Séminaire de probabilités (Strasbourg)

CLAUDE DELLACHERIE

Théorie unifiée des capacités et des ensembles analytiques

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 12 (1978), p. 707-738
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1978__12__707_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1977

THEORIE UNIFIEE DES CAPACITES ET DES ENSEMBLES ANALYTIQUES

par C. Dellacherie

La philosophie de cet exposé peut s'exprimer en les termes vigoureux suivants

THEOREME.- <u>Ensembles analytiques et capacités sont comme cul et chemise</u>.

COROLLAIRE.- <u>Les premiers pas de la théorie des ensembles analytiques</u> (<u>définition</u>, <u>stabilité</u>, <u>capacitabilité</u>, <u>séparation</u>) <u>sont triviaux</u>.

Mais, si le théorème se trouve déjà énoncé dans l'introduction de Dellacherie (1972), il m'a fallu six ans pour trouver le corollaire... Il s'agit, en fait, de l'aboutissement d'un travail de recherche collectif, jalonné par

a) la réduction, initiée par Sion (1963), du théorème classique de séparation, au théorème de capacitabilité (cf Dellacherie (1971) et (1976a)),

b) l'invariance de l'analycité par les capacités fonctionnelles, due à Mokobodzki (1966) (cf Dellacherie (1972) et (1976a)),

c) la réduction, initiée par Mokobodzki (1976) et St-Raymond (1976), du théorème de séparation de Novikov à un théorème de capacitabilité (cf Dellacherie (1976b)),

d) l'extension, sans emploi de la théorie de l'indice, du théorème de séparation de Novikov aux schémas de Souslin, due à St-Pierre (1977),

e) la constatation que d) se ramène au théorème de capacitabilité évoqué en c).

Voilà, en gros, ce que l'on va faire. On va définir une classe, très simple, de fonctions d'ensembles (à une infinité dénombrable au plus d'arguments) et à valeur ensemble (arguments et valeurs sont découpés dans des espaces métrisables compacts "ambiants" , pour fixer les idées), ayant les propriétés suivantes

1) la classe de ces fonctions d'ensembles (qui seront appelées

opérations analytiques) est stable par composition, et comprend toutes les opérations usuelles n'utilisant pas la complémentation (réunion, intersection, opération de Souslin, images directe et inverse par une "bonne" fonction,etc) ;

2) on obtient tous les ensembles analytiques en appliquant les opérations analytiques aux arguments ouverts, et on ne sort pas de la classe des ensembles analytiques si les arguments sont analytiques ;

3) si I est une opération analytique, on a un théorème d'approximation par l'intérieur : pour $A_1,.,A_n,...$[1] analytiques, on a

$$I(A_1,.,A_n,...) = \sup I(K_1,.,K_n,...) \quad (\sup = \text{réunion})$$

où K_i parcourt les compacts contenus dans A_i ;

4) si I est une opération analytique, on a un théorème d'approximation par l'extérieur : pour $A_1,.,A_n,...$ analytiques, on a

$$I(A_1,.,A_n,...) = \inf I(B_1,.,B_n,...) \quad (\inf = \text{intersection})$$

où B_i parcourt les boréliens contenant A_i .

On verra que 2) contient les définitions et propriétés usuelles des ensembles analytiques, que 3) contient le théorème de capacitabilité et 4) le théorème de séparation. On verra aussi que 3) n'est pas bien difficile à établir, et que 4) et la seconde partie de 2) sont des conséquences simples de 3). Quant à la première partie de 2), elle nous servira, dans cet exposé, à définir les ensembles analytiques. Mais, comme nous n'établirons l'équivalence de cette définition avec les définitions usuelles qu'après avoir établi 3), nous serons amenés, provisoirement, à appeler ensembles analitiques les ensembles que nous définirons à l'aide des opérations analytiques.

Encore quelques mots avant de rentrer dans le vif du sujet. Afin de disposer d'un cadre agréable tant pour la terminologie que pour la présentation des exemples, nous nous confinons, dans le corps de cet exposé, dans la catégorie des espaces métrisables compacts. On trouvera, dans les appendices, les modifications à apporter pour pouvoir atteindre tant la théorie abstraite que la théorie topologique "non classique" des ensembles analytiques. Enfin, par souci de complétude, nous avons aussi exposé, dans un appendice, quelques conséquences simples et importantes de la théorie des ensembles analytiques pour les probabilistes (il s'agit là d'un "repiquage" de certaines parties du livre rose - i.e. la nouvelle édition de "Probabilités et Potentiel") : on y trouvera en particulier une démonstration élémentaire du théorème sur les images injectives de boréliens, et une méthode pour traduire certains problèmes abstraits en langage topologique.

---

(1) Pour des raisons typographiques évidentes, nous contractons souvent "..." en "." (qui ne désigne donc pas une variable muette).

I. NOTATIONS

Les lettres E et F (avec ou sans indices) désignent des espaces métrisables compacts. Quand on parle d'un ensemble X, il est sous-entendu que c'est une partie d'un espace métrisable compact ; la lettre A sera réservée aux ensembles analitiques (quand ils seront définis), la lettre B aux boréliens, la lettre K aux compacts et la lettre U aux ouverts.

L'ensemble des parties de E est noté $\underline{\underline{P}}(E)$, celui des fonctions de E dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ est noté $\Phi(E)$. On confondra généralement une partie X de E avec sa fonction indicatrice 1_X ; en particulier, la réunion est notée "sup" et l'intersection "inf" (y compris dans l'écriture des schémas de Souslin). Au passage, que le lecteur qui ne connait pas (ou n'aime pas) les schémas de Souslin ne s'effraie pas : ils n'interviendront que dans des remarques pour "connaisseurs". En fait, nous ne supposons rien de connu du lecteur en ce qui concerne les ensembles analytiques, hors quelques remarques pour initiés.

II. DEFINITIONS PROVISOIRES ET EXEMPLES

Dans toute la suite, nous désignons par $\underline{\underline{I}}$ un ensemble fini ou infini dénombrable d'indices i, que nous identifierons souvent avec (un segment initial de) $\mathbb{N}$. Le plus souvent, $\mathbb{N} = 1,2,\dots$, mais il est parfois pratique de prendre $\mathbb{N} = 0,1,2,\dots$.

1.- <u>Multicapacité</u> :

Une <u>multicapacité sur</u> $\prod E_i$ est une fonction I de $\prod \underline{\underline{P}}(E_i)$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ vérifiant les conditions suivantes

1) elle est <u>globalement croissante</u> :

$$X_1 \subseteq Y_1 , \dots , X_n \subseteq Y_n , \dots \Rightarrow I(X_1,\dots,X_n,\dots) \leq I(Y_1,\dots,Y_n,\dots)$$

2) elle est <u>séparément montante</u> :

si tous les arguments X_n sont fixés, sauf pour $n=i$, et si $X_i^k \uparrow X_i$ (i.e. si $(X_i^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de réunion X_i), alors on a

$$I(X_1,\dots,X_{i-1},X_i^k,X_{i+1},\dots) \uparrow I(X_1,\dots,X_{i-1},X_i,X_{i+1},\dots)$$

3) elle est <u>globalement descendante sur les compacts</u> :

si les arguments X_n^k sont compacts et si $X_n^k \downarrow X_n$ pour tout n, alors on a

$$I(X_1^k,\dots,X_n^k,\dots) \downarrow I(X_1,\dots,X_n,\dots)$$

Etant donnée 1), la condition 3) est équivalente aux conditions

3a) elle est séparément descendante sur les compacts

3b) $I(K_1,\dots,K_n,E_{n+1},\dots,E_{n+p},\dots) \downarrow I(K_1,\dots,K_n,K_{n+1},\dots,K_{n+p},\dots)$

<u>Exemples</u> : Je n'ai pas l'intention de multiplier ici les exemples. On se contentera de donner un exemple de multicapacité à un argument (on retrouve alors la notion de capacité de Choquet ; bien entendu,

dans ce cas - et, plus généralement, dans le cas d'un nombre <u>fini</u> d'arguments - , il n'y a pas lieu de distinguer "séparément" et "globalement"), et un exemple de multicapacité à une infinité (dénombrable) d'arguments (là, le "séparément" de 2) sera crucial) :

a) Si f est une application continue de E dans F et si m est une mesure de Radon ≥ 0 sur F, la fonction $I(X) = m^*[f(X)]$, où m^* est la mesure extérieure associée à m, est une capacité sur E.

b) Si on prend tous les E_i égaux à E et si on pose $I(X_1,..,X_n,...) = 0$ ou 1 suivant que les X_n ont une intersection vide ou non, on définit ainsi une multicapacité I sur $\prod E_i$.

2.- <u>Opération analytique</u>

Une <u>opération analytique sur</u> $\prod E_i$, <u>à valeurs dans</u> F, est une application I de $\prod \underline{\underline{P}}(E_i)$ dans $\underline{\underline{P}}(F)$ vérifiant les conditions suivantes

1) elle est <u>globalement croissante</u> :

$$X_1 \subseteq Y_1 , .. , X_n \subseteq Y_n , ... \Rightarrow I(X_1,..,X_n,...) \subseteq I(Y_1,..,Y_n,...)$$

2) elle est <u>séparément montante</u> :

si tous les arguments X_n sont fixés, sauf pour n=i, et si $X_i^k \uparrow X_i$, on a

$$I(X_1,..,X_{i-1},X_i^k,X_{i+1},...) \uparrow I(X_1,..,X_{i-1},X_i,X_{i+1},...)$$

3) elle est à <u>valeur compact sur les compacts</u>, et <u>globalement descendante sur les compacts</u> : si les arguments X_n^k sont compacts et si $X_n^k \downarrow X_n$ pour tout n, alors $I(X_1,..,X_n,...)$ est compact et on a

$$I(X_1^k,..,X_n^k,...) \downarrow I(X_1,..,X_n,...)$$

<u>Exemples</u> : Encore une fois, nous ne donnerons que quelques exemples (plus nombreux cependant) : ceux qui nous seront indispensables pour la suite. Nous en donnerons d'autres en appendice

a) à un argument : image directe, ou inverse, par une application continue (en particulier, projection) ;

b) à deux arguments : on prend $E_1 = E$, $E_2 = E \times F$ et on désigne par π la projection de ExF sur F. On pose

$$I(X_1,X_2) = \pi[(X_1 \times F) \cap X_2]$$

L'opération analytique I ainsi définie (qui est en fait la composée de trois opérations élémentaires) permet d'atteindre l'image directe par une application f de E dans F, et l'image réciproque par une application f de F dans E : en effet, si X_2 est le graphe de l'application f, alors $I(X_1,X_2)$ est égal à $f(X_1)$ dans le premier cas, et à $f^{-1}(X_1)$ dans le second. Noter que, si f est borélienne, alors X_2 est borélien.

c) à une infinité d'arguments :

$$I(X_1,..,X_n,...) = \prod X_i$$

d) à une infinité d'arguments, avec $E_i = F$ pour tout i :

$$I(X_1,..,X_n,...) = \inf_i X_i$$

(Dans cet exemple, et le précédent, le "séparément" de 2) est crucial)

e) voyons le cas de la réunion. Il est clair qu'une réunion, à un nombre fini d'arguments, est une opération analytique. Cependant, une réunion infinie dénombrable n'en est pas une, à cause des deux clauses de 3). Il n'en reste pas moins que l'on peut atteindre une réunion infinie dénombrable à l'aide d'une opération analytique comme suit. On prend $E_n = F$ pour $n \geq 1$ et on pose $E_0 = \overline{\mathbb{N}}$ (compactifié d'Alexandrov de $\mathbb{N} = 1,2,\ldots$). On pose alors

$$I(X_0, X_1, .., X_n, \ldots) = \begin{cases} \sup_{i \in X_0} X_i & \text{si } \infty \notin X_0 \\ E & \text{si } \infty \in X_0 \end{cases}$$

On définit bien ainsi une opération analytique I sur $\overline{\mathbb{N}} \times \prod_{i \geq 1} E_i$ (les compacts de E_0 ne contenant pas ∞ étant finis) à valeur dans F, et on a

$$I(\mathbb{N}, X_1, .., X_n, \ldots) = \sup_{i \geq 1} X_i$$

Noter que $\mathbb{N}$ est un ouvert de E_0.

f) (pour connaisseurs) on peut aussi atteindre les schémas de Souslin à l'aide des opérations analytiques. Notre ensemble d'indices $\underline{\underline{I}}$ est cette fois l'ensemble dénombrable S des suites finies d'éléments de $\overline{\mathbb{N}}$. On prend $E_s = F$ pour tout $s \in S$, on adjoint à S un élément noté 0 et on prend $E_0 = \overline{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$. Posons alors, si X_0 est contenu dans $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$,

$$I(X_0, .., X_s, \ldots) = \sup_{\sigma \in X_0} \inf_{s \dashv \sigma} X_s$$

où "$s \dashv \sigma$" signifie que la suite infinie σ commence par la suite finie s, et, de manière générale, posons

$$I(X_0, .., X_s, \ldots) = \sup_{\sigma \in X_0} \inf_{s \dashv \sigma} Y_s$$

où $Y_s = X_s$ si $\infty \notin s$ et $Y_s = F$ si $\infty \in s$. Nous montrerons en appendice que l'on définit bien ainsi une opération analytique I sur $\overline{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}} \times \prod_{s \in S} E_s$, à valeur dans F, et il est clair que le noyau du schéma de Souslin $s \to X_s$, $s \not\ni \infty$, est égal à $I(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, .., X_s, \ldots)$. Noter que $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ est une intersection dénombrable d'ouverts, et donc un borélien, de E_0.

