Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Constantin Nanopoulos
Photis Nobelis

Régularité et propriétés limites des fonctions aléatoires

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 12 (1978), p. 567-690
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1978__12__567_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1977/78

REGULARITE ET PROPRIETES LIMITES DES FONCTIONS ALEATOIRES

par Constantin NANOPOULOS et Photis NOBELIS

Une grande partie de la Théorie moderne du Calcul des Probabilités est consacrée à l'analyse aléatoire. Très rapidement avec le développement des outils appropriés, les chercheurs se sont intéressés à la régularité des trajectoires des fonctions aléatoires et plus particulièrement à la majoration et la continuité de celles-ci. Dans cette direction d'étude, le problème essentiel est de trouver des conditions suffisantes et éventuellement nécessaires pour qu'une fonction aléatoire ait presque sûrement ses trajectoires majorées ou continues. Durant ces vingt dernières années, deux familles de fonctions aléatoires ont attiré les efforts des Probabilistes : les fonctions aléatoires gaussiennes d'une part et, d'autre part, les fonctions aléatoires dont les lois ou les moments des accroissements se comportent de manière régulière.

L'étude des fonctions aléatoires gaussiennes trouve son origine dans celle du mouvement Brownien. Les premiers résultats, où l'utilisation du caractère gaussien est apparue, concernent les fonctions aléatoires définies sur $[0,1]^n$ et sont basés sur des découpages de plus en plus fins de cet ensemble (X. Fernique [8]). La méthode de l'ε - entropie, introduite par R.M. Dudley ([4]), a permis de généraliser les résultats précédents en faisant intervenir la structure topologique induite par la fonction aléatoire gaussienne sur l'ensemble où elle est définie. Par la suite, A. Garsia, E. Rodemich et H. Rumsey ([14]) ont obtenu des conditions suffisantes de continuité basées sur la convergence uniforme d'un développement orthogonal des fonctions aléatoires gaussiennes définies sur $[0,1]$. C. Preston ([25]) a généralisé ces résultats. En 1975 X. Fernique ([11]) a introduit dans l'étude des fonctions aléatoires gaussiennes, la méthode des mesures majorantes dont les outils essentiels sont les fonctions de Young et les espaces d'Orlicz. Nous reviendrons par la suite sur cette méthode qui est l'objet essentiel de notre travail.

L'étude des fonctions aléatoires à accroissements réguliers a débuté par les travaux de A. Kolmogorov et par ceux de M. Loève ([22]). Par la suite, plusieurs auteurs ont travaillé dans cette direction. Citons par exemple J. Delporte, P. Bernard ([1]), A. Garsia et E. Rodemich ([13]), R.M. Dudley ([5]) et M.G. Hahn ([16]). Les hypothèses portent essentiellement sur la régularité des moments des accroissements. Les conditions suffisantes sont basées sur des approximations des accroissements sur des intervalles de plus en plus fins.

Dans notre travail, nous montrons que la méthode des mesures majorantes est générale et permet de mettre en évidence les similitudes qui existent dans les différentes méthodes d'étude des trajectoires de fonctions aléatoires. Elle est basée sur une représentation par une intégrale dans des espaces d'Orlicz, d'une approximation de la fonction aléatoire étudiée.

Dans la première partie, nous exposons brièvement les notions et les résultats essentiels sur les fonctions de Young et les espaces d'Orlicz que nous utilisons par la suite.

Le premier chapitre est consacré à la présentation de la méthode des mesures majorantes dans toute sa généralité. Nous l'appliquons d'abord aux fonctions numériques pour aborder ensuite les fonctions aléatoires. Sous certaines hypothèses d'appartenance à un espace d'Orlicz, nous obtenons une conditions suffisante pour qu'une fonction aléatoire ait presque sûrement ses trajectoires majorées, à savoir l'existence d'une mesure de probabilité μ , telle que :

$$\sup_{t \in T} \int_{o}^{\delta(T)} \Phi^{-1}\left(\frac{1}{\mu^{2}(B_{\delta}(t,u))}\right) du < \infty ,$$

où Φ est une fonction de Young et δ un écart, liés tous deux à la fonction aléatoire étudiée. Pour la continuité des trajectoires, la condition suffisante que nous obtenons s'écrit :

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sup_{t\in T} \int_0^{\varepsilon} \Phi^{-1}\left(\frac{1}{\mu^2(B_\delta(t,u))}\right) du = 0 .$$

Toutes les hypothèses que nous faisons, sont naturelles. La mesure μ est une mesure majorante. La suite de notre travail montre l'efficacité de cette méthode.

Les deux parties suivantes sont des applications directes. Dans un premier temps, nous étudions la famille de fonctions aléatoires associées à des fonctions de Young de type exponentiel. Nous obtenons des généralisations des résultats de X. Fernique ([11],[12]), de R.M. Dudley ([5]) et de N.C. Jain et M.B. Marcus ([19]). Nous montrons également que la méthode d'Orlicz, introduite par X. Fernique ([10]), qui est plus générale que celle des mesures majorantes, tout en reposant sur les mêmes principes, peut être étendue à cette famille de fonctions aléatoires. Dans un second temps, nous montrons que la méthode des mesures majorantes nous permet de retrouver, dans une de ces applications, des conditions suffisantes de continuité pour des fonctions aléatoires dont le moment d'ordre r des accroissements est régulier, conditions qui avaient été établies par des démarches totalement différentes.

La quatrième partie est consacrée à la nécessité des conditions. Nous montrons, avec une démarche analogue à celle du cas gaussien (X. Fernique [12]), que pour des familles particulières de fonctions aléatoires, les conditions suffisantes de majoration obtenues par la méthode d'Orlicz, sont également nécessaires.

