, tout simplement, le i-ème dérivé de (t,ω) se trouve être égal à $(t+T^i(\omega),\theta_{T^i}(\omega))$. Donc, si nous identifions Ω à $\{0\}\times\Omega$, ce qui nous permet de plonger Ω dans $\mathbb{T}\times\Omega$, on voit que $\{\omega\varepsilon\Omega : \exists i\varepsilon I\ T^i(\omega)=\infty\} = D\cap\Omega$, où, comme précédemment, D est l'ensemble des points d'indice < $\aleph_1$ pour la dérivation considérée.

Nous avons désormais tout ce qu'il faut (et même un peu plus...) pour traiter convenablement nos deux exemples restant du §I . Nous faisons cependant, auparavant, une petite récapitulation de la première partie de ce §III en espérant que cela aidera le lecteur à s'y retrouver. Nous reprenons essentiellement les définitions et notations, mais avec des omissions pour être bref.

Récapitulation

1) Ω est l'ensemble des applications continues à droite, à durée de vie, de $\mathbb{T}=[0,\infty]$ dans l'espace polonais $E\cup\{\delta\}$. Il est plongé dans l'espace polonais $W=(E\cup\{\delta\})^{\mathbb{Q}_+}$, dont il est une partie coanalytique.

2) $\mathbb{T}\times\Omega$ est muni de la relation d'ordre $\leq$ définie par

$$(t,\omega)\leq(s,w) \text{ ssi } s\leq t \text{ et } \omega=\theta_{t-s}(w)$$

Cet ordre est adéquat pour la théorie des dérivations.

3) Si T désigne une fonction coanalytique et surterminale de Ω dans $\mathbb{T}$ (i.e., on a $\{T<t\}$ analytique et $T\leq t+T\circ\theta_t$ pour tout t), on définit une dérivation analytique $\underline{\theta}_T$ sur $(\mathbb{T}\times\Omega\,,\leq)$ par

$$\underline{\theta}_T(t,\omega) = (t+T(\omega)\,,\,\theta_T(\omega))$$

De plus, si (T^i) désigne la suite transfinie des itérés successifs de T, le i-ème dérivé de (t,ω) pour $\underline{\theta}_T$ est égal à $(t+T^i(\omega)\,,\,\theta_{T^i}(\omega))$. En particulier, si Ω est identifié à $\{0\}\times\Omega$, on a l'égalité

$$\{\omega : j(\omega) < \text{aleph}_1\} = \{\omega : \exists i\ T^i(\omega)=\infty\}$$

et l'indice $j(\omega)$ est alors égal au plus petit $i\in I$ tel que $T^i(\omega)=\infty$.

3 THEOREME.- Si E comporte au moins deux points, alors Ω est une partie coanalytique non borélienne de l'espace polonais W.

D/ Soit (f_n) une suite de fonctions continues de $E\cup\{\delta\}$ dans $[0,1]$, séparant les points. Posons, pour tout $\omega\in\Omega$ et tout $m,n\in\mathbb{N}$,

$$T_{m,n}(\omega) = \inf\{t>0 : \overline{\lim}_{s\uparrow\uparrow t} f_n(X_s(\omega)) - \underline{\lim}_{s\uparrow\uparrow t} f_n(X_s(\omega)) > 1/m\}$$

Comme ω est une application continue à droite, on peut astreindre s à être rationnel si bien que $\{(t,\omega) : \overline{\lim}\ \ldots\}$ est une partie borélienne de $\mathbb{T}\times\Omega$ (cf IV-17 du livre rose). Par conséquent, $T_{m,n}$ est une fonction coanalytique, et c'est aussi un temps terminal. D'autre part, ω étant une application continue à droite, on a, pour tout $i\in I$,

$$T^i_{m,n}(\omega) < T^{i+1}_{m,n}(\omega) \text{ si } T^i_{m,n}(\omega)<\infty$$

Toute suite transfinie croissante de réels étant constante à partir d'un certain ordinal dénombrable, on en déduit que l'indice $j_{m,n}(\omega)$ associé à $T_{m,n}$ est $<\text{aleph}_1$ pour tout $\omega\in\Omega$. Par ailleurs, si $\underline{0}$ et $\underline{1}$ sont deux points distincts de E, il existe deux entiers m et n tels que $|f_n(\underline{1})-f_n(\underline{0})|>1/m$, et il est alors facile de construire pour tout $i\geq 1$, par récurrence transfinie, une fonction $\omega\in\Omega$, à valeurs dans $\{\underline{0},\underline{1}\}$, telle que $j_{m,n}(\omega)=i$ (nous expliciterons une telle construction au cours de la démonstration du théorème suivant). Il résulte alors du théorème de la borne que Ω ne peut être borélien dans W.