III. CRITIQUE DES DEFINITIONS PROVISOIRES

Le lecteur se sera aperçu que les définitions de "multicapacité" et de "opération analytique" sont très voisines. Manifestement, une seule définition devrait pouvoir chapeauter le tout, et, de plus, englober des exemples familiers en analyse (comme celui de noyau fellerien en théorie de la mesure) qui sont exclus de la classe des opérations analytiques parce que à valeur fonction.

Ceci dit, si on admet des opérations analytiques à valeurs dans $\Phi(F)$ au lieu de seulement $\underline{\underline{P}}(F)$ (les fonctions semi-continues supérieurement - en abrégé s.c.s. - jouant le rôle des compacts), on est coincé pour définir en général la composition d'opérations analytiques.

La solution consiste à permettre aux arguments et aux valeurs d'être des fonctions (sous-entendu : à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$), les multicapacités étant alors à valeurs dans les fonctions constantes (dont le domaine de définition importe peu). Il reste que, pour pouvoir toujours composer nos opérations, il faut savoir les étendre aux fonctions quand elles ne sont a priori définies que sur les ensembles.

Voici, une fois pour toutes, comment on peut construire un "bon" prolongement ("bon" se référant aux conditions 1),2) et 3) du §II). Soit I une application de $\prod \underline{\underline{P}}(E_i)$ dans $\Phi(F)$ - en particulier, I peut être à valeurs dans $\underline{\underline{P}}(F) \subseteq \Phi(F)$. On prolonge I à $\prod \Phi(E_i)$ en posant

$$I(f_1,.,f_n,...) = -\mathrm{Log}\,[\int_0^1 . \int_0^1 ... \exp[-I(\{f_1 \geq t_1\},.,\{f_n \geq t_n\},...)]\, dt_1.dt_n...]$$

Bien entendu, ce n'est pas la seule extension possible : par exemple, si I , à un argument, est une mesure, l'intégrale supérieure est un plus beau prolongement. Par ailleurs, la présence des fonctions Log et exp a pour seul but d'assurer les conditions d'application du théorème de convergence dominée de Lebesgue. Noter aussi que si I est séparément croissante (ce qui sera le cas par la suite), on peut remplacer un nombre fini des accolades $\{f_i \geq t_i\}$ par $\{f_i > t_i\}$ sans changer la valeur de $I(f_1,.,f_n,...)$, ce qui permet d'assurer la conservation de la propriété éventuelle de montée séparée de I .

IV. THEORIE UNIFIEE DES CAPACITES ET DES ENSEMBLES ANALYTIQUES

Voici finalement la définition chapeautant les deux définitions du §II , à condition d'identifier les réels aux fonctions constantes et d'avoir prolongé les opérations sur les ensembles en des opérations sur les fonctions à l'aide du procédé indiqué au §III.

DEFINITION 1.- _Un_ multinoyau capacitaire de F dans $\prod E_i$ _est une application_ I _de_ $\prod \Phi(E_i)$ _dans_ $\Phi(F)$ _vérifiant les conditions suivantes_

1) _elle est globalement croissante_ ;
2) _elle est séparément montante_ ;
3) _elle est à valeur s.c.s. si ses arguments sont s.c.s._, _et elle est globalement descendante sur les fonctions s.c.s._ .

REMARQUES. a) On entend par fonction s.c.s., soit la fonction constante égale à $+\infty$, soit une fonction s.c.s. _finie_ (et donc bornée puisque les espaces ambiants sont compacts).

b) La terminologie "multinoyau _de_ F _dans_ $\prod E_i$" paraphrase la terminologie habituelle adoptée pour les noyaux en théorie de la mesure. Remarquer que, pour $y \in F$ fixé, la fonction $(X_1,.,X_n,.) \to I(X_1,.,X_n,.)(y)$ évaluant la valeur de $I(X_1,.,X_n,...)$ au point y est une multicapacité : on peut donc considérer le multinoyau capacitaire I comme une application de F dans l'ensemble des multicapacités sur $\prod E_i$.

Dans ce qui suit, pour rester lisible, nous appellerons le plus souvent nos arguments et valeurs "ensembles" et nous les noterons avec de belles capitales, même si çà peut être des fonctions. Nous dirons par ailleurs "multinoyau" pour "multinoyau capacitaire" (et il nous arrivera sans doute de dire tout bonnement "opération analytique").

Voici, pour commencer, une belle trivialité éminemment importante (elle équivaut, pour nous, à l'idempotence de l'opération de Souslin).

THEOREME 1.- Soit I un multinoyau de F dans $\prod_i E_i$ et, pour tout i, soit J_i un multinoyau de E_i dans $\prod_j E^i_j$ (j parcourant un ensemble d'indices $\underline{\underline{J}}^i$ au plus infini dénombrable). Alors l'application J de $\prod_{i,j} \Phi(E^i_j)$ dans $\Phi(F)$ obtenue par composition de I et des J_i, i.e. définie par

$$J(\ldots,X^i_j,\ldots) = I[J_1(X^1_1,.,X^1_j,.),\ldots,J_i(X^i_1,.,X^i_j,.),\ldots] ,$$

est un multinoyau de F dans $\prod_{i,j} E^i_j$.

Attention ! On ne peut "identifier" une infinité d'arguments, à cause de la montée séparée : ainsi, si $I(X_1,.,X_n,\ldots)$ est une opération analytique à une infinité d'arguments pris dans un même espace, l'application $J(X) = I(X,.,X,\ldots)$ peut ne pas être une opération analytique.

Nous arrivons maintenant à la définition de nos ensembles analytiques. Elle découle naturellement de la question suivante : soit I une opération analytique ; on sait que $I(X_1,.,X_n,\ldots)$ est compact si tous les X_n le sont et aussi, grâce à la montée séparée, que c'est un $\underline{\underline{K}}_\sigma$ (i.e. une réunion dénombrable de compacts) si les X_n sont compacts sauf un nombre fini d'entre eux qui sont seulement des $\underline{\underline{K}}_\sigma$; mais, que peut on dire de $I(X_1,.,X_n,\ldots)$ si tous les X_n sont seulement des $\underline{\underline{K}}_\sigma$, et en particulier des ouverts ? Comme la montée est seulement séparée, on ne sait que dire a priori, et on pose donc une définition...

DEFINITION 2.- Un ensemble A est dit analitique s'il existe un multinoyau I et des ouverts $U_1,.,U_n,\ldots$ tels que $A = I(U_1,.,U_n,\ldots)$.

Il faut bien entendu lire cette définition comme suit : une partie A de l'espace métrisable compact F est dite analitique s'il existe une famille dénombrable (E_i) d'espaces métrisables compacts, un multinoyau capacitaire I de F dans $\prod E_i$ et, pour chaque i, un ouvert U_i de E_i tels que l'on ait $A = I(U_1,.,U_n,\ldots)$.

Etant donné le théorème 1, on a immédiatement le résultat suivant

THEOREME 2.- Soit I un multinoyau et soient $A_1,.,A_n\ldots$ des arguments pour I. Si les A_i sont analitiques, alors $I(A_1,.,A_n,\ldots)$ est encore analitique.

Passant en revue les exemples d'opérations analytiques du §II, on obtient alors les propriétés de stabilité habituelles :

COROLLAIRE.- 1) Les ensembles analitiques forment une classe stable pour les réunions et intersections dénombrables, les produits dénombrables, et l'opération de Souslin.

2) Les boréliens sont analitiques.

3) Les ensembles analitiques forment une classe stable pour les images directes et réciproques par des fonctions boréliennes.

D/ Remarquons d'abord qu'un compact K est analitique (prendre l'opération analytique $I(X_1,.,X_n,...)$ constante égale à K), ainsi qu'un ouvert U (prendre l'opération analytique $I(X_1,.,X_n,...) = X_1$, i.e. l'identité). Ceci dit, le 1) résulte immédiatement du théorème appliqué aux exemples c),d),e) et f) du §II (pour f), il faut savoir qu'un $\underline{\underline{G}}_\delta$ est analitique, ce qui résulte de la stabilité pour les intersections dénombrables) ; le 2) du fait que la classe des boréliens est le stabilisé de la classe des compacts pour les réunions et intersections dénombrables. Une fois que l'on sait que les boréliens sont analitiques, le 3) résulte aussi immédiatement du théorème appliqué à l'exemple b) du §II.

REMARQUES. a) En particulier, si I est un multinoyau et si $A_1,.,A_n...$ sont des arguments $\underline{\underline{K}}_\sigma$, alors $I(A_1,.,A_n,...)$ est analitique. On aurait pu prendre cela comme définition des ensembles analitiques, et il nous faudra agir ainsi, dans l'appendice, quand les espaces ambiants seront seulement séparés (les ouverts ne sont plus alors forcément des $\underline{\underline{K}}_\sigma$, ni même, en fin de compte, des analitiques).

b) Comme, classiquement, tout ensemble analytique est image directe d'un $\underline{\underline{K}}_{\sigma\delta}$ (et même d'un $\underline{\underline{G}}_\delta$) par une application continue (ou encore, le noyau d'un schéma de Souslin sur les compacts), on voit que tout ensemble analytique est analitique. Nous verrons la réciproque juste après avoir établi le théorème de capacitabilité.

c) Lorsqu'on sait qu'il existe des ensembles analytiques (et donc analitiques) non boréliens, on voit combien est grande la distance entre la montée séparée et la montée globale. Meyer m'a fait, à ce sujet, la remarque instructive suivante : de même que Lebesgue, supposant érronément que l'image directe par une fonction continue commutait avec les intersections dénombrables décroissantes, avait "râté" la notion d'ensemble analytique, j'avais râté , de mon côté, pendant six ans, la bonne notion de multicapacité, d'abord en ne pensant pas à y mettre une infinité de variables, ensuite en m'acharnant (y compris avec, comme Lebesgue, des démonstrations fausses) à avoir une montée globale. Au passage, il est amusant de constater que j'ai encore fait, involontairement, cette erreur dans la première version de cet exposé : elle y est subtilement glissée à l'occasion de la définition du prolongement du §III ; en effet, dans la belle formule en question, il y avait des "$\{f_n > t_n\}$" au lieu de "$\{f_n \geq t_n\}$" !

Voici maintenant le théorème de capacitabilité

THEOREME 3.- <u>Soient</u> I <u>un multinoyau et</u> $A_1,..,A_n,...$ <u>des arguments pour</u> I. <u>Si les</u> A_i <u>sont analitiques, alors on a</u>

$$I(A_1,..,A_n,...) = \sup I(K_1,..,K_n,...)$$

<u>où</u> K_i <u>parcourt les compacts contenus dans</u> A_i .

<u>D/</u> Fixons $y \in F$ et considérons la multicapacité I_y sur $\prod E_i$ qui associe à $X_1,..,X_n,...$ la valeur de $I(X_1,..,X_n,...)$ au point y . Soit $t \in \mathbb{R}_+$ tel que $I_y(A_1,..,A_n,...) > t$: nous devons montrer qu'il existe alors, pour tout i , un compact K_i inclus dans A_i tel que $I_y(K_1,..,K_n,...) \geq t$. La démonstration va se faire en deux étapes.

a) On suppose d'abord que les A_i sont des $\underline{\underline{K}}_\sigma$. Il existe alors, pour chaque i , une suite croissante de compacts $(K_i^p)_{p \in \mathbb{N}}$, de réunion égale à A_i. Comme I_y monte séparément, il existe alors un entier p_1 tel que

$$I_y(K_1^{p_1},A_2,..,A_n,...) > t$$

En raisonnant par récurrence, il est alors facile de voir qu'il existe pour tout i un entier p_i tel que l'on ait, pour tout n ,

$$I_y(K_1^{p_1},K_2^{p_2},..,K_n^{p_n},A_{n+1},..,A_{n+k},...) > t$$

Mais, comme la montée n'est que séparée, on ne peut pas, s'il y a une infinité d'indices, remplacer simultanément tous les A_i par les $K_i^{p_i}$. Cependant, comme I_y est globalement croissante, on a, pour tout n ,

$$I_y(K_1^{p_1},K_2^{p_2},..,K_n^{p_n},E_{n+1},..,E_{n+k},...) > t$$

et, comme I_y est globalement descendante sur les compacts, on peut effectivement conclure que l'on a bien

$$I_y(K_1^{p_1},K_2^{p_2},..,K_n^{p_n},K_{n+1}^{p_{n+1}}, .. , K_{n+k}^{p_{n+k}}, ...) \geq t$$

D'où le théorème lorsque les arguments sont des $\underline{\underline{K}}_\sigma$.

b) Passons maintenant au cas général. Par définition, il existe, pour tout i , un multinoyau J_i et des ouverts U_j^i tels que l'on ait

$$A_i = J_i(U_1^i,..,U_j^i,...)$$

Désignons par J le multinoyau obtenu par composition de I avec les J_i . En appliquant a) au multinoyau J et aux ouverts U_j^i , on a

$$\begin{aligned} I(A_1,..,A_n,...) &= J(...,U_j^i,...) \\ &= \sup J(...,K_j^i,...) \text{ , } K_j^i \text{ compact dans } U_j^i \\ &= \sup I(...,J_i(.,K_j^i,.),...) \end{aligned}$$

Comme $J_i(.,K_j^i,.)$ est un compact contenu dans A_i si, pour tout j , K_j^i est un compact contenu dans U_j^i , on obtient bien l'approximation désirée.

