CLAUDE DELLACHERIE

Quelques applications du lemme de Borel-Cantelli à la théorie des semimartingales

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 12 (1978), p. 742-745

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1978__12__742_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1976/77

QUELQUES APPLICATIONS DU LEMME DE BOREL-CANTELLI A LA THEORIE DES SEMIMARTINGALES

par C. Dellacherie

En nous plaçant sous les conditions habituelles, nous allons tirer quelques conséquences intéressantes, relatives aux "localisations", du théorème suivant

THEOREME 1.- Soit (f_n) une suite de v.a. ≥ 0 finies p.s.. Il existe

a) une suite (c_n) de réels >0 telle que la v.a. $f = \sum c_n f_n$ soit finie presque-sûrement,

b) une partition dénombrable, mesurable, (A^k) de Ω telle que, pour tout k et tout n, la v.a. $f_n . 1_{A^k}$ appartienne à L_∞,

c) une mesure de probabilité Q équivalente à P telle que, pour tout n, la v.a. f_n appartienne à $L_1(Q)$.

D/ Il est clair que a) entraine b) et c). Démontrons a). Choisissons des réels $a_n \geq 0$ (finis) tels que $\sum P[f_n > a_n] < \infty$. D'après le lemme de Borel-Cantelli, on a alors $P[\limsup_n \{f_n > a_n\}] = 0$ si bien que, pour presque tout ω, il existe un entier $N(\omega)$ tel que $f_n(\omega) \leq a_n$ pour $n \geq N(\omega)$. Par conséquent, si on pose $c_n = (2^n . a_n)^{-1}$, $f = \sum c_n f_n$ est p.s. finie.

Le corollaire simple suivant est, à mon avis, surprenant

COROLLAIRE.- Soit (m_n) une suite de mesures positives σ-finies sur un espace mesurable $(W, \underline{\underline{A}})$. Il existe

a) une suite (c_n) de réels >0 telle que la mesure $m = \sum c_n m_n$ soit une mesure σ-finie,

b) une partition dénombrable, mesurable, (A^k) de W telle que, pour tout k et tout n, on ait $m_n(A^k) < \infty$,

c) une v.a. $g > 0$ qui appartient à $L_1(m_n)$ pour tout n.

D/ Il est clair que a) entraine b) et c). Par ailleurs, soit, pour tout n, P_n une mesure de probabilité équivalente à m_n et posons $P = \sum 2^{-n} P_n$. Désignons par f_n une densité de m_n par rapport à P : f_n est ≥ 0 et finie P-p.s.. Alors, si (c_n) est une suite de réels >0 telle que $\sum f_n$ soit finie P-p.s., la mesure $m = \sum c_n m_n$ est σ-finie.

REMARQUE.- Je ne prétends pas que le théorème et son corollaire sont originaux, mais je regrette qu'ils ne soient pas "classiques" (j'ai oublié, en fait, où je les ai appris). Par ailleurs, il est aisé de voir que, au point a) du théorème, on ne peut se débarrasser de l'ensemble exceptionnel (prendre $\Omega = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ et f_n = la n-ième coordonnée).

Le théorème suivant précise le corollaire dans le cadre des P-mesures localement intégrables sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$

THEOREME 2.- <u>Soit</u> $({}^kA)$ <u>une suite de processus croissants adaptés, nuls en</u> 0 , <u>et localement intégrables. Il existe une suite croissante</u> (T_n) <u>de t.d'a. prévisibles tendant vers l'infini telle que l'on ait, pour tout</u> n <u>et tout</u> k , $E[{}^kA_{T_n}] < \infty$.

