CLAUDE DELLACHERIE
PAUL-ANDRÉ MEYER

À propos du travail de Yor sur le grossissement des tribus

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 12 (1978), p. 70-77
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1978__12__70_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1976/77

A PROPOS DU TRAVAIL DE YOR SUR LE GROSSISSEMENT DES TRIBUS

par C. Dellacherie et P.A. Meyer

Rappelons en quoi consiste le problème du grossissement des tribus. Soit $(\Omega,\underline{\underline{F}},P,(\underline{\underline{F}}_t))$ un espace probabilisé filtré satisfaisant aux conditions habituelles, et soit L une v.a. $\underline{\underline{F}}$-mesurable positive (finie ou non). Soit $(\underline{\underline{G}}_t)$ la plus petite famille croissante de tribus contenant $(\underline{\underline{F}}_t)$, continue à droite, et pour laquelle L est un temps d'arrêt. Il est très facile d'expliciter cette famille :

(1) $\underline{\underline{G}}_t = \underline{\underline{C}}_{t+}$ où $\underline{\underline{C}}_t = \underline{\underline{F}}_t \vee \underline{\underline{T}}(L\wedge t)$

On se demande alors à quelle condition sur L toute semimartingale/$(\underline{\underline{F}}_t)$ est encore une semimartingale/$(\underline{\underline{G}}_t)$. Ce problème s'est posé de manière bien nette au début de l'année 77, à la suite de la découverte du résultat 1 ci-dessous. La réponse partielle fournie par le théorème 2 de cette note a été connue assez rapidement. Indépendamment, Barlow a prouvé des résultats beaucoup plus précis concernant certains processus de Markov, dans une note qui mettait bien en évidence le rôle des v.a. "honnêtes". A la suite de quoi Yor a résolu le problème en toute généralité pour de telles v.a. (théorème 1 ci-dessous), et annonce des résultats explicites de décomposition pour un article à venir.

Dans cet exposé, nous rappelons d'abord l'ensemble des résultats connus sur le problème du grossissement des tribus, puis nous présentons une variante de la démonstration de Yor, qui donne une meilleure inégalité de norme, et qui conduit aussi à quelques sous-produits intéressants sur la localisation des intégrales stochastiques.

RAPPELS DE RESULTATS ANCIENS

Résultat 1. Lorsque la v.a. L est étagée, ou plus généralement lorsque le graphe de L est contenu dans une réunion dénombrable de graphes $[\![T_n]\!]$ de temps d'arrêt[1], la réponse au problème du grossissement est positive. En effet, nous pouvons supposer les graphes $[\![T_n]\!]$ disjoints. Soit $\underline{\underline{H}}_t$ la tribu obtenue en adjoignant à $\underline{\underline{F}}_t$ les ensembles $\{L=T_n<\infty\}=A_n$; il résulte de la note " sur un théorème de J. Jacod" (dans ce volume) que toute semimartingale/$(\underline{\underline{F}}_t)$ est une semimartingale/$(\underline{\underline{H}}_t)$. D'autre part, nous avons $L\wedge t = T_n\wedge t$ sur A_n , $L\wedge t=t$ sur $A_\infty=(\cup_n A_n)^c$, donc $\underline{\underline{C}}_t\subset \underline{\underline{H}}_t$, et finalement $\underline{\underline{G}}_t\subset\underline{\underline{H}}_t$ par continuité à droite ; d'après un théorème de Stricker, toute semimartingale/$(\underline{\underline{H}}_t)$ adaptée à $(\underline{\underline{G}}_t)$ est encore une semimartingale/$(\underline{\underline{G}}_t)$

1. L est une "variable aléatoire arlequine".

et cela nous permet de conclure.

Résultat 2. Dans l'autre sens, montrons qu'on ne peut pas faire n'importe quoi : prenons pour espace de départ la réalisation canonique du mouvement brownien . Soit L une v.a. à valeurs dans $[0,1]$, engendrant la tribu $\underline{\underline{F}}_\infty$ aux ensembles négligeables près ($\underline{\underline{F}}_\infty$ est la complétée d'une tribu séparable). Alors $\underline{\underline{G}}_1=\underline{\underline{F}}_\infty=\underline{\underline{G}}_\infty$, toute martingale/$(\underline{\underline{G}}_t)$ est constante sur $[1,\infty[$, donc toute semimartingale/$(\underline{\underline{G}}_t)$ est à variation finie sur $[1,\infty[$, et le mouvement brownien n'est donc plus une semimartingale/$(\underline{\underline{G}}_t)$. Ce raisonnement s'étend à tout espace probabilisé sur lequel existe une semimartingale dont les trajectoires sont à variation infinie.