REMARQUES. a) La démonstration paraphrase évidemment la démonstration classique du théorème de capacitabilité de Choquet. Remarquer cependant que l'on a gagné un cran dans la première étape : on y a considéré des $\underline{\underline{K}}_\sigma$, et non des $\underline{\underline{K}}_{\sigma\delta}$; bien entendu, l'opération "δ" est cachée dans la suite infinie d'indices.

b) Démontrons maintenant que tout ensemble analitique est analytique (pour connaisseurs). Soit $A = I(U_1,.,U_n,...)$ un ensemble analitique, et représentons l'ouvert U_i comme réunion d'une suite croissante de compacts $(K_i^p)_{p\in\mathbb{N}}$. On a vu, au cours de la première étape de la démonstration du théorème, que l'on a alors

$$A = \sup_\sigma \inf_n I(K_1^{\sigma_1}, K_2^{\sigma_2},.,K_n^{\sigma_n},E_{n+1},.,E_{n+k},...)$$

où σ parcourt l'ensemble des suites d'entiers indexées par $\underline{\underline{I}}$ et où σ_i désigne le i-ème terme de la suite σ. Si l'on pose, pour tout σ, n ,

$$K_{\sigma|n} = I(K_1^{\sigma_1}, K_2^{\sigma_2},.,K_n^{\sigma_n},E_{n+1},.,E_{n+k},...)$$

on a alors

$$A = \sup_\sigma \inf_n K_{\sigma|n}$$

et donc une représentation de A comme noyau d'un schéma de Souslin sur les compacts. Par conséquent A est analytique. Mais, on a mieux : ce schéma de Souslin n'est pas n'importe quel schéma ; c'est un schéma <u>privilégié</u> selon la terminologie de Mokobodzki (1966), ou un schéma de Mokobodzki selon celle de Dellacherie (1972). On entend par là que, si J est une capacité (et, plus généralement, un noyau capacitaire, i.e. un multinoyau à un argument), on a

$$J(A) = J(\sup_\sigma \inf_n K_{\sigma|n}) = \sup_\sigma \inf_n J(K_{\sigma|n})$$

Cela résulte tout simplement du même argument - la première étape de la démonstration du théorème - appliqué à la composée de J avec I .

Le théorème de capacitabilité est un théorème d'approximation par l'intérieur, par des compacts. Nous allons voir maintenant un théorème d'approximation par l'extérieur, par des boréliens. Seulement des boréliens ? Eh oui, dans le cas général, on n'a pas mieux(1), mais ce n'est déjà pas si mal : on en déduira immédiatement le premier théorème de séparation, dans toute sa force ; et les initiés savent que ce dernier est un des théorèmes les plus importants de la théorie des ensembles analytiques.

THEOREME 4.- <u>Soient</u> I <u>un multinoyau et</u> $A_1,.,A_n,...$ <u>des arguments pour</u> I. <u>Si les</u> A_i <u>sont analytiques</u>(2), <u>alors on a</u>

$$I(A_1,.,A_n,...) = \inf I(B_1,.,B_n,...)$$

<u>où</u> B_i <u>parcourt les boréliens contenant</u> A_i.

<u>De plus</u>, <u>si</u> I <u>est une multicapacité</u>, <u>l'inf est atteint</u>.

<u>D</u>/ Quitte à fixer $y\in F$ et à regarder la valeur de $I(A_1,.,A_n,...)$ en y ,

---

(1) On sait que, pour une capacité alternée d'ordre 2 , on a une approximation extérieure par des ouverts.

(2) On peut maintenant rétablir l'orthographie traditionnelle.

on peut supposer que I est une multicapacité. Posons alors, pour toute suite $X_1,.,X_n,...$ d'arguments pour I ,

$$J(X_1,.,X_n,...) = \inf I(B_1,.,B_n,...)$$

où B_i parcourt les boréliens contenant X_i . Nous allons montrer que l'application J ainsi définie est elle aussi une multicapacité. Comme I et J coincident si les arguments sont boréliens, et, en particulier, compacts, il résultera alors du théorème précédent que I et J coincident pour des arguments analytiques : d'où la première partie du théorème. Par ailleurs, comme la classe des boréliens est stable pour les intersections dénombrables, et que I est croissante, il est clair que l'inf, dans la définition de J est atteint (d'où la seconde partie du théorème). La croissance et la descente de J sur les compacts sont triviales. Il reste, pour montrer que J est une multicapacité, à vérifier la montée séparée. Supposons par exemple $X_2,.,X_n,...$ fixés et soit $X_1^k \uparrow X_1$. Soient, pour tout k , $Y_1^k,Y_2^k,.,Y_n^k,...$ des boréliens tels que Y_1^k contienne X_1^k , que Y_i^k contienne X_i pour $i \geq 2$ et que l'on ait

$$J(X_1^k,X_2,.,X_n,...) = I(Y_1^k,Y_2^k,.,Y_n^k,...)$$

Quitte à remplacer, pour $i \geq 2$, le borélien Y_i^k par $\inf_k Y_i^k$, on peut supposer que, pour $i \geq 2$, les Y_i^k ne dépendent pas de k , et donc on peut supprimer l'indice k pour $i \geq 2$. D'autre part, pour k fixé, on peut remplacer Y_1^k par $\inf_{p \geq k} Y_1^p$, et donc supposer que $(Y_1^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante. Désignant alors par Y_1 la réunion de cette suite, on a

$$J(X_1^k,X_2,.,X_n,.) = I(Y_1^k,Y_2,.,Y_n,.) \uparrow I(Y_1,Y_2,.,Y_n,.) = J(X_1,X_2,.,X_n,.)$$

et c'est fini.

REMARQUE. La même méthode permet de prolonger un "multinoyau" défini seulement lorsque ses arguments sont boréliens, en un "vrai" multinoyau.

COROLLAIRE.- <u>Soient</u> I <u>un multinoyau et</u> $A_1,.,A_n...$ <u>des arguments pour</u> I. <u>Si les</u> A_i <u>sont analytiques, et si on a</u>

$$I(A_1,.,A_n,...) = \emptyset \quad (\text{ou } 0)$$

<u>alors il existe, pour tout</u> i , <u>un borélien</u> B_i <u>contenant</u> A_i <u>tel que</u>

$$I(B_1,.,B_n,...) = \emptyset$$

<u>D</u>/ Soit J la capacité (à un argument) sur F valant 0 ou 1 suivant que l'argument est vide ou non. Appliquons le théorème à la multicapacité obtenue en composant J avec I : c'est fini.

REMARQUES. a) Appliquons le corollaire à l'exemple b) de multicapacité du §II : $I(X_1,.,X_n,.) = 0$ ou 1 suivant que $\inf_n X_n = \emptyset$ ou non. On obtient le théorème de séparation de Novikov.

b) Plus généralement, appliquons le à l'exemple f) d'opération analytique du §II (celui fournissant l'opération de Souslin). On obtient le théorème de séparation de St-Pierre (1977), déjà démontré en fait par Liapunov (1939) qui utilise cependant la théorie de l'indice.

APPENDICE

I. OPERATION DE SOUSLIN ET OPERATION ANALYTIQUE

Nous démontrons ici que l'exemple f) du §II est bien une opération analytique. Rappelons que, S désignant l'ensemble des suites finies d'éléments de $\overline{\mathbb{N}}$, on prend $E_s = F$ pour tout $s \in S$, on ajoute "0" à S et on prend $E_0 = \overline{\mathbb{N}}^{\mathbb{N}}$. Finalement, on pose

$$I(X_0,.,X_s,...) = \sup_{\sigma \in X_0} \inf_{s \dashv \sigma} Y_s$$

où $Y_s = X_s$ si $\infty \notin s$ et $Y_s = F$ si $\infty \in s$. Il est clair que l'opération I ainsi définie est globalement croissante, et séparément montante (en effet, "inf" est séparément montante et "sup" l'est globalement). Il reste à vérifier que I est à valeur compact sur les compacts, et globalement descendante sur les compacts. Soient donc $K_0^p \downarrow K_0$ et, pour tout s, $K_s^p \downarrow K_s$. Désignons par $|s|$ la longueur de la suite finie s et définissons, pour tout $n,p \in \mathbb{N}$, une application $f_{n,p}$ de E_0 dans $\underline{\underline{K}}(F)$, ensemble des compacts de F, par

$$f_{n,p}(\sigma) = \inf_{s \dashv \sigma,\ |s| \leq n} L_s^p$$

où $L_s^p = K_s^p$ si $\infty \notin s$ et $L_s^p = F$ si $\infty \in s$. Comme $f_{n,p}(\sigma)$ ne dépend que des n premières coordonnées de σ, il est clair que $f_{n,p}$ est une application continue de E_0 dans $\underline{\underline{K}}(F)$ muni de la topologie (métrisable compacte) de Hausdorff. En particulier, $f_{n,p}(K_0^p)$ est un compact de $\underline{\underline{K}}(F)$ pour tout n,p, et donc

$$H_n^p = \{y \in F : \exists \sigma \in K_0^p \quad y \in f_{n,p}(\sigma)\} = \sup_{\sigma \in K_0^p} \inf_{s \dashv \sigma,\ |s| \leq n} L_s^p$$

est un compact de F. Nous allons montrer que

$$I(K_0^p,.,K_s^p,...) = \inf_n H_n^p$$

et que

$$I(K_0,.,K_s,...) = \inf_p \inf_n H_n^p$$

D'abord, il est clair que les premiers membres sont inclus dans les seconds. Par ailleurs, la première égalité est en fait conséquence de la seconde appliquée à $K_i^p = K_i$ pour tout p. Il nous suffit donc de vérifier que tout y appartenant à $\inf_p \inf_n H_n^p$ (que nous supposons non vide) appartient à $I(K_0,.,K_s,...)$. Or soit, pour tout n,p,

$$G_n^p = \{\sigma \in K_0^p : y \in f_{n,p}(\sigma)\}$$

Comme $f_{n,p}$ est une application continue, G_n^p est un compact de E_0, contenu dans K_0^p, et non vide puisque $y \in H_n^p$. Comme G_n^p décroît si p ou n croît, on en déduit que $\inf_p \inf_n G_n^p$ est non vide. Soit alors σ un de ses éléments : on a $\sigma \in K_0$, et $y \in f_{n,p}(\sigma)$ pour tout n,p. D'où, en appliquant encore une fois la propriété de Borel-Lebesgue,

$$y \in \inf_{s \dashv \sigma} \inf_p L_s^p$$

si bien que y appartient à $I(K_0,.,K_s,...)$.

REMARQUE. On sait qu'un schéma de Souslin peut aussi s'écrire comme schéma de projection : si on pose $Z_s = Y_s \times I_s$ où $I_s = \{\sigma : s \dashv \sigma\}$, et $Y_s = X_s$ si $\omega \notin s$ et $Y_s = F$ si $\omega \in s$, alors le noyau $\sup_{\sigma\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \inf_{s\dashv\sigma} X_s$ est égal à la projection sur F de l'ensemble

$$Z = \inf_n \sup_{|s|\leq n,\, \omega\notin s} Z_s = \sup_{\sigma\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} ((\inf_{s\dashv\sigma} X_s) \times 1_{\{\sigma\}})$$

Cela permet d'obtenir l'opération I comme composée d'opérations analytiques élémentaires. Cette voie, moins naturelle, est cependant plus aisée, et permet d'atteindre sans peine l'opération de Souslin par une opération analytique dans le cas abstrait.

II. ENSEMBLES ANALYTIQUES : CAS ABSTRAIT

Le lecteur attentif se sera aperçu, qu'en dehors des exemples du §II et des corollaires du §IV, nous n'avons pas utilisé la compacité, ni même sérieusement la topologie, dans le corps de l'exposé. En fait, l'essentiel de ce qui y a été fait peut s'écrire dans le langage des espaces pavés. Nous indiquons ici, rapidement, comment cela se peut.

D'abord, pour des raisons de commodité, nous restreignons le sens du mot pavage par rapport au "livre rose" : un *pavage* $\underline{\underline{E}}$ sur un ensemble E sera pour nous une classe de parties de E, contenant la partie vide, et stable pour les réunions finies et les intersections dénombrables. Un *espace pavé* est alors un couple $(E,\underline{\underline{E}})$ où E est un ensemble et $\underline{\underline{E}}$ un pavage sur E. Nous désignons par $\Phi(E)$ l'ensemble des fonctions de E dans $\overline{\mathbb{R}}_+$; si $(E,\underline{\underline{E}})$ est un espace pavé, nous dirons qu'un élément f de $\Phi(E)$ est une *$\underline{\underline{E}}$-fonction* si elle est constante, égale à $+\infty$, ou si elle est bornée et telle que, pour tout $t > 0$, $\{f \geq t\}$ appartient à $\underline{\underline{E}}$. Noter que les $\underline{\underline{E}}$-fonctions à valeurs dans $\{0,1\}$ sont les (indicatrices des) éléments de $\underline{\underline{E}}$.

Dans ce paragraphe de l'appendice, nous ne considérons que des espaces pavés tels que l'*espace entier appartienne au pavage*. Nous verrons comment oter cette hypothèse au §IV de cet appendice. Par ailleurs, le lecteur qui aimerait manipuler des espaces "plus concrets" pourra penser au cas où $\underline{\underline{E}}$ est le pavage des parties fermées d'un espace topologique E, et même d'un espace métrisable séparable E (on reviendra là-dessus au §VI de cet appendice).

DEFINITION.- *Un multinoyau capacitaire de* $(F,\underline{\underline{F}})$ *dans* $\prod(E_i,\underline{\underline{E}}_i)$ *est une application* I *de* $\prod\Phi(E_i)$ *dans* $\Phi(F)$ *vérifiant les conditions*

1) *elle est globalement croissante* ;
2) *elle est séparément montante* ;
3) *elle est à valeurs dans les $\underline{\underline{F}}$-fonctions sur les $\underline{\underline{E}}_i$-fonctions, et elle est globalement descendante sur les $\underline{\underline{E}}_i$-fonctions*.

On dira que I est une multicapacité [resp une opération analytique] si I est à valeurs dans les fonctions constantes [resp à valeur (indicatrice d')ensemble si ses arguments sont des (indicatrices d')ensembles].