<u>D</u>/ Comme ${}^kA$ est localement intégrable, il possède une projection duale prévisible ${}^kB$. Fixons $s \in \mathbb{N}$ et choisissons une suite (c_k) de réels >0 (dépendant de s) telle que $\sum c_k {}^kB_s$ soit p.s. finie. Considérons le processus croissant prévisible $C_t = \sum c_k {}^kB_{s\wedge t}$ et soit S^p le début de l'ensemble prévisible fermé à droite $\{(t,\omega) : C_t(\omega) \geq p\}$: S^p est un t.d'a. prévisible et nous désignons par (S^p_q) une suite de t.d'a. prévisibles qui l'annonce. On a alors $C_{S^p_q} \leq p$ et donc, si (R_n) est une énumération des t.d'a. $S^p_q \wedge s$ lorsque p,q et s parcourent $\mathbb{N}$, on a $E[{}^kA_{R_n}] = E[{}^kB_{R_n}] < \infty$. Il ne reste plus qu'à poser $T_n = \sup_{i \leq n} R_i$ pour obtenir une suite (T_n) ayant les propriétés requises.

Voici une application assez surprenante de ce dernier résultat

THEOREME 3.- <u>Soit</u> $({}^kM)$ <u>une suite de martingales locales nulles en</u> 0 . <u>Il existe une suite croissante</u> (T_n) <u>de t.d'a. prévisibles tendant vers l'infini telle que, pour tout</u> n <u>et tout</u> k , <u>le processus arrêté</u> ${}^kM^{T_n}$ <u>soit une martingale appartenant à</u> H_1 .

<u>D</u>/ Cela résulte immédiatement du théorème 2 et du résultat classique suivant (cf le cours de Meyer dans le vol. X) : si M est une martingale locale nulle en 0 , alors $[M,M]^{1/2}$ est un processus croissant localement intégrable, et, si T est un t.d'a., le processus M^T est une martingale appartenant à H_1 ssi $[M,M]_T^{1/2}$ est une v.a. intégrable.

On est souvent amené, en théorie des intégrales stochastiques, à écrire qu'un processus continu à gauche est localement borné. Ici encore on a une "localisation uniforme" pour les suites :

THEOREME 4.- <u>Soit</u> $({}^kY)$ <u>une suite de processus prévisibles continus à gauche. Il existe une suite croissante</u> (T_n) <u>de t.d'a. tendant vers l'infini telle que, pour tout</u> n <u>et tout</u> k, <u>le processus arrêté</u> ${}^kY^{T_n}$ <u>soit borné</u>.

D/ Soit ${}^kY^*_t = \sup_{s\leq t} |{}^kY_s|$ (je n'ai pas de "star" sur mon clavier) : ${}^kY^*$ est un processus continu à gauche, adapté, et à trajectoires croissantes. Pour $s\in\mathbb{N}$, choisissons une suite (c_k) de réels >0 telle que $\sum c_k\, {}^kY^*_s < \infty$ p.s., et désignons par S^p le début de $\{\sum c_k\, {}^kY^*_{s\wedge t} \geq p\}$: cet ensemble aléatoire n'étant pas fermé à droite, S^p n'est pas forcément prévisible, mais, comme ${}^kY^*$ est continu à gauche, on est assuré que $\sum c_k\, {}^kY^*_{s\wedge S^p}$ est $\leq p$. Il n'y a plus qu'à réarranger les $S^p\wedge s$ en une seule suite (S_n) quand p et s parcourt $\mathbb{N}$ et à poser $T_n = \sup_{i\leq n} S_n$.

Le dernier résultat que nous allons donner, et qui repose aussi sur des résultats de Stricker, est sans doute le plus surprenant (même pour une suite réduite à un élément !)

THEOREME 5.- Soit $({}^kX)$ une suite de semimartingales. Il existe une mesure de probabilité Q équivalente à P telle que, sous Q, les semimartingales ${}^kX$ soient spéciales et que, si ${}^kX = {}^kM + {}^kA$ est la décomposition canonique de ${}^kX$ sous Q, alors on ait, pour tout k : ${}^kM$ est une martingale de carré intégrable au sens large (i.e. ${}^kM_t \in L_2(Q)$ pour tout t) et ${}^kA$ est un processus prévisible à variation intégrable au sens large (i.e. $\int_{[0,t]} |d^kA_s| \in L_1(Q)$ pour tout t).