Résultat 3. Ce résultat est beaucoup plus ancien, et n'est pas souvent rapproché du problème de grossissement des tribus . Supposons que l'on ait pour tout t

$$(2) \qquad P\{L\leq t|\underline{\underline{F}}_\infty\} = P\{L\leq t|\underline{\underline{F}}_t\} \quad \text{p.s.}$$

Alors toute martingale continue à droite X par rapport à $(\underline{\underline{F}}_t)$ est encore une martingale/$(\underline{\underline{G}}_t)$, et la réponse au problème du grossissement est trivialement positive. Vérifions cela . Il nous suffit de montrer que pour $s<t$ on a $E[X_t|\underline{\underline{C}}_s] = X_s$, après quoi on passe à $\underline{\underline{G}}_s=\underline{\underline{C}}_{s+}$ par continuité à droite. Soient j $\underline{\underline{F}}_s$-mesurable bornée, et h borélienne bornée sur $\mathbb{R}_+$; il s'agit de prouver que

$$E[j.X_s.h(L\wedge s)] = E[j.X_t.h(L\wedge s)]$$

Nous pouvons encore nous limiter au cas où h est une indicatrice d'intervalle $[0,a]$. Alors $h(L\wedge s)=1$ si $s\leq a$, et dans ce cas l'égalité est évidente. Si $s>a$, la relation à établir s'écrit

$$(3) \qquad E[j.X_s.I_{\{L\leq a\}}] = E[j.X_t.I_{\{L\leq a\}}]$$

Nous pouvons remplacer dans les deux membres $I_{\{L\leq a\}}$ par $P\{L\leq a|\underline{\underline{F}}_\infty\}$, qui d'après (2) est $\underline{\underline{F}}_a$-mesurable, donc $\underline{\underline{F}}_s$-mesurable, et l'égalité (3) se réduit alors à la propriété de martingale de X par rapport à $(\underline{\underline{F}}_t)$.

La propriété (2) est celle qui se trouve réalisée dans la construction des "temps d'arrêt flous" à partir des processus décroissants (ce volume) ; elle est vraie aussi si L est indépendante de $\underline{\underline{F}}_\infty$.

On notera que l'idée commune aux résultats 1-2-3 est que la connaissance de $L\wedge t$ ne doit pas apporter "trop d'information" sur $\underline{\underline{F}}_t$. Les progrès futurs sur le problème du grossissement consisteront probablement à préciser cette idée de manière quantitative.

ENONCE DES THEOREMES DE YOR

Nous conviendrons que $\underline{\underline{F}}_{0-}=\underline{\underline{F}}_0$.

Yor établit un résultat principal, concernant les v.a. honnêtes, et un résultat subsidiaire que nous énoncerons ensuite.

Une v.a. L est dite <u>honnête</u> si elle satisfait à la condition suivante

(4) <u>Pour tout</u> t, <u>il existe</u> L'_t $\underline{\underline{F}}_t$<u>-mesurable telle que</u> $L=L'_t$ <u>sur</u> $\{L\leq t\}$

Il suffit en fait de supposer une condition un peu plus faible :

(4') <u>Pour tout</u> t>0, <u>il existe</u> $\overline{L}_t$ $\underline{\underline{F}}_t$<u>-mes. telle que</u> $L=\overline{L}_t$ <u>sur</u> $\{L<t\}$

En effet, $L'_t = \liminf_n \overline{L}_{t+1/n}$ satisfait alors à (4). Noter aussi que (4') s'améliore d'elle même : la v.a. $\overline{\overline{L}}_t = \liminf_n \overline{L}_{t-1/n}$ est égale à L sur $\{L<t\}$, et elle est $\underline{\underline{F}}_{t-}$-mesurable.

Par exemple, si L est la fin d'un ensemble progressif A

$$L(\omega) = \sup \{ t : (t,\omega)\in A \}$$

on peut prendre pour $\overline{L}_t$ dans (4') la fin de l'ensemble $A\cap[\![0,t[\![\in \underline{\underline{B}}(\mathbb{R}_+)\times\underline{\underline{F}}_t$, et nous verrons plus loin que, réciproquement, toute v.a. honnête est la fin d'un ensemble optionnel.