On a alors, tout aussi trivialement, le théorème de composition (théorème 1 du §IV). Puis, la définition de nos ensembles analytiques :

DEFINITION.- Une partie A d'un espace pavé $(F,\underline{\underline{F}})$ est $\underline{\underline{F}}$-analitique si elle peut s'écrire $A = I(H_1,..,H_n,...)$ où I est un multinoyau de $(F,\underline{\underline{F}})$ dans un produit d'espaces pavés $\prod(E_i,\underline{\underline{E}}_i)$ et où H_i est la réunion d'une suite d'éléments du pavage $\underline{\underline{E}}_i$.

On a alors le théorème d'invariance (théorème 2 du §IV), le théorème de capacitabilité (théorème 3, les éléments des pavages respectifs jouant le rôle des compacts), et le théorème d'approximation extérieure (théorème 4, le rôle des boréliens étant joué par les éléments des stabilisés pour les réunions et intersections dénombrables, des pavages respectifs).

Avant de voir ce que deviennent ici les corollaires aux théorèmes 2 et 4 du §IV, voyons quelques exemples de multinoyaux capacitaires dans ce cadre abstrait (on reprend en fait des exemples vus dans le corps de l'exposé).

Exemples :

0) Soit $(E,\underline{\underline{E}})$ un espace pavé, et soit I la fonction sur $\underline{\underline{P}}(E)$ valant 0 ou 1 suivant que son argument est vide ou non. Il est clair que I est croissante, montante, mais non toujours descendante sur les éléments de $\underline{\underline{E}}$. Si elle est descendante sur les éléments de $\underline{\underline{E}}$, c'est une $\underline{\underline{E}}$-capacité, et on dit que le pavage $\underline{\underline{E}}$ est semi-compact. Si $(E,\underline{\underline{E}})$ est un espace pavé semi-compact, et si on prend $(E_i,\underline{\underline{E}}_i) = (E,\underline{\underline{E}})$ pour tout i, alors on définit une multicapacité J sur $\prod(E_i,\underline{\underline{E}}_i)$ en posant $J(X_1,..,X_n,...) = 0$ ou 1 suivant que $\inf_n X_n$ est vide ou non.

1) Soient $(E,\underline{\underline{E}})$ et $(F,\underline{\underline{F}})$ deux espaces pavés, et soit f une application de E dans F telle que $f^{-1}(\underline{\underline{F}})$ soit inclus dans $\underline{\underline{E}}$ (nous dirons, pour abréger, que f est un morphisme gauche). Alors l'image réciproque par f est une opération analytique.

2) Soient $(E,\underline{\underline{E}})$ et $(F,\underline{\underline{F}})$ deux espaces pavés et soit f une application de E dans F telle que $f(\underline{\underline{E}})$ soit inclus dans $\underline{\underline{F}}$ et que, pour tout $y \in F$, la trace de $\underline{\underline{E}}$ sur $f^{-1}(\{y\})$ soit un pavage semi-compact sur $f^{-1}(\{y\})$ (nous dirons, pour abréger, que f est un morphisme droit). On vérifie alors aisément que l'image directe par f est une opération analytique. Un cas particulier important : $(E,\underline{\underline{E}})$ est de la forme $(K \times F, \underline{\underline{K}} \boxtimes \underline{\underline{F}})$ où $(K,\underline{\underline{K}})$ est un espace pavé semi-compact et $\underline{\underline{K}} \boxtimes \underline{\underline{F}}$ est le pavage sur $K \times F$ engendré par les rectangles $M \times N$ avec $M \in \underline{\underline{K}}$, $N \in \underline{\underline{F}}$; f est

la projection de $K \times F$ sur F.

3) l'intersection dénombrable, dans $(E,\underline{\underline{E}})$, est une opération analytique.

4) la réunion dénombrable dans $(E,\underline{\underline{E}})$ est atteinte, comme dans l'exemple e) du §II, par une opération analytique, $\mathbb{N}$ étant muni du pavage constitué par ses parties compactes.

5) enfin, l'opération de Souslin est atteinte, comme dans l'exemple f) du §II, par une opération analytique, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ étant muni du pavage constitué par ses parties compactes. La démonstration a été esquissée dans la remarque du §I de l'appendice.

On a alors le théorème de stabilité suivant, conséquence immédiate du théorème d'invariance appliqué aux exemples.

THEOREME.- 1) *La classe des parties analitiques de* $(E,\underline{\underline{E}})$ *est stable pour les réunions et intersections dénombrables, et, plus généralement, pour l'opération de Souslin.*

2) *Les éléments du stabilisé de* $\underline{\underline{E}}$ *pour les réunions et intersections dénombrables sont des parties analitiques de* $(E,\underline{\underline{E}})$.

3) *Si* f *est un morphisme gauche (resp droit) de* $(E,\underline{\underline{E}})$ *dans* $(F,\underline{\underline{F}})$, *et si* A *est* $\underline{\underline{F}}$*-analitique (resp* $\underline{\underline{E}}$*-analitique), alors* $f^{-1}(A)$ *est* $\underline{\underline{E}}$*-analitique (resp* $f(A)$ *est* $\underline{\underline{F}}$*-analitique).*

Il résulte de ce théorème, et du théorème de capacitabilité (cf plus précisément la remarque b) suivant le théorème 3 du §IV), qu'une partie A de $(E,\underline{\underline{E}})$ est $\underline{\underline{E}}$-analitique ssi elle est $\underline{\underline{E}}$-analytique au sens du livre rose. Aussi rétablirons nous l'orthographe habituelle après la remarque suivante, pour laquelle l'emploi de deux orthographes sera encore utile.

REMARQUE. Soit $(E,\underline{\underline{E}})$ un espace pavé et soit $\underline{\underline{A}}(\underline{\underline{E}})$ le pavage sur E constitué par les parties $\underline{\underline{E}}$-analitiques. Il n'est pas évident, a priori, qu'une partie $\underline{\underline{A}}(\underline{\underline{E}})$-analitique est $\underline{\underline{E}}$-analitique, mais c'est bien le cas car $\underline{\underline{A}}(\underline{\underline{E}})$ est aussi le pavage des parties $\underline{\underline{E}}$-analytiques, et on sait que toute partie $\underline{\underline{A}}(\underline{\underline{E}})$-analytique est $\underline{\underline{E}}$-analytique.

Voici enfin le théorème de séparation, qui se démontre comme le corollaire du théorème 4 du §IV

THEOREME.- *Soit* I *une opération analytique de* $\prod(E_i,\underline{\underline{E}}_i)$ *dans un espace pavé* semi-compact $(F,\underline{\underline{F}})$. *Si* A_i *est* $\underline{\underline{E}}_i$*-analytique pour tout* i *et si on a*

$$I(A_1,.,A_n,...) = \emptyset$$

alors il existe, pour tout i, *un élément* B_i *du stabilisé de* $\underline{\underline{E}}_i$ *pour les réunions et intersections dénombrables tel que* B_i *contienne* A_i *et que*

$$I(B_1,.,B_n,...) = \emptyset$$

Nous dirons encore quelques mots sur la théorie abstraite plus loin.

III. ENSEMBLES ANALYTIQUES : CAS TOPOLOGIQUE "NON CLASSIQUE"

Nous montrons ici, rapidement, comment retrouver les ensembles analytiques au sens de Choquet-Sion-Frolik à l'aide des opérations analytiques. Il faut modifier un peu les définitions, en suivant d'ailleurs les idées de Sion (1963) sur les capacités.

On suppose ici les espaces ambiants E,F (avec ou sans indices) seulement séparés. A part cela, nous conservons les notations du corps de l'exposé. Enfin, pour rester lisible, nous nous contenterons d'écrire la nouvelle définition des opérations analytiques. Le lecteur n'aura aucun mal à trouver la bonne définition des multicapacités, ni même celle, générale, d'un multinoyau capacitaire : on doit, dans ce cas, remplacer les compacts par les fonctions (à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$) s.c.s. à support compact (finies, ou $\equiv +\infty$), et remplacer les ouverts par les fonctions s.c.i. .

DEFINITION.- Une opération analytique sur $\prod E_i$, à valeurs dans F , est une application I de $\prod \underline{\underline{P}}(E_i)$ dans $\underline{\underline{P}}(F)$ vérifiant les conditions

1) elle est globalement croissante ;
2) elle est séparément montante ;
3) elle est à valeur compact sur les compacts, et continue à droite sur les compacts : pour tout ouvert V contenant $I(K_1,.,K_n,...)$, il existe, pour tout i , un ouvert U_i de E_i , contenant K_i , tel que U_i soit égal à E_i sauf pour un nombre fini d'indices i, et que $I(U_1,.,U_n,...)$ soit contenu dans V .

REMARQUES. a) La propriété de continuité à droite sur les compacts est plus forte que la propriété de descente globale sur les compacts. Elle lui est équivalente si les espaces E_i sont métrisables compacts.

b) On prendra bien garde, dans la définition de la continuité à droite, de ne pas se contenter d'écrire, juste à la fin, "... et que, pour tout compact L_i inclus dans U_i , $I(L_1,.,L_n,...)$ soit contenu dans V." Cela ne suffirait pas en général.

On a alors, presque aussi trivialement, le théorème de composition (théorème 1 du §IV). Par ailleurs, les exemples de multicapacités et d'opérations analytiques donnés au §II (du corps de l'exposé) sont encore valables ici (sauf l'image réciproque par une fonction continue : il faut prendre ici une fonction propre). Puis, la définition de nos ensembles analytiques

DEFINITION.- Un ensemble A est dit analitique s'il existe une opération analytique I et des arguments $\underline{\underline{K}}_\sigma$ $H_1,.,H_n,...$ tels que l'on ait

$$A = I(H_1,.,H_n,...)$$

On a alors le théorème d'invariance (théorème 2 du §IV), et son corollaire, le théorème de stabilité, légèrement modifié :

THEOREME.- 1) Les ensembles analitiques forment une classe stable pour les réunions, intersections, produits dénombrables, et pour l'opération de Souslin.

2) Les éléments du stabilisé de la classe des compacts pour les réunions et intersections dénombrables sont analitiques.

3) Les ensembles analitiques forment une classe stable pour les images directes par une fonction continue, les images réciproques par une fonction propre, et pour les images directes et réciproques par une fonction dont le graphe est analitique.

On a aussi le théorème de capacitabilité (théorème 3 du §IV), en modifiant légèrement la démonstration de la première étape : après avoir défini la suite $(K_n^{p_n})$ comme dans la démonstration du théorème 3, on raisonne comme suit. Si on avait

$$I_y(K_1^{p_1}, K_2^{p_2}, .., K_n^{p_n}, K_{n+1}^{p_{n+1}}, .. , K_{n+k}^{p_{n+k}}, \ldots) < t$$

alors, à cause de la continuité à droite, on aurait

$$I_y(K_1^{p_1}, K_2^{p_2}, .., K_n^{p_n}, E_{n+1}, .., E_{n+k}, \ldots) < t$$

pour n suffisamment grand, et donc, à cause de la croissance globale,

$$I_y(K_1^{p_1}, K_2^{p_2}, .., K_n^{p_n}, A_{n+1}, .., A_{n+k}, \ldots) < t$$

d'où la conclusion. Noter que l'on n'a pas utilisé ici la continuité à droite dans toute sa force : elle l'est dans la démonstration du théorème de composition, et donc, finalement, dans la deuxième étape de la démonstration du théorème de capacitabilité.

Enfin, le théorème d'approximation extérieure (théorème 4 du §IV) et son corollaire, le théorème de séparation, sont encore vrais, avec la même démonstration (avec, cependant, "analitique" au lieu de "analytique" pour le moment). On peut même y remplacer les boréliens par toute classe contenant les compacts et les ouverts, et stable pour les réunions de suites croissantes et les intersections dénombrables.

Ils nous reste à rétablir l'orthographe, i.e. à montrer que notre définition définit les mêmes ensembles que l'une des définitions équivalentes connues des ensembles analytiques (cf Jayne (1976)). Nous choisissons celle de Frolik : un ensemble $A \in \underline{\underline{P}}(F)$ est analytique ssi il existe une application f de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ dans l'ensemble $\underline{\underline{K}}(F)$ des compacts de F, s.c.s. (i.e. : pour tout ouvert V contenant $f(\sigma)$, il existe un voisinage U de σ tel que $f(\tau)$ soit contenu dans V pour tout $\tau \in U$), telle que l'on ait $A = \sup_\sigma f(\sigma)$, σ parcourant $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

THEOREME.- Un ensemble est analitique ssi il est analytique.

D/ Comme $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ est analitique, pour démontrer que analytique $\Rightarrow$ analitique, il suffit de vérifier que l'application I de $\underline{\underline{P}}(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})$ dans $\underline{\underline{P}}(F)$ définie par $I(X) = \sup_{\sigma \in X} f(\sigma)$ est une opération analytique, ce qui n'est pas bien difficile. Réciproquement, soit A analitique : $A = I(H_1,..,H_n,...)$ où I est une opération analytique et les H_i sont des $\underline{\underline{K}}_\sigma$. Ecrivons chaque H_i comme réunion d'une suite croissante $(K_i^p)_{p\in\mathbb{N}}$ de compacts et définissons une application f de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ dans $\underline{\underline{K}}(F)$ en posant

$$f(\sigma) = I(K_1^{\sigma_1},..,K_n^{\sigma_n},...)$$

où σ_n est le n-ième terme de la suite infinie σ. On vérifie sans peine que f est une fonction s.c.s., et il résulte de la première étape de la démonstration du théorème de capacitabilité que $A = \sup_\sigma f(\sigma)$.