Nous passons maintenant à l'étude des temps d'entrée dans les fermés. D'abord quelques considérations d'ordre général. Pour toute partie borélienne (ou plus généralement analytique) A de E, posons

$$D_A(\omega) = \inf\{t\geq 0 : X_t(\omega)\in A\} \qquad T_A(\omega) = \inf\{t>0 : X_t(\omega)\in A\}$$

D_A et T_A sont des fonctions coanalytiques et aussi des temps terminaux. Lorsque A est un ouvert de E, on peut astreindre t à être rationnel dans les définitions ci-dessus, si bien que D_A et T_A sont alors des fonctions boréliennes et des t.d'a. de $(\underline{\underline{F}}^\circ_{t+})$. Si A est un fermé de E et si U_n est une suite décroissante d'ouverts tels que $A = \bigcap_n U_n = \bigcap_n \overline{U}_n$, posons

$$Z_A = \lim_n \uparrow D_{U_n} \qquad S_A = \lim_n \uparrow T_{U_n}$$

Il est facile de voir que Z_A et S_A ne dépendent pas de la suite (U_n) considérée ; nous nous contentons d'écrire cela pour $\omega\varepsilon\Omega$ pourvue de limites à gauche sur l'intervalle $]0,\infty[$, pour retrouver des choses familières faciles à écrire : on a alors

$$Z_A(\omega) = \inf\{t \geq 0 : X_{t-}(\omega) \text{ ou } X_t(\omega) \varepsilon A\}$$
$$S_A(\omega) = \inf\{t > 0 : X_{t-}(\omega) \text{ ou } X_t(\omega) \varepsilon A\}$$

Toujours est-il que Z_A et S_A sont à la fois des fonctions boréliennes, des temps terminaux et des t.d'a. de $(\underline{\underline{F}}^\circ_{t+})$; en fait, Z_A est même un t.d'a. de $(\underline{\underline{F}}^\circ_t)$ car on a

$$\{Z_A \leq t\} \text{ ssi } \forall m\ \exists n\ \{D_{U_n} < t - \tfrac{1}{m}\} \text{ ou } \{X_t \varepsilon A\}$$

Nous nous contenterons par la suite d'étudier en détail les temps Z_A et D_A, et traiterons le cas des temps S_A et T_A dans une remarque.

Nous notons maintenant F notre fermé de E et nous comparons Z_F et D_F. On a évidemment $Z_F \leq D_F$. D'autre part, si (Z_F^i) est la suite transfinie des itérés successifs de Z_F, il n'est pas difficile de voir que, pour tout $\omega\varepsilon\Omega$, il existe $i(\omega)\varepsilon I$ tel que $Z_F^i(\omega) = Z_F^{i(\omega)}(\omega)$ pour tout $i \geq i(\omega)$, et que, si $i_F(\omega)$ est le plus petit ordinal dénombrable ayant cette propriété, alors on a

$$i_F(\omega) = \inf\{i\varepsilon I : Z_F^i(\omega) = D_F(\omega)\}$$

Bien entendu, si $\sup_{\omega\varepsilon\Omega} i_F(\omega) < \text{aleph}_1$, alors D_F est une fonction borélienne sur Ω et en fait un t.d'a. de $(\underline{\underline{F}}^\circ_t)$ (il est facile de voir, par récurrence transfinie, que Z_F^i est une fonction borélienne pour tout $i\varepsilon I$). Et c'est évidemment le cas si E est discret (ce qui implique que E est dénombrable puisqu'il est polonais) car alors $D_F = Z_F$. Par contre, on a

4 THEOREME.- Soit Ω' le sous-ensemble de Ω constitué par les ω pourvues de limites à gauche sur $]0,\zeta(\omega)[$, où $\zeta = Z_{\{\delta\}}$ est la durée de vie, et soit F une partie fermée non ouverte de E. Alors, Ω' est une partie borélienne de W (et donc de Ω), et, pour tout $t \varepsilon]0,\infty]$, l'ensemble $\{\omega\varepsilon\Omega' : D_F(\omega) < t\}$ est une partie analytique non borélienne de Ω' (et donc de Ω, et de W). En particulier, D_F n'est pas une fonction borélienne sur Ω (ou Ω').