Le théorème principal de Yor est alors le suivant :

THEOREME 1. <u>Si</u> L <u>est honnête</u>, <u>toute semimartingale</u> X <u>par rapport à</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$ <u>est encore une semimartingale</u>/$(\underline{\underline{G}}_t)$, <u>et l'on a</u>

(5) $$\|X\|_{\underline{\underline{H}}^1(\underline{\underline{G}}_t)} \leq c\|X\|_{\underline{\underline{H}}^1(\underline{\underline{F}}_t)} .$$

Ici et dans toute la suite, c désigne une constante universelle (qui peut changer de place en place). D'autre part, les normes $\underline{\underline{H}}^1$ de semimartingales sont celles introduites par Emery : X appartient à $\underline{\underline{H}}^1$ si X=M+A, où M est une martingale de $\underline{\underline{H}}^1$ au sens usuel ($E[[M,M]_\infty^{1/2}]<\infty$) et A est un processus à variation intégrable prévisible nul en 0, et alors $\|X\|_{\underline{\underline{H}}^1}= E[[M,M]_\infty^{1/2}]+E[\int_0^\infty |dA_s|]$.

Le résultat subsidiaire (démontré indépendamment par Azéma-Jeulin, Meyer, Yor[1]) n'exige aucune condition sur L ; il est du même type, mais concerne seulement une moitié du processus.

THEOREME 2. <u>Sans condition sur</u> L, <u>pour toute semimartingale</u> X <u>par rapport à</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$, <u>l'arrêtée</u> X^L <u>est une semimartingale</u>/$(\underline{\underline{G}}_t)$ <u>et l'on a</u>

(6) $$\| X^L\|_{\underline{\underline{H}}^1(\underline{\underline{G}}_t)} \leq c\|X\|_{\underline{\underline{H}}^1(\underline{\underline{F}}_t)} .$$

1. Les démonstrations d'Azéma-Jeulin et Meyer utilisaient des arguments du type "mesure de Foellmer". On trouvera dans l'article de Yor (ce volume) plusieurs démonstrations très simples.

Nous passons à la démonstration des deux théorèmes. Nous ne démontrons sur les v.a. honnêtes que les résultats qui nous sont absolument indispensables.

VARIABLES ALEATOIRES HONNETES

Reprenons l'expression (1). Il est clair que $\underline{\underline{C}}_t$ et $\underline{\underline{F}}_t$ induisent la même tribu sur $\{L\geq t\}$. Remplaçant t par t+ε et faisant tendre ε vers 0, nous voyons que (sans restriction sur L)

$$\underline{\underline{G}}_t \text{ et } \underline{\underline{F}}_t \text{ induisent la même tribu sur } \{L>t\}\in\underline{\underline{G}}_t$$

Si L est honnête, il résulte de (4) que $\underline{\underline{G}}_t$ et $\underline{\underline{F}}_t$ induisent la même tribu sur $\{L\leq t\}\in\underline{\underline{G}}_t$ aussi (et cela équivaut d'ailleurs au caractère honnête de L). On en déduit aussitôt que $\underline{\underline{G}}_t$ est engendrée par $\underline{\underline{F}}_t$ et par la partition ($\{L>t\},\{L\leq t\}$), et par conséquent

LEMME 1. <u>Supposons</u> L <u>honnête</u>. <u>Alors une v.a.</u> Y <u>est</u> $\underline{\underline{G}}_t$<u>-mesurable si et seulement si elle admet une écriture</u>

(7) $\quad Y = UI_{\{t<L\}} + VI_{\{t\geq L\}}$ <u>avec</u> U,V $\underline{\underline{F}}_t$<u>-mesurables</u> .

<u>De même</u> Y <u>est</u> $\underline{\underline{G}}_{t-}$<u>-mesurable si et seulement si elle admet une écriture</u>

(8) $\quad Y = UI_{\{t\leq L\}} + VI_{\{t>L\}}$ <u>avec</u> U,V $\underline{\underline{F}}_{t-}$<u>-mesurables</u> .

Lorsque L n'est pas honnête, on peut seulement affirmer que, si Y est $\underline{\underline{G}}_{t-}$-mesurable, il existe U $\underline{\underline{F}}_{t-}$-mesurable telle que Y=U sur $\{t\leq L\}$, et de même pour $\underline{\underline{G}}_t,\underline{\underline{F}}_t$.