REMARQUE. Ici encore, on n'obtient pas n'importe quelle fonction s.c.s. mais une fonction <u>privilégiée</u> en ce sens que, si J est une capacité sur F (ou, plus généralement un noyau capacitaire à valeur dans F), alors $J(A) = J(\sup_\sigma f(\sigma)) = \sup_\sigma J(f(\sigma))$. C'est la même démonstration, appliquée à la composée de J avec I .

IV. RETOUR AU CAS ABSTRAIT

La théorie abstraite du §II de l'appendice et la théorie topologique du §III de l'appendice chapeautent toutes deux, de manière distincte, la théorie topologique du corps de l'exposé. Nous allons esquisser maintenant une théorie abstraite chapeautant à la fois les §II et §III de cet appendice.

On appelle ici <u>espace pavé</u> $(E,\underline{\underline{E}}^f,\underline{\underline{E}}^g)$ la donnée d'un ensemble E , d'un pavage $\underline{\underline{E}}^f$ sur E (i.e. une partie de $\underline{\underline{P}}(E)$ contenant la partie vide et stable pour les réunions finies et les intersections dénombrables) , et d'une partie $\underline{\underline{E}}^g$ de $\underline{\underline{P}}(E)$ contenant l'ensemble E . On pourra penser au cas où E est un espace topologique, $\underline{\underline{E}}^f$ l'ensemble de ses fermés ou de ses compacts, et $\underline{\underline{E}}^g$ l'ensemble de ses ouverts.

Encore une fois, nous nous contenterons de définir les opérations analytiques. Les multicapacités se définissent de manière analogue, et aussi les multinoyaux capacitaires à condition d'avoir judicieusement défini les analogues des fonctions s.c.i. et s.c.s. - nous laissons cela au lecteur.

DEFINITION.- <u>Une</u> opération analytique <u>de</u> $\prod(E_i,\underline{\underline{E}}_i^f,\underline{\underline{E}}_i^g)$ <u>dans</u> $(F,\underline{\underline{F}}^f,\underline{\underline{F}}^g)$ <u>est une application</u> I <u>de</u> $\prod\underline{\underline{P}}(E_i)$ <u>dans</u> $\underline{\underline{P}}(F)$ <u>vérifiant les conditions</u>

1) <u>elle est globalement croissante</u> ;
2) <u>elle est séparément montante</u> ;

3a) <u>elle est à valeur dans le pavage</u> $\underline{\underline{F}}^f$ <u>si ses arguments sont pris dans les pavages</u> $\underline{\underline{E}}_i^f$, <u>et elle est globalement descendante sur les éléments des pavages</u> $\underline{\underline{E}}_i^f$;

3b) <u>Soit</u> $X_i \in \underline{\underline{E}}_i^f$ <u>pour tout</u> i , <u>et soit</u> $y \notin I(X_1,..,X_n,...)$. <u>Alors, pour tout</u> $V \in \underline{\underline{F}}^g$ <u>contenant</u> $I(X_1,..,X_n,...)$, <u>tel que</u> $y \notin V$, <u>il existe, pour tout</u> i , <u>un élément</u> Y_i <u>de</u> $\underline{\underline{E}}_i^g$ <u>contenant</u> X_i <u>tel que</u> $Y_i = E_i$ <u>sauf pour un nombre fini d'indices</u> i , <u>et que</u> $I(Y_1,..,Y_n,...)$ <u>soit contenu dans</u> V .

On retrouve la théorie du §II de l'appendice en se limitant aux espaces pavés $(E,\underline{\underline{E}}^f,\underline{\underline{E}}^g)$ tels que $E \in \underline{\underline{E}}^f$ et $\underline{\underline{E}}^g = \{E\}$ (auquel cas 3b) est vide), et la théorie du §III de l'appendice en se limitant aux espaces pavés $(E,\underline{\underline{E}}^f,\underline{\underline{E}}^g)$ où E est un espace topologique séparé, $\underline{\underline{E}}^f$ l'ensemble de ses compacts, et $\underline{\underline{E}}^g$ l'ensemble de ses ouverts (auquel cas la descente globale dans 3a) est conséquence de 3b)).

On peut faire, dans ce cadre général, la plupart des choses que l'on a faites antérieurement. Mais il n'est pas sûr que cela soit très intéressant...

V. SUR LES MULTINOYAUX A UN NOMBRE FINI D'ARGUMENTS

Nous nous replaçons dans le cadre du corps de l'exposé (espaces ambiants métrisables compacts), et nous reprenons ici quelques passages de Dellacherie (1976a)) - qui sera désigné par (°) dans ce paragraphe-, sans succomber à la tentation de tout réécrire...

1. <u>Multinoyaux et capacités</u>

Soit I un multinoyau capacitaire à n arguments de F dans $E_1 \times ... \times E_n$. Pour fixer les idées, nous prendrons des ensembles comme arguments et des fonctions comme valeurs. Nous allons montrer comment on peut essentiellement étendre I en un noyau de F dans $E = E_1 x...x E_n$, et même en une capacité sur $F \times E$.

On commence par définir une application J de $\underline{\underline{P}}(E)$ dans $\Phi(F)$ par $J(X) = \inf I(X_1,...,X_n)$, l'inf étant pris sur l'ensemble des n-uples $(X_1,...,X_n) \in \prod \underline{\underline{P}}(E_i)$ tels que X soit inclus dans $X_1 x...x X_n$. On montre aisément que J est un noyau de F dans E (cf la démonstration du théorème 4 du §IV) et que l'on a $J(X_1 x...x X_n) = I(X_1,...,X_n)$ au moins si aucun des X_i n'est vide. Noter, au passage, que si on pose $J°(X) = \inf I(B_1,...,B_n)$, l'inf étant pris sur l'ensemble des n-uples de boréliens $(B_1,...,B_n)$ tels que X soit inclus dans $X_1 x...x X_n$, on aurait obtenu un autre noyau J° de F dans E <u>tel que</u> J(A) = J°(A) <u>pour toute partie analytique</u> A <u>de</u> E car J et J° coincident sur les compacts (cf les théorèmes 3 et 4 du §IV).

Regardons maintenant le noyau capacitaire J de F dans E. Par analogie avec l'écriture des noyaux en théorie de la mesure, nous noterons J(y,X) la valeur de la fonction J(X) en $y \in F$. La fonction $(y,X) \to J(y,X)$ a les propriétés suivantes

1) pour $y\varepsilon F$ fixé, $X \to J(y,X)$ est une capacité sur E ;

2) pour $K\varepsilon \underline{\underline{K}}(E)$ fixé, $y \to J(y,K)$ est une fonction s.c.s. sur F ; propriétés qui caractérisent en fait les noyaux capacitaires. Par ailleurs, on a un peu mieux que 2) : la fonction $(y,K) \to J(y,K)$ est s.c.s. sur $F \times \underline{\underline{K}}(E)$, $\underline{\underline{K}}(E)$ étant muni de la topologie de Hausdorff (cf théorème 9 de (°)). Définissons maintenant une fonction H sur $\underline{\underline{P}}(F) \times \underline{\underline{P}}(E)$ en posant $H(Y,X) = \sup_{y\varepsilon Y} J(y,X)$ (avec $\sup_{\emptyset} = 0$). On a $J(y,X) = H(\{y\},X)$ et il résulte du lemme de Dini-Cartan que H est une bicapacité sur $F \times E$ (cf la démonstration du théorème 4 de (°)). Appliquons enfin à H le procédé utilisé pour obtenir J à partir de I : on obtient finalement une capacité C sur $F \times E$ telle que $H(Y,X) = C(Y \times X)$ au moins si Y et X sont non vides.

Par conséquent, on a, comme annoncé, pratiquement étendu le multinoyau I de F dans $E = E_1 \times \ldots \times E_n$ en une capacité sur $F \times E$. Cela est impossible dans le cas d'un multinoyau à une <u>infinité</u> d'arguments (d'où les six ans pour démontrer le corollaire de l'introduction...).

Il est important aussi, pour les applications, de savoir qu'une capacité I sur un espace E peut s'étendre en un noyau capacitaire J d'un espace F dans $E \times F$ de la manière suivante : pour $H\varepsilon \underline{\underline{P}}(E \times F)$, on pose $J(y,H) = I(H(y))$, où $H(y)$ est la coupe de H selon y (cf corollaire du théorème 11 de (°)). Il résulte alors du théorème 2 du §IV que, si H est une partie analytique de $E \times F$, alors la fonction $y \to I(H(y))$ est une fonction analytique sur F (cf théorème 13 de (°)).

2. <u>Exemples</u>

a) Soit $F = \underline{\underline{M}}^+(E)$ l'ensemble des mesures de Radon ≥ 0 sur E, muni de la topologie de la convergence vague : c'est un espace métrisable compact. Et la fonction $(m,X) \to m^*(X)$ sur $F \times \underline{\underline{P}}(E)$ définit un noyau capacitaire I de F dans E. Si on applique le théorème de séparation (corollaire du théorème 4 du §IV) à la bicapacité $J(Y,X) = \sup_{m\varepsilon Y} m^*(X)$, on obtient alors le résultat suivant : si A (resp A') est une partie analytique de E (resp $\underline{\underline{M}}^+(E)$) telles que $m(A) = 0$ pour tout $m\varepsilon A'$, alors il existe un borélien B (resp B') de E (resp $\underline{\underline{M}}^+(E)$), contenant A (resp A') et tel que l'on ait encore $m(B) = 0$ pour tout $m\varepsilon B'$ (cf théorème 1 de (°)). Noter (pour connaisseurs) que, d'après le théorème de la borne, on peut toujours prendre pour borélien B (resp B') le complémentaire d'un "constituant" du complémentaire de A (resp A').

b) Le noyau de l'exemple précédent est un cas particulier de noyau fellerien en théorie de la mesure, i.e. de fonction $(y,f) \to V(y,f)$ sur $F \times \Phi(E)$ (ici, F est un espace métrisable compact quelconque) vérifiant les conditions :

i) pour $y \varepsilon F$ fixé, $f \to V(y,f)$ est l'intégrale supérieure associée à une mesure de Radon ≥ 0 sur E ;

ii) pour $f \varepsilon \Phi(E)$ continue fixée, $y \to V(y,f)$ est continue sur F. Tout noyau fellerien est évidemment un noyau capacitaire. A priori, la théorie des noyaux capacitaires semble trop restreinte pour inclure celle des noyaux boréliens en théorie de la mesure (où, à la place de ii), on suppose seulement que $y \to V(y,f)$ est borélienne sur F pour f continue fixée sur E). Nous verrons cependant que l'on peut atteindre les noyaux-mesures boréliens à l'aide des noyaux capacitaires.

c) Soit R une relation d'équivalence sur E, dont le graphe est compact dans ExE. Alors l'application qui à $X \varepsilon \underline{\underline{P}}(E)$ associe son saturé pour R est une opération analytique.

d) Prenons pour E un convexe compact de $\mathbb{R}^n$. L'application qui à $X \varepsilon \underline{\underline{P}}(E)$ associe son enveloppe convexe est une opération analytique.

e) Les deux opérations précédentes sont des cas particuliers de <u>noyau enveloppant</u>. On appelle ainsi un noyau V de E dans lui-même tel que $X \subseteq V(X) = V(V(X))$. Pour un tel noyau, on a le résultat suivant (cf théorème 16 de (°)) : la classe des boréliens saturés (i.e. tels que $B = V(B)$) est égale au stabilisé de la classe des compacts saturés pour les limites de suites croissantes et les intersections dénombrables ; si A et A' sont des analytiques disjoints, et si A est saturé, il existe un borélien saturé contenant A et disjoint de A'. Si on applique cela à l'exemple d), on retrouve en particulier le résultat suivant de Preiss : la classe des convexes boréliens de $\mathbb{R}^n$ est égale au stabilisé de la classe des convexes compacts pour les limites de suites croissantes et les intersections dénombrables.

3. <u>Noyaux-calibres</u>

La notion suivante, très simple, permet, comme on le verra par des exemples, d'étendre le champ d'applications de la théorie des noyaux capacitaires.

DEFINITION.- <u>Un</u> noyau-calibre <u>de</u> F <u>dans</u> E <u>est une application croissante</u> J <u>de</u> $\underline{\underline{P}}(E)$ <u>dans</u> $\Phi(F)$ <u>vérifiant la condition suivante</u> : <u>il existe un espace auxiliaire</u> E' , <u>un binoyau capacitaire</u> I <u>de</u> F <u>dans</u> ExE', <u>et une partie analytique</u> A' <u>de</u> E' <u>tels que l'on ait</u>

$$J(A) = I(A,A')$$

<u>pour toute partie analytique</u> A <u>de</u> E.

On note $J(y,X)$ la valeur de $J(X)$ en $y \varepsilon F$, pour $X \varepsilon \underline{\underline{P}}(E)$.

REMARQUES. a) On dira, à l'occasion des exemples, pourquoi on ne demande l'égalité $J(A) = I(A,A')$ que pour A analytique.

b) Pour rester lisible, nous continuons à prendre des ensembles comme arguments. Mais, en fait, on a besoin de pouvoir prendre des fonctions comme arguments pour pouvoir composer les noyaux. Le procédé d'extension vu au §III est encore ici précieux.

c) Lorsque J est à valeurs dans les fonctions constantes, identifiées aux réels ≥ 0 , on dit tout simplement que J est un <u>calibre</u>.

d) On définirait de même la notion de multinoyau-calibre à un nombre fini d'arguments. Mais elle se ramène pratiquement à celle de noyau-calibre grâce à un procédé analogue à celui vu à propos des multinoyaux capacitaires. La notion de multinoyau-calibre à une infinité d'arguments n'a pas été explorée. On en connait pourtant un bel exemple : celui des schémas de Souslin (cf l'exemple f) du §II).