D/Le fait que l'ensemble des trajectoires càdlàg (avec considération ou non d'une durée de vie) est un borélien de W résulte des n^os IV-18 et 19 du livre rose. Ceci dit, on sait que D_F est une fonction coanalytique sur Ω et donc sur Ω'. Nous nous contentons de montrer que

$D^F = \{\omega\varepsilon\Omega' : D_F(\omega) < \infty\}$, qui est coanalytique dans Ω', n'y est pas borélien. Le cas des ensembles $D^F_t = \{\omega\varepsilon\Omega' : D_F(\omega) < t\}$, avec $t>0$, se traite de la même manière en remplaçant Ω' par $\Omega'_t = \Omega \cap \{\zeta \leq t\}$. Nous commençons par restreindre notre ordre $\leq$ sur $\mathbb{T}\times\Omega$ à $\mathbb{T}\times\Omega'$: comme Ω' est stable pour les opérateurs de translation, il est clair que $(\mathbb{T}\times\Omega', \leq)$ est adéquat pour la théorie des dérivations. Considérons alors la restriction de Z_F à Ω', que nous notons T pour soulager le dactylographe : il est clair que la restriction à $\mathbb{T}\times\Omega'$ de la dérivation associée à Z_F est une dérivation analytique $\underline{\theta}_T$ sur $\mathbb{T}\times\Omega'$. Nous remarquons maintenant que, si on identifie Ω' à $\{0\}\times\Omega'$, on a $D^F = \{\omega\varepsilon\Omega' : j(\omega) < \text{aleph}_1\}$ où $j(.)$ est l'indice associé à $\underline{\theta}_T$. D'après le théorème de la borne, toute partie analytique de Ω' étant une partie analytique de W, nous saurons que D^F n'est pas borélien dans W si l'on a $\sup_{\omega\varepsilon D^F} j(\omega) = \text{aleph}_1$. Nous allons démontrer un peu mieux : F étant un fermé non ouvert de E, il existe, pour tout $i \geq 1$, un élément ω_i de D^F tel que $j(\omega_i) = i$. Nous choisissons une suite (x_n) d'éléments de $E-F$ convergeant vers un élément x de F et nous désignons par ω_1 l'élément de D^F tel que $X_s(\omega_1) = x_n$ pour tout $s\,\varepsilon\,[n-1,n[$: on a $j(\omega_1) = 1$ et $\lim_{s\uparrow\uparrow\infty} X_s(\omega_1) = x$. Maintenant, pour $j>1$, soit $(t_i)_{i<j}$ une suite transfinie strictement croissante de réels telle que $t_0 = 0$ et que $t = \sup_{i<j} t_i$, qui est fini si j est de 1ère espèce, soit égal à ∞ si j est de 2ème espèce (pour le lecteur qui ne connaitrait pas bien les ordinaux, montrer l'existence d'une telle suite est un excellent exercice), et désignons par ω_j l'élément de D^F défini par $X_s(\omega_j) = X_{\pi^i(s)}(\omega_1)$ pour $s\,\varepsilon\,[t_i, t_{i+1}[$ (avec $t_{i+1} = \infty$ si $i+1 = j$) où π^i est une bijection croissante de $[t_i, t_{i+1}[$ sur $[0,\infty[$. Alors, on a $T^i(\omega_j)$ égal à t_i pour tout $i<j$ et donc $j(\omega_j) = j$.

REMARQUES.- 1) Il est clair que l'on peut, dans l'énoncé du théorème, remplacer Ω' par toute partie borélienne de W, stable pour les opérateurs de translation, et contenant les trajectoires càdlàg à valeurs dans $\bigcup_n \{x_n\}$, où (x_n) est une suite de points de $E-F$ convergeant vers un point de F.

2) Bien entendu, les théorèmes 3 et 4 sont encore valables si on ne considère pas de durée de vie : ζ ne joue aucun rôle dans tout cela.

3) Le même résultat vaut pour le temps d'entrée T_F car l'ensemble $H = \{D_F = 0\} \cap \{T_F > 0\}$ est un borélien de Ω. En effet, on a $\omega\varepsilon H$ ssi

$$X_n(\omega)\varepsilon F \text{ et } \exists n\ \forall r\varepsilon\mathbb{Q}_+\ 0 < r < \frac{1}{n} \Rightarrow Z_F(\theta_r(\omega)) > 1/n$$

4) Si, au lieu d'itérer transfiniment Z_F, on itère transfiniment S_F, on trouve in fine, au lieu de D_F, le t.d'a. R_F défini par

$$R_F(\omega) = \inf\{t \geq 0 : \forall\varepsilon>0\ \exists s\ t<s<t+\varepsilon \text{ et } X_s(\omega)\,\varepsilon\,F\}$$

i.e. une espèce de temps d'entrée dans les points réguliers de F. Et le même résultat vaut pour R_F, avec la même démonstration.