LEMME 2. <u>Supposons</u> L <u>honnête</u>. <u>Alors un processus</u> Y <u>est prévisible</u>/($\underline{\underline{G}}_t$) <u>si et seulement s'il admet une écriture</u>

(9) $\quad Y = JI_{[\![0,L]\!]} + KI_{]\!]L,\infty[\![}$ <u>avec</u> J,K <u>prévisibles</u>/($\underline{\underline{F}}_t$) .

Noter que si Y est borné, on peut toujours (par troncation) supposer J et K bornés par la même constante. Si L n'est pas honnête, on peut encore affirmer l'existence de J prévisible/($\underline{\underline{F}}_t$) égal à Y sur $[\![0,L]\!]$.

DEMONSTRATION. Notons $\mathcal{P}$ la tribu prévisible/($\underline{\underline{F}}_t$), $\overline{\mathcal{P}}$ la tribu engendrée par $\mathcal{P}$ et la partition ($[\![0,L]\!]$, $]\!]L,\infty[\![$), qui est contenue dans la tribu prévisible/($\underline{\underline{G}}_t$). Pour montrer que ces deux tribus sont en fait égales, il nous suffit de démontrer que $\overline{\mathcal{P}}$ contient les ensembles de la forme $[a,\infty[\times A = H$, où A appartient à $\underline{\underline{G}}_{a-}$.

Nous choisissons B et C appartenant à $\underline{\underline{F}}_{a-}$, tels que B et A aient même intersection avec $\{a\leq L\}$, et de même C et A avec $\{a>L\}$, et nous formons l'ensemble suivant, qui appartient à la tribu $\overline{\mathcal{P}}$

$$H^0 = ([a,\infty[\times B)\cap[\![0,L]\!] \;\cup\; ([a,\infty[\times C)\cap]\!]L,\infty[\![$$

Et nous constatons que H et H^0 ont même intersection avec $[\![0,L]\!]$, et avec $([a,\infty[\times\{L<a\})\cap]\!]L,\infty[\![$. La différence symétrique $H\Delta H^0$ est donc contenue dans l'ensemble $\{(t,\omega) : a\leqq L(\omega)<t\}$.

Nous essayons alors d'améliorer l'approximation : la différence symétrique entre $[\![a,a+2^{-n}[\![\cap H$ et $[\![a,a+2^{-n}[\![\cap H^0$ est contenue dans l'ensemble $\{(t,\omega) : a\leq L(\omega)<t \ , \ t<a+2^{-n}\}$, donc aussi dans l'intervalle stochastique brut $]\!]L,L+2^{-n}]\!]$. Nous recommençons cette construction sur l'intervalle $[\![a+2^{-n},a+2.2^{-n}[\![$, pour obtenir $H^1\in\overline{\mathcal{P}}$ tel que $[\![a+2^{-n},a+2.2^{-n}[\![\cap H$ et $[\![a+2^{-n},a+2.2^{-n}[\![\cap H^1$ ne diffèrent que d'une partie de $]\!]L,L+2^{-n}]\!]$, et ainsi de suite pour la construction de $H^2,H^3\ldots$ Posons alors

$$H_n = \cup_k [\![a+k2^{-n},a+(k+1)2^{-n}[\![\cap H^k$$

nous voyons que H_n appartient à $\overline{\mathcal{P}}$, et que $H\Delta H_n \subset]\!]L,L+2^{-n}]\!]$. L'intersection de ces intervalles stochastiques étant vide, on voit que I_{H_n} converge simplement vers I_H, et finalement H appartient à $\overline{\mathcal{P}}$.

DEMONSTRATION DU THEOREME 1

Indiquons d'abord notre plan : nous allons choisir un processus Y prévisible/$(\underline{\underline{G}}_t)$ élémentaire, donc de la forme

$$Y_t(\omega) = I_{\{0\}}(t)H_0(\omega)+I_{]0,t_1]}(t)H_1(\omega)+\ \ldots+I_{]t_{n-1},t_n]}(t)H_n(\omega)$$

avec $0=t_0<t_1\ldots<t_n<\infty$, H_0 étant bornée par 1 et mesurable pour $\underline{\underline{G}}_{0-}=\underline{\underline{G}}_0$, H_i étant bornée par 1 et $\underline{\underline{G}}_{t_{i-1}}$-mesurable pour $i>0$. Nous allons montrer que pour toute martingale X de la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$ on a

$$(10)\qquad |E[\int_{[0,\infty[} Y_s dX_s]| \leqq c\|X\|_{\underline{\underline{H}}^1(\underline{\underline{F}}_t)}$$