On a une autre représentation commode des noyaux-calibres (cf définition 5 et théorème 18 de (°)) :

THEOREME.- <u>Une application croissante</u> J <u>de</u> $\underline{\underline{P}}(E)$ <u>dans</u> $\Phi(F)$ <u>est un noyau-calibre ssi elle vérifie la condition suivante : il existe un espace auxiliaire</u> F', <u>un noyau-capacitaire</u> V <u>de</u> FxF' <u>dans</u> E <u>et une partie analytique</u> A' <u>de</u> F' <u>tels que l'on ait</u>

$$J(y,A) = \sup_{z\in A'} V((y,z),A)$$

<u>pour toute partie analytique</u> A <u>de</u> E.

En jouant sur les deux définitions possibles, on peut alors démontrer (ce n'est plus trivial ici) le <u>théorème de composition</u> : le composé de deux noyaux-calibres est encore un noyau calibre (cf théorème 19 de (°)). Et, vu la définition, il est clair qu'on a pour les noyaux-calibres, les analogues des théorèmes 2 , 3 et 4 du §IV : théorèmes d'<u>invariance</u>, de <u>capacitabilité</u>, d'<u>approximation extérieure</u>. Et aussi le corollaire de ce dernier : théorème de <u>séparation</u>.

Ce qui, par contre, n'est pas toujours facile, c'est de démontrer qu'une application de $\underline{\underline{P}}(E)$ dans $\Phi(F)$ est effectivement un noyau-calibre. Voyons quelques exemples.

EXEMPLES. a) Reprenons l'exemple a) de noyau capacitaire. On a posé $F = \underline{\underline{M}}^+(E)$ et on considére le noyau capacitaire $(m,X) \to m^*(X)$. Soit A' une partie analytique de F et posons $J(X) = \sup_{m\in A'} m^*(X)$: la fonction J ainsi définie est un calibre sur E. Il se trouve que, souvent, une classe $\underline{\underline{N}}$ d'ensembles "négligeables" (i.e. $\underline{\underline{N}}$ est héréditaire et stable pour les réunions dénombrables) est la classe des ensembles de calibre nul pour un calibre de ce type.

b) Voici un exemple d'une telle classe $\underline{\underline{N}}$. Supposons E non dénombrable, et prenons pour $\underline{\underline{N}}$ la classe des parties (finies ou) dénombrables de E. On peut alors montrer (cf exemple 2) après la définition 5 de (°)) que la fonction J sur $\underline{\underline{P}}(E)$ définie par $J(X) = 0$ ou 1 suivant que X est dénombrable ou non, est un calibre du type précédent, l'ensemble analytique A' étant l'ensemble D des mesures diffuses sur E. Deux remarques à cette occasion : $\underline{\underline{N}}$ n'est pas la classe des ensembles de capacité nulle pour une certaine capacité (l'ensemble des compacts de capacité nulle est un $\underline{\underline{G}}_\delta$ dans $\underline{\underline{K}}(E)$ alors que l'ensemble des compacts dénombrables est coanalytique, non borélien) ; d'autre part, il n'est pas vrai, en général, que $J(X) = \sup_{m\in D} m^*(X)$ quand X n'est pas analytique : d'où le subtil distinguo dans la définition d'un noyau-calibre.

c) Tout noyau-mesure borélien V de F dans E est un noyau-calibre (cf exemple 3) après la définition 5 de (°)). On déduit alors du théorème de séparation le résultat suivant (théorème 5 de (°)) : si A est une partie analytique de E telle que $V(y,A) = 0$ pour tout $y \in F$, alors il existe un borélien B contenant A tel que $V(y,B) = 0$ pour tout $y \in F$.

d) Un dernier exemple, pour initiés. Prenons pour E un compact de $\mathbb{R}^n$ (pour simplifier). Soit d'autre part h une fonction croissante et continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ et désignons par m^h la mesure de Hausdorff associée à la fonction déterminante h. On peut montrer que m^h est un calibre (et même le sup d'une suite croissante de capacités ; cf Dellacherie (1972)), ainsi que la fonction J^h telle que $J^h(X) = 0$ ou 1 suivant que $m^h_{|X}$ est σ-finie ou non (communication personnelle de l'auteur ; la notion de calibre présentée dans Dellacherie (1972) est plus faible que celle introduite ici).

VI AUTOUR DU THEOREME DE SEPARATION

On reprend ici, essentiellement, des passages du livre rose, présentés un peu différemment. Quand on voit paraitre assez souvent des articles, de bonne facture, dans lesquels on étend assez laborieusement un théorème classique en "situation topologique" en un théorème en "situation abstraite", on se dit qu'il ne faut pas se lasser de populariser des "ficelles de métier" triviales, mais importantes...

Voici la première, qui date d'une cinquantaine d'années (du temps où Marczewski s'appelait encore Szpilrajn)

1. L'indicatrice de Marczewski

D'abord, quelques rappels de terminologie. Un espace mesurable $(\Omega,\underline{\underline{F}})$ est dit séparé si ses atomes (i.e. les classes d'équivalence pour la relation d'équivalence $\forall A\in\underline{\underline{F}}\ \ \omega\in A \Leftrightarrow w\in A$) sont réduits aux points ; il est dit séparable (ce qui n'a rien à voir avec "séparé" !) s'il existe une suite (G_n) d'éléments de $\underline{\underline{F}}$ engendrant la tribu $\underline{\underline{F}}$.

Soit $(\Omega,\underline{\underline{F}})$ un espace séparable, non séparé, et soit (G_n) une suite engendrant $\underline{\underline{F}}$. La relation d'équivalence R définissant les atomes étant équivalente à la relation $\forall n\ \omega\varepsilon G_n \Leftrightarrow w\varepsilon G_n$, les atomes de $\underline{\underline{F}}$ appartiennent alors à la tribu $\underline{\underline{F}}$. Désignons par $\bar{\Omega}$ le quotient Ω/R, que nous munissons de la tribu constituée par les $\bar{A} = A/R$ quand A décrit $\underline{\underline{F}}$ (les éléments de $\underline{\underline{F}}$ sont saturés pour R) : un moment de réflexion convainc que, du point de vue de la structure mesurable, il n'y a pratiquement aucune différence entre $(\Omega,\underline{\underline{F}})$ et <u>son séparé</u> $(\bar{\Omega},\bar{\underline{\underline{F}}})$, qui est encore séparable. En pariculier, nous confondrons toute v.a. sur Ω (i.e. toute fonction $\underline{\underline{F}}$-mesurable) avec la v.a. qu'elle induit sur $\bar{\Omega}$.

Le théorème suivant, qui permet de ramener de nombreux problèmes sur un espace "abstrait" $(\Omega,\underline{\underline{F}})$ au cas où Ω est une partie de $[0,1]$ muni de sa tribu borélienne (même, comme nous le verrons, si $\underline{\underline{F}}$ n'est ni séparée, ni séparable), devrait figurer depuis longtemps dans tout "bon" livre de théorie de la mesure.

THEOREME.- <u>Soit</u> $(\Omega,\underline{\underline{F}})$ <u>un espace mesurable séparable</u>, <u>et soit</u> (G_n) <u>une suite engendrant</u> $\underline{\underline{F}}$. <u>Posons</u>, <u>pour tout</u> $\omega\varepsilon\Omega$,

$$\Psi(\omega) = \sum 2.3^{-n}\, 1_{G_n}(\omega)$$

<u>La fonction</u> Ψ <u>ainsi définie de</u> Ω <u>dans</u> $[0,1]$ (<u>et même dans l'ensemble triadique de Cantor</u>), <u>appelée</u> indicatrice de Marczewski <u>de</u> (G_n), <u>a les propriétés suivantes</u> : <u>si</u> $X = \Psi(\Omega)$, <u>de tribu borélienne</u> $\underline{\underline{B}}(X)$, <u>on a</u>

1) <u>pour tout</u> $B\varepsilon\underline{\underline{B}}(X)$, $\Psi^{-1}(B)$ <u>appartient à</u> $\underline{\underline{F}}$;
2) <u>pour tout</u> $x\varepsilon X$, $\Psi^{-1}(\{x\})$ <u>est un atome de</u> $\underline{\underline{F}}$;
3) <u>pour tout</u> $A\varepsilon\underline{\underline{F}}$, $\Psi(A)$ <u>appartient</u> à $\underline{\underline{B}}(X)$.

<u>Autrement dit</u>, Ψ <u>est un isomorphisme</u> (<u>d'espaces mesurables</u>) <u>de</u> $(\bar{\Omega},\bar{\underline{\underline{F}}})$ <u>sur</u> $(X,\underline{\underline{B}}(X))$.

<u>D/</u> Il est clair que Ψ est une bijection mesurable de $\bar{\Omega}$ sur X. Pour démontrer 3), il suffit de prouver que la tribu engendrée par Ψ, qui est une sous-tribu de $\underline{\underline{F}}$, est en fait égale à $\underline{\underline{F}}$. Et cela résulte du fait que, pour tout n, le générateur G_n est égal à $\Psi^{-1}(B_n)$, où B_n est l'ensemble des $x\varepsilon[0,1]$ dont le n-ième terme du développement en base 3 est un 2.

2. <u>Espaces de Blackwell</u>

Voici une définition "abstraite", très utile en probabilités

DEFINITION.- <u>Un espace mesurable séparable</u> $(\Omega,\underline{\underline{F}})$ <u>est dit</u> de Blackwell <u>si</u>, <u>pour toute v.a.</u> f <u>sur</u> Ω, $f(\Omega)$ <u>est une partie analytique de</u> $\mathbb{R}$.

L'indicatrice de Marczewski permet de ramener immédiatement ce type d'espace mesurable abstrait à un type d'espace mesurable topologique familier : $(\Omega,\underline{\underline{F}})$, séparable, est de Blackwell ssi $(\bar{\Omega},\bar{\underline{\underline{F}}})$ est isomorphe à un espace $(X,\underline{\underline{B}}(X))$, <u>où</u> X <u>est une partie analytique de</u> $[0,1]$. La condition suffisante résulte du théorème suivant :

THEOREME.- Soit Y une partie analytique d'un espace métrisable compact E et soit f une v.a. sur $(Y,\underline{\underline{B}}(Y))$. Alors, il existe une fonction borélienne f° sur E telle que $f = f°_{|Y}$, et f(A) est une partie analytique de $\mathbb{R}$ pour tout $A \in \underline{\underline{B}}(Y)$.

D/ Pour l'existence de f°, seule l'égalité $\underline{\underline{B}}(Y) = \underline{\underline{B}}(E)_{|Y}$ intervient : on construit aisément f° en approchant f par des fonctions étagées (c'est aussi un cas particulier d'un théorème bien connu de Doob : comme $\underline{\underline{B}}(Y)$ est la tribu engendrée par l'injection de Y dans $(E,\underline{\underline{B}}(E))$, toute v.a. sur $(Y,\underline{\underline{B}}(Y))$ se "factorise" en passant par E). D'autre part, $A\in\underline{\underline{B}}(Y)$ est analytique dans E, puisque Y est analytique, et donc $f(A) = f°(A)$ est analytique dans $\mathbb{R}$.

Du théorème de séparation résulte le théorème de Blackwell, qui fournit un outil précieux aux probabilistes :

THEOREME.- Soit $(\Omega,\underline{\underline{F}})$ un espace de Blackwell, et soit $\underline{\underline{G}}$ une sous-tribu séparable de $\underline{\underline{F}}$. Pour qu'une v.a. f soit $\underline{\underline{G}}$-mesurable, il faut et il suffit que f soit constante sur chaque atome de $\underline{\underline{G}}$.

D/ La condition nécessaire est triviale. Pour démontrer la suffisance, il suffit de montrer que la tribu engendrée par f est contenue dans $\underline{\underline{G}}$, et donc de considérer le cas où f est l'indicatrice de $A \in \underline{\underline{F}}$. Désignons par Ψ une indicatrice de Marczewski pour $\underline{\underline{G}}$. Comme A est,par hypothèse, saturé pour la relation d'équivalence définissant les atomes de $\underline{\underline{G}}$, $\Psi(A)$ et $\Psi(A^c)$ sont des parties disjointes de [0,1], et analytiques puisque Ψ est un isomorphisme de $(\bar{\Omega},\bar{\underline{\underline{G}}})$ sur $(\Psi(\Omega),\underline{\underline{B}}(\Psi(\Omega))$. Séparons $\Psi(A)$ et $\Psi(A^c)$ par des boréliens disjoints B et B' de [0,1] : alors $\Psi^{-1}(B)$ et $\Psi^{-1}(B')$ sont des éléments disjoints de $\underline{\underline{G}}$, séparant A et A^c. On a donc, obligatoirement, $A = \Psi^{-1}(B)$ et $A' = \Psi^{-1}(B')$.

COROLLAIRE.- Soient $(\Omega,\underline{\underline{F}})$ et $(W,\underline{\underline{G}})$ deux espaces mesurables séparables et séparés. Si $(\Omega,\underline{\underline{F}})$ est un espace de Blackwell, et si f est une bijection mesurable de Ω sur W, alors f est un isomorphisme de $(\Omega,\underline{\underline{F}})$ sur $(W,\underline{\underline{G}})$.

D/ La tribu $f^{-1}(\underline{\underline{G}})$ est une sous-tribu séparable de $\underline{\underline{F}}$, ayant les mêmes atomes que $\underline{\underline{F}}$ (en fait, les points de Ω). En appliquant le théorème aux indicatrices des éléments de $\underline{\underline{F}}$, on obtient $\underline{\underline{F}} = f^{-1}(\underline{\underline{G}})$: il est alors clair que f est un isomorphisme.

3. Le théorème de Souslin-Lusin

Nous démontrons ici, élémentairement à partir du corollaire précédent, une version abstraite du célèbre théorème sur les images injectives des boréliens (théorème attribué parfois, érronément, à Kuratowski : voir à ce sujet ses notes p 396 et 398 de l'édition de 1958 du premier volume de son traité de topologie).