D/ Nous nous contentons d'écrire la démonstration pour une suite réduite à un élément X, le cas d'une "vraie" suite s'y ramenant par un raisonnement analogue à ceux rencontrés plus haut. Rappelons que X, semimartingale sous P, est encore une semimartingale sous toute probabilité équivalente à P (et même seulement absolûment continue). Ceci dit, quitte à remplacer P par une probabilité équivalente, on peut supposer que, pour tout t (fini), $[X,X]_t$ appartient à $L_1(P)$ (appliquer le point c) du théorème 1) à la suite des $[X,X]_n$, n parcourant $\mathbb{N}$). Dans ces conditions, on sait que X est une semimartingale spéciale ; soit $X = N + B$ sa décomposition canonique (sous P) en une martingale locale N et un processus prévisible à variation finie B. Nous allons paraphraser maintenant la démonstration du premier théorème de l'exposé de Meyer "Sur un théorème de C. Stricker", paru dans le vol. XI. En tout t.d'a. prévisible borné S, on a $|\Delta X_S| \in L_1(P)$, $\Delta B_S = E[\Delta X_S | \underline{\underline{F}}_{S-}]$ et donc $E[\Delta B_S^2] \leq E[\Delta X_S^2]$, si bien que, en sommant sur des t.d'a. prévisibles, bornés par t+1, à graphes disjoints, et épuisant les sauts de B sur $[\![0,t]\!]$, on a $E[[B,B]_t] \leq E[[X,X]_t] < \infty$. Comme $[N,N]$ est majoré par $2([X,X] + [B,B])$, nous avons aussi $E[[N,N]_t] < \infty$, si bien que N est une martingale de carré intégrable au sens large. Nous choisissons maintenant une mesure de probabilité Q équivalente à P telle que, pour tout n, $\int_{[0,n]} |dB_s|$ appartienne à $L_1(Q)$; nous désignons par Z la densité de Q par rapport à Z, qui est >0 P-p.s., et que nous supposons bornée, ce qui est possible (quitte, évidemment, à changer la mesure Q), et par (Z_t) la martingale continue à droite, bornée et positive $E_P[Z|\underline{\underline{F}}_t]$ Le théorème de Girsanov nous dit alors que X est encore une semimartingale spéciale sous Q, admettant la décomposition canonique

$$X_t = M_t + A_t = (N_t - \int_{[0,t]} \frac{d\langle N,Z\rangle_s}{Z_{s-}}) + (\int_{[0,t]} \frac{d\langle N,Z\rangle_s}{Z_{s-}} + B_t)$$

Et nous avons

$$E_Q[\int_{[0,t]} |dB_s|] < \infty$$

d'après le choix de Z, et

$$E_Q[\int_{[0,t]} \frac{|d\langle N,Z\rangle_s|}{Z_{s-}}] = E_P[\int_{[0,t]} \frac{Z}{Z_{s-}} |d\langle N,Z\rangle_s|]$$

$$= E_P[\int_{[0,t]} |d\langle N,Z\rangle_s|] \leq \|N_t\|_{L_2(P)} \|Z_t\|_{L_2(P)}$$

la deuxième égalité résulte du fait que $t \to \int_{[0,t]} |d\langle Z,N\rangle_s|$ est prévisible et que la projection prévisible de $t \to Z/Z_{t-}$ est égale à 1 ; l'inégalité est simplement l'inégalité classique de Kunita-Watanabé. On sait donc que (A_t) est un processus prévisible à variation intégrable au sens large sous Q, et il reste à montrer que (M_t) est une martingale de carré intégrable au sens large sous Q. Mais cela résulte tout simplement de la première partie de la démonstration, en y remplaçant P par Q ! (le point d'exclamation provient du fait que, dans l'exposé précité de Meyer, Meyer conclut savamment que (M_t) appartient (seulement) à H_1 sous Q - dans son exposé $[X,X]_\infty$ est p.s. fini).

REMARQUE.- Dans son cours sur les intégrales stochastiques, p 277 du vol. X, Meyer commence par établir la formule du changement de variable pour les semimartingales somme d'une martingale de carré intégrable et d'un processus à variation intégrable. On voit que, quitte à changer de probabilité, on n'est pas bien loin du cas général...