L'intégrale au premier membre n'est pas une intégrale stochastique - celle-ci n'aurait pas de sens a priori - mais l'intégrale triviale d'une fonction étagée continue à gauche par rapport à une fonction continue à droite, i.e. une somme discrète. Prenant le sup sur tous les Y, nous obtiendrons que <u>si</u> X <u>appartient à</u> $\underline{\underline{H}}^1(\underline{\underline{F}}_t)$, X <u>est une quasimartingale</u>/$(\underline{\underline{G}}_t)$ <u>de variation moyenne au plus égale à</u> $c\|X\|_{\underline{\underline{H}}^1(\underline{\underline{F}}_t)}$.

Mais alors, X sera une semimartingale/$(\underline{\underline{G}}_t)$ admettant une décomposition $X=M+A$, où M est une martingale/$(\underline{\underline{G}}_t)$, A un processus à variation finie prévisible/$(\underline{\underline{G}}_t)$, et la variation moyenne n'est autre que $E[\int|dA_s|]$. Nous aurons alors $E[A^*]\leqq E[\int|dA_s|]\leqq c\|X\|_{\underline{\underline{H}}^1(\underline{\underline{F}}_t)}$, puis $E[M^*]\leqq E[X^*]+E[A^*] \leqq c\|X\|_{\underline{\underline{H}}^1(\underline{\underline{F}}_t)}$, et finalement l'inégalité (5). Le passage aux semimartingales quelconques se fait alors par localisation.

Il suffit donc de démontrer (10). Pour cela, nous écrivons Y à la manière du lemme 2

$$(11)\qquad Y = JI_{[\![0,L]\!]} + KI_{]\!]L,\infty[\![}$$

où J et K sont prévisibles/$(\underline{\underline{F}}_t)$ et bornés par 1. Nous introduisons les deux martingales M=J•X , N=K•X (il s'agit ici d'intégrales stochastiques véritables, J et K n'étant pas nécessairement étagés). Nous avons

$$(12)\qquad \int_0^\infty Y_s dX_s = \int_0^\infty J_s I_{[\![0,L]\!]}(s)dX_s + \int_0^\infty K_s I_{]\!]L,\infty[\![}(s)dX_s$$

avec des intégrales stochastiques triviales. <u>Admettons pour un instant que ces intégrales aient leurs valeurs " évidentes"</u> : M_L <u>et</u> $N_\infty - N_L$, et achevons la démonstration. Tout est trivial si X n'appartient pas à $\underline{\underline{H}}^1$; supposons donc $X\in\underline{\underline{H}}^1$, de sorte que M et N sont uniformément intégrables. Nous avons la liberté de choisir K nul en 0, et alors $E[N_\infty]=E[N_0]=0$, de sorte que

$$E[\int_0^\infty Y_s dX_s] = E[M_L - N_L]$$

et il nous suffit de démontrer que $|E[M_L]| \leq c\|X\|_{\underline{\underline{H}}^1}$. Or soit (B_t) la projection duale optionnelle du processus croissant $I_{\{t\geq L\}}$, et soit (Z_t) la martingale $E[B_\infty|\underline{\underline{F}}_t]$; nous avons (voir aussi note à la fin)

$$|E[M_L]| = |E[\int_0^\infty M_s dB_s]| = |E[M_\infty B_\infty]| = |E[M_\infty Z_\infty]| \leq c\|M\|_{\underline{\underline{H}}^1}\|Z\|_{\underline{\underline{BMO}}}$$

Or nous avons $\|M\|_{\underline{\underline{H}}^1} \leq \|X\|_{\underline{\underline{H}}^1}$, et il est bien connu que $\|Z\|_{\underline{\underline{BMO}}}$ est bornée par une constante universelle.