THEOREME.- Soit $(\Omega,\underline{\underline{F}})$ un espace mesurable isomorphe à un espace $(X,\underline{\underline{B}}(X))$, où X est un borélien d'un espace métrisable compact E. Soient d'autre part $(W,\underline{\underline{G}})$ un espace mesurable, séparable et séparé, et f une application mesurable de Ω dans X. Si f est injective, alors $f(A)$ est un élément de $\underline{\underline{G}}$ pour tout $A \in \underline{\underline{F}}$.

D/ Notons d'abord que $(\Omega,\underline{\underline{F}})$ est un espace de Blackwell séparé, d'un type particulier (X est borélien, et non seulement analytique) ; par ailleurs, quitte à plonger l'espace métrisable compact E dans $[0,1]^{\mathbb{N}}$, on peut supposer que $E=[0,1]^{\mathbb{N}}$. Ceci dit, grâce à l'indicatrice de Marczewski, on peut supposer que W est une partie de $[0,1]$ et que $\underline{\underline{G}}$ est égale à $\underline{\underline{B}}(W)$. Posons $Y=f(\Omega)$: comme $(\Omega,\underline{\underline{F}})$ est un espace de Blackwell, Y est une partie analytique de $[0,1]$, et il résulte du corollaire précédent que f est un isomorphisme de $(\Omega,\underline{\underline{F}})$ sur $(Y,\underline{\underline{B}}(Y))$. Comme Y est une partie de W, il nous suffit, pour conclure, de montrer que Y est une partie borélienne de $[0,1]$. Or, soit f° une fonction borélienne de $[0,1]^{\mathbb{N}}$ dans $[0,1]$ telle que $f=f^\circ_{|\Omega}$, et soit g° une application borélienne de $[0,1]$ dans $[0,1]^{\mathbb{N}}$ telle que $f^{-1}=g^\circ_{|Y}$. Posons $\Omega^\circ=\{x\in[0,1]^{\mathbb{N}} : g^\circ(f^\circ(x))=x\}$ et $Y^\circ=\{y\in[0,1] : f^\circ(g^\circ(y))=y\}$: Ω° est un borélien de $[0,1]^{\mathbb{N}}$ contenant Ω, et Y° un borélien de $[0,1]$ contenant Y. Maintenant, $(\Omega^\circ,\underline{\underline{B}}(\Omega^\circ))$ et $(Y^\circ,\underline{\underline{B}}(Y^\circ))$ sont isomorphes, $f^\circ_{|\Omega^\circ}$ et $g^\circ_{|Y^\circ}$ formant un couple d'isomorphismes réciproques ; comme Ω est un borélien de $[0,1]^{\mathbb{N}}$, et donc de Ω°, on en déduit que $Y=f^\circ(\Omega)$ est un borélien de Y°, et finalement de $[0,1]$.

4. Situation abstraite et situation topologique (pour initiés)

Nous avons vu que l'indicatrice de Marczewski permet, pratiquement, de considérer que tout espace mesurable séparable $(\Omega,\underline{\underline{F}})$ est de la forme $(X,\underline{\underline{B}}(X))$, où X est un espace métrisable séparable (que l'on peut supposer plongé dans $[0,1]$, et même dans l'espace de Cantor). Nous voulons persuader ici le lecteur que l'on a encore mieux : pour tout ce qui touche à la théorie abstraite des ensembles analytiques, la situation "Soit $(X,\underline{\underline{X}})$ un espace pavé tel que le complémentaire de tout élément de $\underline{\underline{X}}$ soit $\underline{\underline{X}}$-analytique..." se ramène pratiquement à celle-ci : "Soit X un espace métrisable séparable, muni du pavage $\underline{\underline{B}}(X)$ de ses parties boréliennes" ; du moins, je ne connais pas une seule exception à ce principe "philosophique". Noter que nous n'énoncerons pas, à ce sujet, de théorème analogue à celui de Marczewski : il s'agit, pour nous, d'un principe heuristique, que nous développerons et illustrerons ci-dessous. Mais, il est bien possible que se cache là-dessous un "vrai" théorème, de nature logique, et, plus précisément, ayant à voir avec la théorie des modèles.

Un peu de terminologie pour commencer. Soit $(X,\mathcal{X})$ un espace pavé (au sens du §II de l'appendice). Une partie de X est dite *$\mathcal{X}$-coanalytique* si son complémentaire est $\mathcal{X}$-analytique, et *$\mathcal{X}$-bianalytique* si elle est à la fois $\mathcal{X}$-analytique et $\mathcal{X}$-coanalytique ; les parties $\mathcal{X}$-bianalytiques forment une tribu, notée $\mathcal{B}a[(X,\mathcal{X})]$, qui contient $\mathcal{X}$ ssi tout élément de $\mathcal{X}$ est $\mathcal{X}$-coanalytique. Nous omettrons bien entendu le préfixe $\mathcal{X}$- s'il n'y a pas de confusion possible. En particulier, tout espace métrisable séparable X sera implicitement muni du pavage $\mathcal{B}(X)$: une partie A de X est alors dite analytique si elle est $\mathcal{B}(X)$-analytique (attention ! A peut ne pas être analytique au sens "absolu" du §III de l'appendice). Notez au passage que, si $(X,\mathcal{X})$ est un espace pavé semi-compact, ou si $\mathcal{X}$ est une tribu et $(X,\mathcal{X})$ un espace de Blackwell, alors, à cause du théorème de séparation, toute partie bianalytique appartient au stabilisé de $\mathcal{X}$ pour les réunions et intersections dénombrables (et donc à $\mathcal{X}$ si $\mathcal{X}$ est une tribu). Mais, en général, pour X métrisable séparable, la tribu $\mathcal{B}a(X)$ est strictement plus grande que la tribu $\mathcal{B}(X)$: il existe des exemples classiques avec X partie coanalytique de $[0,1]$.

Nous continuons par un exemple tournant autour des premier et deuxième théorèmes de séparation. Nous écrivons d'abord huit énoncés, classiques, puis discutons leurs interrelations. Dans leur indexation, la lettre $\mathcal{A}$ rappelle "abstrait", la lettre $\mathcal{M}$ rappelle "métrisable séparable", et la lettre $\mathcal{K}$ rappelle "métrisable compact" .

($\mathcal{A}$) (*Théorème de réduction*). Soit $(X,\mathcal{X})$ un espace pavé tel que tout élément de $\mathcal{X}$ soit coanalytique. Si (C_n) est une suite de parties coanalytiques, il existe une suite (D_n) de parties coanalytiques, deux à deux disjointes, telles que $D_n \subseteq C_n$ et $\bigcup_n D_n = \bigcup_n C_n$.

($\bar{\mathcal{A}}$) (*Deuxième théorème de séparation*). Sous la même hypothèse, si (A_n) est une suite de parties analytiques telle que $\bigcap_n A_n = \emptyset$, alors il existe une suite (B_n) de parties bianalytiques telles que $A_n \subseteq B_n$ et $\bigcap_n B_n = \emptyset$.

($\mathcal{M}$) Même énoncé que ($\mathcal{A}$), avec X métrisable séparable et $\mathcal{X} = \mathcal{B}(X)$.

($\bar{\mathcal{M}}$) Même énoncé que ($\bar{\mathcal{A}}$), avec X métrisable séparable et $\mathcal{X} = \mathcal{B}(X)$.

($\mathcal{K}$) Même énoncé que ($\mathcal{M}$), avec, cette fois, X métrisable compact.

($\bar{\mathcal{K}}$) Même énoncé que ($\bar{\mathcal{M}}$), avec, cette fois, X métrisable compact (auquel cas, les parties bianalytiques sont boréliennes : c'est le premier théorème de séparation, celui que nous avons démontré tout à la fin du §IV du corps de l'exposé, à la remarque a)).

On établit aisément les faits suivants (nous le ferons pour ceux qui ne sont pas immédiats) :

a) $(\overline{\underline{\underline{A}}})$ (resp $(\overline{\underline{\underline{M}}})$ est une particularisation de $(\underline{\underline{A}})$ (resp $(\underline{\underline{M}})$), et lui est en fait équivalent ;

b) $(\underline{\underline{M}})$ (ou $(\overline{\underline{\underline{M}}})$) est une particularisation de $(\underline{\underline{A}})$ (ou $(\overline{\underline{\underline{A}}})$), et lui est en fait équivalent ;

c) $(\underline{\underline{K}})$ est une particularisation de $(\underline{\underline{M}})$, et lui est en fait équivalent ;

d) $(\overline{\underline{\underline{K}}})$ est une particularisation de $(\underline{\underline{K}})$, MAIS (i) il semble exclu que l'on puisse ramener "élémentairement" $(\underline{\underline{K}})$ à $(\overline{\underline{\underline{K}}})$, (ii) il ne semble pas non plus, dans l'autre sens, que l'identité ici des bianalytiques et des boréliens résulte "élémentairement" de l'énoncé de $(\underline{\underline{K}})$ (quoique elle résulte aisément du "halo" de la démonstration classique de $(\underline{\underline{K}})$).

Nous commenterons a),b),c) et d) plus loin, et démontrons maintenant les implications "élémentaires" $(\underline{\underline{K}}) \Rightarrow (\overline{\underline{\underline{M}}}) \Rightarrow (\underline{\underline{M}}) \Rightarrow (\underline{\underline{A}})$, les autres étant alors triviales.

$(\underline{\underline{K}}) \Rightarrow (\overline{\underline{\underline{M}}})$: Soit (A_n) une suite de parties analytiques d'un espace métrisable séparable X, telle que $\bigcap_n A_n = \emptyset$. Plongeons X dans un espace métrisable compact E (par exemple, $E = [0,1]^{\mathbb{N}}$) : comme $\underline{\underline{B}}(X) = \underline{\underline{B}}(E)_{|X}$, il est facile de voir que toute partie analytique de X est la trace sur X d'une partie analytique de E. Désignons alors, pour tout n, par A'_n une partie analytique de E telle que $A_n = X \cap A'_n$, et par C'_n le complémentaire de A'_n dans E. D'après $(\underline{\underline{K}})$, il existe une suite (D'_n) de parties coanalytiques disjointes de E telle que $D'_n \subseteq C'_n$ et $\bigcup_n D'_n = \bigcup_n C'_n$. Posons alors, pour tout n, $B_n = X - D'_n$: B_n est analytique dans X, contient A_n, et on a $\bigcap_n B_n = \emptyset$. Par ailleurs, les ensembles $X - B_n$ forment une partition dénombrable de X en parties coanalytiques de X ; la classe des parties coanalytiques étant stable pour les réunions dénombrables, on en déduit que les $X - B_n$ sont aussi analytiques dans X : d'où, finalement, les B_n sont bianalytiques dans X.

$(\overline{\underline{\underline{M}}}) \Rightarrow (\underline{\underline{M}})$: Soit (C_n) une suite de parties coanalytiques de l'espace métrisable séparable X et posons $Y = \bigcup_n C_n$. Les ensembles $A_n = (X - C_n) \cap Y$ forment une suite de parties analytiques de l'espace métrisable séparable Y telle que $\bigcap_n A_n = \emptyset$. D'après $(\overline{\underline{\underline{M}}})$, il existe une suite (B_n) de parties bianalytiques de Y telle que $A_n \subseteq B_n$ et $\bigcap_n B_n = \emptyset$. Comme Y est une partie coanalytique de X, les ensembles B_n et $(Y - B_n)$ sont coanalytiques dans X. Alors, les ensembles $D_1 = (Y - B_1)$, $D_2 = (Y - B_2) \cap B_1, \ldots$, $D_n = (Y - B_n) \cap (\bigcup_{m<n} B_m), \ldots$ forment une suite de parties coanalytiques disjointes de X telle que $D_n \subseteq C_n$ et $\bigcup_n D_n = \bigcup_n C_n$.

$(\underline{\underline{M}}) \Rightarrow (\underline{\underline{A}})$: Soit (C_n) une suite de parties $\underline{\underline{X}}$-coanalytiques de l'espace pavé $(X, \underline{\underline{X}})$ tel que les éléments de $\underline{\underline{X}}$ soient $\underline{\underline{X}}$-coanalytiques. D'abord, quitte à remplacer $\underline{\underline{X}}$ par $\underline{\underline{Ba}}[(X, \underline{\underline{X}})]$ – ce qui ne change pas la classe des parties analytiques -, on peut supposer que $\underline{\underline{X}}$ est une tribu. Ensuite, si l'on définit les parties $\underline{\underline{X}}$-analytiques à l'aide des schémas de projection, ou des schémas de Souslin, on voit immédiatement qu'il existe un sous-pavage $\underline{\underline{X}}'$ de $\underline{\underline{X}}$, engendré par un sous-ensemble <u>dénombrable</u> de $\underline{\underline{X}}$, tel que les C_n soient encore $\underline{\underline{X}}'$-coanalytiques : quitte à remplacer $\underline{\underline{X}}$ par la tribu engendrée par $\underline{\underline{X}}'$, on peut donc supposer que $\underline{\underline{X}}$ est une tribu séparable. Mais alors, l'indicatrice de Marczewski permet de se ramener au cas où X est un espace métrisable séparable et $\underline{\underline{X}}$ sa tribu borélienne.

Nous commentons maintenant a),b),c) et d) sous la forme d'un énoncé de principes heuristiques, que nous illustrerons encore par deux exemples. On entend ci-après, par résultat, un théorème portant sur les parties analytiques de $(X,\underline{\underline{X}})$ ou de $(X\times E,\underline{\underline{X}}\times\underline{\underline{K}}(E))$, où $\underline{\underline{X}}$ est contenu dans $\underline{\underline{Ba}}[(X,\underline{\underline{X}})]$, où E est un espace métrisable compact et où $\underline{\underline{X}}\times\underline{\underline{K}}(E)$ est le pavage engendré par les rectangles $M\times N$ avec $M\in\underline{\underline{X}}$, $N\in\underline{\underline{K}}(E)$. Noter que la projection π de $X\times E$ sur X est alors un noyau capacitaire.