Avant de justifier la phrase soulignée, indiquons comment on démontre le théorème 2. Avec les mêmes notations, il s'agit de majorer , non plus $E[\int_0^\infty Y_s dX_s]$, mais $E[\int_0^\infty Y_s dX_s^L]$. D'autre part, Y s'écrit $JI_{[\![0,L]\!]} + KI_{]\!]L,\infty[\![}$, où J est toujours prévisible/$(\underline{\underline{F}}_t)$ borné par 1, mais où l'on ne sait plus rien sur K - cela n'a aucune importance : dans la formule (12), écrite avec X^L au lieu de X , la seconde intégrale est nulle, et l'on retombe donc sur les mêmes majorations.

UN RESULTAT DE LOCALISATION

Nous passons à la justification de la propriété admise, et nous allons la faire sous une forme un peu plus générale.

Dans quel cas, X étant une semimartingale/$(\underline{\underline{F}}_t)$, savons nous définir l'intégrale $\int_0^t Y_s dX_s$ d'un processus Y borné et continu à gauche, mais non adapté ? Il y a bien sûr le cas où Y est étagé, mais plus généralement cela peut se faire dès que $Y_s = Z_{s-}$, Z étant un processus dont les trajectoires sont des fonctions à variation finie. On pose alors

$$\int_0^t Z_{s-} dX_s = Z_t X_t - \int_0^t X_s dZ_s$$

(pour simplifier, on suppose X nulle en 0). Dans ces conditions, on a le lemme suivant, qui entraîne le résultat précédemment utilisé

LEMME 3. <u>Soit</u> X <u>une semimartingale, et soit</u> Z <u>un processus non adapté dont les trajectoires sont des fonctions à variation finie. On suppose que sur un intervalle stochastique</u> $]\!]U,V]\!]$ (U et V ne sont pas nécessairement des temps d'arrêt) Z_- <u>coincide avec un processus prévisible localement borné</u> J, <u>et l'on pose</u> $J\cdot X=M$. <u>On a alors p.s. sur</u> $\{V<\infty\}$

$$(13) \qquad \int_{]U,V]} Z_{s-}dX_s = M_V - M_U$$

DEMONSTRATION. En considérant le saut des deux intégrales en V, on se ramène à l'étude de l'intervalle $]\!]U,V[\![$. Tout revient alors à démontrer que pour tout couple de rationnels (u,v), avec $u<v$, on a

$$\int_u^v Z_{s-}dX_s = M_v - M_u \text{ p.s. sur l'ensemble } \{U<u<v<V\}$$

ou encore que, sur l'ensemble $\{U<u<v<V\}=\Omega_{uv}$, on a

$$M_v - M_u = \int_u^v J_s dX_s = Z_v X_v - Z_u X_u - \int_u^v X_s dZ_s$$

Posons $\overline{Z}_t = 0$ pour $t<u$, $\overline{Z}_t = Z_{t\wedge v}$ pour $t\geq u$, et restreignons la loi P à Ω_{uv} . D'après le théorème de Girsanov sous la forme due à Lenglart, on n'a pas changé les intégrales stochastiques en changeant de loi, et pour la nouvelle loi, le processus $\overline{Z}$ est devenu un processus à variation finie <u>adapté</u> , et la relation se réduit à la formule d'intégration par parties pour les intégrales stochastiques :

$$\int_u^v \overline{Z}_{s-}dX_s + \int_u^v X_s d\overline{Z}_s = \overline{Z}_v X_v - \overline{Z}_u X_u \ .$$

REMARQUE FINALE. Nous avons promis plus haut de montrer que toute v.a. honnête est la fin d'un ensemble optionnel, résultat qui est " connu" mais n'a jamais été écrit. Soit L honnête. Pour t rationnel, soit L'_t $\underline{\underline{F}}_t$-mesurable telle que $L'_t=L$ sur $\{L\leq t\}$; quitte à remplacer L'_t par $L'_t\wedge t$ nous pouvons supposer $L'_t\leq t$. Ensuite, pour t réel, soit $A_t = \sup_{s\in Q, s<t} L'_t$; c'est un processus croissant adapté, il est continu à gauche, on a $A_t\leq t$ pour $t<L$, $A_t=L$ pour $t>L$, et donc $A_{L+}=L$. Il est alors clair que L est la fin de l'ensemble optionnel $\{ t : A_{t+}=t\}$.