<u>Principe</u> (A-M) : Tout résultat $(\underline{\underline{A}})$ valant pour $(X,\underline{\underline{X}})$ équivaut à sa restriction $(\underline{\underline{M}})$ au cas où X est métrisable séparable (et $\underline{\underline{X}}=\underline{\underline{B}}(X)$).

<u>Principe</u> (M-K) : Pour tout résultat $(\overline{\underline{\underline{M}}})$ valant pour X métrisable séparable, il existe un résultat $(\underline{\underline{M}})$ plus fort, équivalent à sa restriction $(\underline{\underline{K}})$ au cas où X est métrisable compact.

<u>Principe</u> $(\overline{K}-\overline{M})$: Tout résultat $(\overline{\underline{\underline{K}}})$ valant pour X métrisable compact est encore vrai pour X seulement métrisable séparable, à condition de remplacer "borélien" par "bianalytique" (extension $(\overline{\underline{\underline{M}}})$ de $(\overline{\underline{\underline{K}}})$). Mais, assez souvent, la démonstration de $(\overline{\underline{\underline{M}}})$ est plus complexe que celle de $(\overline{\underline{\underline{K}}})$, et fait intervenir la théorie de l'indice (qui ne semble pas avoir de rapports étroits avec la théorie des capacités).

Nous tempérons le "Mais" du dernier principe par un nouveau principe, bien commode pour les probabilistes, qui courcircuite tous les principes précédents (encore que le principe (A-M) soit en général utilisé comme intermédiaire dans son application)

<u>Principe</u> (A-K) : Tout résultat $(\underline{\underline{A}})$ valant lorsque $\underline{\underline{X}}$ est une tribu complète pour une probabilité se déduit assez facilement de sa restriction au cas où X est métrisable compact et $\underline{\underline{X}}$ une complétée de $\underline{\underline{B}}(X)$, et trivialement si $\underline{\underline{X}}$ est la complétée d'une tribu de Blackwell.

Enfin, à cet arsenal de principes, s'ajoute le théorème suivant (que j'attribue à Kuratowski) : <u>tous les espaces mesurables de la forme</u> $(X,\underline{\underline{B}}(X))$, <u>où</u> X <u>est une partie borélienne non dénombrable d'un espace métrisable compact</u>, <u>sont</u> isomorphes. Si bien que, très souvent, on peut supposer que X , ou E , ou les deux, sont égaux à [0,1] , ou à tout autre espace remarquable, dont on pourra profiter de la structure plus riche (par exemple, de la relation d'ordre).

Venons en aux deux exemples promis. Nous commençons par le plus sophistiqué des deux, qui tourne autour du théorème de Souslin-Lusin (énoncé ($\overline{\underline{\underline{K}}}$)) et du théorème sur l'ensemble d'unicité de Lusin (un peu plus faible que l'énoncé ($\overline{\underline{\underline{M}}}$)). Les hypothèses et notations sont celles adoptées pour les principes ; en particulier, X est métrisable compact dans un énoncé de type K , est métrisable séparable dans un énoncé de type M.

($\overline{\underline{\underline{K}}}$) Soit G un borélien de XxE tel que, pour tout $x\varepsilon X$, la coupe G(x) comporte au plus un point. Alors π(G) est borélien dans X .

($\underline{\underline{K}}$) Soit A une partie analytique de XxE . Il existe une partie analytique H de XxE telle que H(x) soit fermée, non vide, pour tout $x\varepsilon X$, et que H(x) soit l'adhérence de A(x) pour tout $x \varepsilon \pi(A)$.

($\overline{\underline{\underline{M}}}$) Même énoncé que ($\overline{\underline{\underline{K}}}$), avec "bianalytique" à la place de "borélien".

($\underline{\underline{M}}$) Même énoncé que ($\underline{\underline{K}}$).

($\underline{\underline{A}}$) Même énoncé que ($\underline{\underline{M}}$), mais pour un espace pavé (X,$\underline{\underline{X}}$).

L'énoncé ($\overline{\underline{\underline{K}}}$) est un cas particulier du théorème de Souslin-Lusin (considérer la restriction de π à (G,$\underline{\underline{B}}$(G)), et lui est (trivialement) équivalent. L'énoncé ($\overline{\underline{\underline{M}}}$), en conservant "G borélien" (mais avec la conclusion "π(G) bianalytique") est (élémentairement) équivalent au théorème sur l'ensemble d'unicité de Lusin qui dit ceci : si B est un borélien de XxE , avec X métrisable compact, alors l'ensemble des $x\varepsilon X$ tels que B(x) comporte exactement un point est coanalytique dans X . Pour plus de détails, et pour la démonstration de ($\underline{\underline{K}}$), je renvoie à mon exposé "Ensembles analytiques : théorèmes de séparation et applications" du volume IX du séminaire. Nous nous contentons ici de prouver les implications élémentaires, mais non triviales, ($\underline{\underline{K}}$) $\Rightarrow$ ($\underline{\underline{M}}$) $\Rightarrow$ ($\underline{\underline{A}}$) et ($\underline{\underline{M}}$) $\Rightarrow$ ($\overline{\underline{\underline{M}}}$)

($\underline{\underline{K}}$) $\Rightarrow$ ($\underline{\underline{M}}$) : Soit A une partie analytique de XxE , où X est métrisable séparable. Plongeons X dans un espace métrisable compact F et soit A' une partie analytique de FxE telle que $A = A' \cap (XxE)$. Soit alors H' une partie analytique de FxE , à coupes fermées, telle que $\pi(H') = F$ et que $H'(x) = \overline{A}'(x)$ pour tout $x \varepsilon \pi(A')$: il ne reste plus qu'à poser , pour conclure, $H = H' \cap (XxE)$.

($\underline{\underline{M}}$) $\Rightarrow$ ($\underline{\underline{A}}$) : La démonstration est analogue à celle déjà vue. Soit A une partie $\underline{\underline{X}}\otimes\underline{\underline{K}}$(E)-analytique de XxE . D'abord, quitte à remplacer $\underline{\underline{X}}$ par $\underline{\underline{Ba}}$[(X,$\underline{\underline{X}}$)] - ce qui ne change pas les parties analytiques de X , ni celles de XxE - on peut supposer que $\underline{\underline{X}}$ est une tribu. Ensuite, on voit aisément, en définissant A par un schéma de projection ou un schéma de

Souslin, que A est encore $\underline{\underline{Y}}\times\underline{\underline{K}}(E)$-analytique, où $\underline{\underline{Y}}$ est une sous-tribu séparable de $\underline{\underline{X}}$. Et on conclut grâce à l'indicatrice de Marczewski.

$(\underline{\underline{M}}) \Rightarrow (\underline{\underline{M}})$: Soit G une partie bianalytique de XxE, où X est métrisable séparable, telle que G(x) comporte au plus un point pour tout $x \in X$. D'abord, $\pi(G)$ est une partie analytique de X puisque E est métrisable compact, et donc π un noyau capacitaire. Plongeons d'autre part X dans un espace métrisable compact F et soit A (resp C) une partie analytique (resp coanalytique) de FxE telles que $G = A \cap (X\times E) = C \cap (X\times E)$. Soit maintenant H une partie analytique de FxE, à coupes fermées, telle que $\pi(H) = F$ et que $H(x) = \overline{A}(x)$ pour tout $x \in \pi(A)$. Alors, $\pi(H-C)$ est une partie analytique de F et donc $\pi(G) = X - \pi(H-C)$ est une partie coanalytique de X. D'où $\pi(G)$ est bianalytique dans X.

Je termine par l'exemple avec lequel j'ai commencé à apprendre, il y a dix ans, la théorie des ensembles analytiques. Nous utiliserons ici le "grand" théorème de Lusin : <u>si</u> A, <u>analytique dans</u> XxE, <u>où</u> X <u>est métrisable compact, a toutes ses coupes</u> A(x) (<u>au plus</u>) <u>dénombrables, il existe une suite</u> (f_n) <u>d'applications boréliennes de</u> X <u>dans</u> E <u>telle que</u> A <u>soit contenu dans la réunion des graphes des</u> f_n.

Nous allons, pour illustrer le principe (A-K), démontrer ceci

THEOREME.- <u>Soit</u> $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ <u>un espace probabilisé complet et soit</u> A <u>une partie</u> $\underline{\underline{F}}\times\underline{\underline{K}}(E)$-<u>analytique de</u> $\Omega\times E$, <u>où</u> E <u>est métrisable compact</u>. <u>Si</u>, <u>pour presque tout</u> $\omega\in\Omega$, <u>la coupe</u> $A(\omega)$ <u>est dénombrable</u>, <u>alors il existe une suite</u> (f_n) <u>d'applications mesurables de</u> Ω <u>dans</u> E <u>telle que</u> A <u>soit contenu dans la réunion</u> G <u>des graphes des</u> f_n, <u>à un ensemble évanescent près</u> (<u>i.e.</u> $\pi(A \triangle G)$ <u>est</u> P-<u>négligeable</u>).

<u>D/</u> Supposons que $\underline{\underline{F}}$ soit la complétée d'une tribu $\underline{\underline{F}}^\circ$(sans exclure le cas où $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}^\circ$). Alors, si l'on définit A par schéma de projection ou schéma de Souslin, on voit immédiatement que A est égal, à un ensemble évanescent près, à une partie $\underline{\underline{F}}^\circ\times\underline{\underline{K}}(E)$-analytique, dont toutes les coupes sont dénombrables. On peut donc supposer que A est $\underline{\underline{F}}^\circ\times\underline{\underline{K}}(E)$-analytique, et a toutes ses coupes dénombrables. Ensuite, grâce au principe (A-M), on peut supposer que Ω est un espace métrisable séparable, que A est $\underline{\underline{B}}(\Omega)\times\underline{\underline{K}}(E)$-analytique, que $\underline{\underline{F}}$ est la complétée de $\underline{\underline{B}}(\Omega)$ et que $\underline{\underline{F}}^\circ$ est égale à $\underline{\underline{B}}(\Omega)$ si elle est séparable. Plongeons maintenant Ω dans un espace métrisable compact F et désignons par $\overline{P}$ l'image de P par l'injection de Ω dans F. Soit d'autre part A' une partie analytique de FxE telle que $A = A' \cap (\Omega\times E)$ et désignons par D l'ensemble des $x\in F$ tels que A'(x) soit dénombrable : D contient Ω. Supposons que l'on ait trouvé une partie Ω' de F, $\overline{P}$-mesurable, coincée entre Ω et D. Alors, il existe une suite (K_n) de compacts disjoints de F, contenus dans Ω',

tels que Ω' soit $\overline{P}$-p.s. égal à la réunion des K_n, et le théorème est conséquence immédiate du théorème de Lusin appliqué aux espaces $K_n \times E$ et aux ensembles $A_n = A' \cap (K_n \times E)$. Maintenant, si $\underline{\underline{F}}^o$ est une tribu de Blackwell, Ω est analytique dans F et on peut prendre $\Omega' = \Omega$. Dans le cas général, on peut prendre $\Omega' = D$ car D est une partie coanalytique de F d'après un théorème de Mazurkiewicz-Sierpinski.

REMARQUE. Il existe un dernier principe : démontrer directement un résultat où $(X,\underline{\underline{X}}) = (\Omega,\underline{\underline{F}})$, $\underline{\underline{F}}$ tribu complète pour une probabilité, est plus simple que de démontrer le résultat analogue, sans mesure, dans le cas où X est métrisable compact et $\underline{\underline{X}} = \underline{\underline{B}}(X)$. Voir par exemple la démonstration directe du théorème précédent dans le livre rose.

BIBLIOGRAPHIE

DELLACHERIE (1971) : Une démonstration du théorème de séparation des ensembles analytiques (Séminaire de Probabilités V, p 82-85 Lecture Notes Springer n°191, 1971)

(1972) : Ensembles analytiques, capacités, mesures de Hausdorff (Lecture Notes Springer n°295, 1972)

(1976a) : Sur la construction des noyaux boréliens (Séminaire de Probabilités X, p 545-577, Lecture Notes Springer n°511, 1976)

(1976b) : Compléments aux exposés sur les ensembles analytiques (Ibid, p 579-593)

JAYNE (1976) : Structure of analytic Hausdorff spaces (Mathematika 23 p 208-211, 1976)

LIAPUNOV (1939) : Séparabilité multiple pour le cas de l'opération (A) (Izvestia Akad Nauk SSSR 1939, p 539-552)

(1946) : Séparabilité multiple pour les cas des opérations δs (C.R. Acad Sc URSS 53, p 395-398, 1946)

MOKOBODZKI (1966) : Capacités fonctionnelles (Séminaire Choquet, Inst Poincaré, Paris 6e année, 6 pages, 1966/67)

(1976) : Démonstration élémentaire d'un théorème de Novikov (Séminaire de Probabilités X, p 539-543, Lecture Notes Springer n°511, 1976)

SAINT-PIERRE (1977) : Séparation simultanée d'un ensemble analytique de suites d'ensembles $\underline{\underline{F}}$-sousliniens (C.R. Acad Sc Paris, t 285, série A, p 933-936, 1977)

SAINT-RAYMOND (1976) : Boréliens à coupes $\underline{\underline{K}}_\sigma$ (Bull Sc Math France, t 104, p 389-400, 1976)

SION (1963) : On capacitability and measurability (Ann Inst Fourier, t 13, p 88-99, 1963)