UNE GENERALISATION DES RESULTATS CI-DESSUS

Nous allons indiquer maintenant une généralisation simultanée du " résultat 1 " donné au début, et du théorème de Yor. Considérons un processus croissant (N_t) à valeurs <u>entières</u> et <u>finies</u> , continu à droite ; nous conviendrons que $N_{0-}=0$, mais N_0 n'est pas nécessairement nul. Désignons par $\underline{\underline{G}}_t$ la tribu $\underline{\underline{F}}_t\vee\underline{\underline{T}}(N_t)$, de sorte qu'une v.a. Y est $\underline{\underline{G}}_t$-mesurable si et seulement si elle peut s'écrire

$$Y = \sum_k U_k I_{\{N_t=k\}} \qquad \text{avec } U_k \ \underline{\underline{F}}_t\text{-mesurable pour tout } k \ .$$

Il est clair que $\underline{\underline{G}}_t$ contient $\underline{\underline{F}}_t$ (donc aussi les ensembles P-négligeables), et qu'une v.a. qui est $\underline{\underline{G}}_{t+\varepsilon}$-mesurable pour tout $\varepsilon>0$ est $\underline{\underline{G}}_t$-mesurable, mais la famille de tribus $(\underline{\underline{G}}_t)$ n'a pas de raison a priori d'être croissante, et notre hypothèse va consister à supposer qu'elle l'est effectivement, ce qui revient à dire que

<u>pour tout</u> t <u>et tout</u> $s<t$, N_s <u>est mesurable par rapport à</u> $\underline{\underline{G}}_t$.

Cette hypothèse est satisfaite lorsque $N_t=N_0$ pour tout t (adjonction d'une partition fixe aux $\underline{\underline{F}}_t$) , et elle l'est aussi lorsque N_t ne prend que les valeurs 0 et 1 (alors le processus (N_t) est caractérisé par l' instant L auquel se produit son unique saut, et l'hypothèse ci-dessus signifie que L est honnête). Nous allons montrer que <u>sous cette hypothèse, toute semimartingale</u>/$(\underline{\underline{F}}_t)$ <u>est encore une semimartingale</u>/$(\underline{\underline{G}}_t)$. Mais ce résultat ne paraît pas merveilleusement intéressant, et nous nous bornerons à esquisser la démonstration.

Nous pouvons d'abord travailler sur un intervalle borné $[0,a]$. Comme N_a est une v.a. entière finie, cela nous permet de nous ramener, par un changement de l'échelle du temps, au cas où N_∞ est une v.a. entière finie. Dans ce cas , il nous suffit de montrer que toute semimartingale X par rapport à $(\underline{\underline{F}}_t)$ est une semimartingale/$(\underline{\underline{G}}_t)$ pour la loi

$$Q_n(A) = P(A\cap\{N_\infty=n\})/P\{N_\infty=n\}$$

et comme X est une semimartingale/$((\underline{\underline{F}}_t),Q_n)$ d'après le théorème de Girsanov, nous pouvons remplacer P par Q_n , i.e. supposer que le nombre total des sauts du processus (N_t) est égal à n . Notons $L_1,L_2,\ldots L_n$ les instants successifs de ces sauts. On procède alors exactement comme dans la démonstration de Yor, en montrant que tout processus prévisible/$(\underline{\underline{G}}_t)$ s'écrit

$$Y = J_0 I_{[[0,L_1]]} + J_1 I_{]]L_1,L_2]]} + \ldots + J_n I_{]]L_n,\infty[[}$$

où les J_i sont prévisibles/$(\underline{\underline{F}}_t)$. Puis on considère une martingale X par rapport à $(\underline{\underline{F}}_t)$, appartenant à $\underline{\underline{H}}^1(\underline{\underline{F}}_t)$ - il faut prendre garde ici que notre loi de probabilité n'est plus la loi initiale : nous en avons changé de manière à supposer que (N_t) a au plus n sauts. Et l'on montre que

$$\|X\|_{\underline{\underline{H}}^1(\underline{\underline{G}}_t)} \leqq 2(n+1)\|X\|_{\underline{\underline{H}}^1(\underline{\underline{F}}_t)}$$

par le même procédé que dans la démonstration de Yor.

NOTE p.6 : si on veut éviter le recours explicite à l'inégalité de Fefferman, écrire simplement $E[|M_L|]\leq E[M^*]\leqq c\|M\|_{\underline{\underline{H}}^1}$ (inégalité de Davis) $\leqq c\|X\|_{\underline{\underline{H}}^1}$. C'est peut être plus direct, mais rappelons que la meilleure démonstration de l'inégalité de Davis utilise Fefferman.