Enfin, notre travail se termine par l'application de la méthode des mesures majorantes au Théorème Central Limite. La majoration uniforme des moments des accroissements d'une fonction aléatoire que la méthode nous a fournie dans le cadre de la continuité, nous permet d'obtenir deux résultats originaux : condition suffisante pour qu'une fonction aléatoire, associée à une fonction de Young de type exponentiel ou de type puissance, satisfasse à la propriété du Théorème Central Limite. Dans le deuxième cas, nous obtenons ainsi une extension d'un résultat de M.G. Hahn ([16]). -

TABLE DES MATIERES

O. FONCTIONS DE YOUNG ET ESPACES D'ORLICZ.

Cette partie est consacrée à la présentation de l'outil mathématique que nous utiliserons tout au long de notre travail, à savoir les espaces d'Orlicz associés aux fonctions de Young et à leurs conjuguées. La plupart des résultats que nous énonçons se trouvent dans l'ouvrage de M.A. Krasnoselsky et Y.B. Rutitsky ([21]) et dans l'appendice de l'ouvrage de J. Neveu ([23]).

O.1. Fonctions de Young.

Une fonction Φ définie sur $\mathbb{R}$, est appelée fonction de Young si elle est continue, paire, convexe et vérifie :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\Phi(x)}{x} = 0 \ , \ \lim_{x\to\infty} \frac{\Phi(x)}{x} = \infty \ .$$

Du fait de ses propriétés de dérivation, une fonction de Young Φ peut s'écrire :

$$\Phi(x) = \int_0^{|x|} \varphi(t)dt \ ,$$

où $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est continue à droite, croissante, s'annule à l'origine et tend vers l'infini avec t .

A chaque fonction de Young Φ on peut associer une autre fonction de Young Ψ , appelée conjuguée de Φ et définie par

$$\Psi(y) = \sup_{x\geq 0} (x|y| - \Phi(x)) \ .$$

Les deux exemples principaux de fonctions de Young que nous utiliserons dans notre travail sont les suivants :

i) On pose, pour tout $\alpha > 0$:

$$\Phi_\alpha(x) = \int_0^{|x|} (e^{t^\alpha} - 1)dt \ ;$$

c'est une fonction de Young ; on montre que sa conjuguée vérifie

$$\Psi_\alpha(x) = \int_0^{|x|} (\log(1+t))^{1/\alpha} dt .$$

Pour tout $x \geq 0$, on a les évaluations suivantes :

$$\frac{x}{2}(e^{(\frac{x}{2})^\alpha} - 1) \leq \Phi_\alpha(x) \leq x(e^{x^\alpha} - 1) ,$$

et

$$\frac{\alpha}{\alpha+1} x(\log(1+x))^{1/\alpha} \leq \Psi_\alpha(x) \leq x(\log(1+x))^{1/\alpha} .$$

On sera amené à utiliser des fonctions de Young de type exponentiel ayant, à l'infini, le même comportement que les précédentes ; on pose

$$\Phi_{\alpha,1}(x) = e^{|x|^\alpha} - \sum_{n\alpha \leq 1} \frac{|x|^{n\alpha}}{n!} ,$$

pour $\alpha > 0$.

ii) Pour tout $r > 1$, la fonction

$$\Phi_r(x) = \frac{|x|^r}{r} ,$$

est une fonction de Young et sa conjuguée est du même type, à savoir $\Psi_r(x) = \Phi_{r'}(x)$ où r' est le nombre réel conjugué de r.-

Une fonction de Young Φ et sa conjuguée Ψ vérifient, pour tout $x \geq 0$ et $y \geq 0$ l'inégalité suivante, appelée inégalité de Young :

$$xy \leq \Phi(x) + \Psi(y) .$$

Dans le cas des fonctions de type exponentiel nous utiliserons une inégalité différente, mais plus efficace. Pour $\alpha > 0$ et pour tout $x \geq 0$ et $y \geq 0$, on montre que :

$$xy \le 2[y(\log(1+y))^{1/\alpha}+\Phi_\alpha(x)] \ ,$$

et

(0.1.1) $$xy \le y(2\log(1+y))^{1/\alpha}+C(\alpha)\Phi_{\alpha,1}(x) \ ,$$

où

$$C(\alpha) = 2^{[\frac{1}{\alpha}]+1}([\tfrac{1}{\alpha}]+1)! \ ,$$

avec $[t]$ désignant la partie entière de t.

On dit qu'une fonction de Young Φ vérifie la condition (Δ_2), s'il existe une constante $K>0$ et $x_o \ge 0$, tels que, pour tout $x \ge x_o$, on ait :

$$\Phi(2x) \le K\Phi(x) \ .$$

Les fonctions vérifiant cette condition sont d'un intérêt particulier. Dans ([21]) sont donnés plusieurs critères de vérification de la condition (Δ_2) par une fonction de Young ou par sa conjuguée.-

0.2. Classes et espaces d'Orlicz.

Soient (T,d) un espace métrique séparable, $\mathfrak{T}$ la tribu engendrée par les d-boules ouvertes de T et μ une mesure de probabilité sur $(T,\mathfrak{T})$. On appelle classe d'Orlicz sur T associée à la fonction de Young Φ, l'ensemble, que l'on note $L_\Phi(T,\mu)$, des fonctions f définies sur T, telles que :

$$\int_T \Phi(f(t)d\mu(t) < \infty \ .$$

Une propriété caractéristique des classes d'Orlicz est que l'espace des fonctions μ-intégrables sur T, noté $L^1(T,\mu)$, est la réunion, sur toutes les fonctions de Young Φ, de toutes les classes d'Orlicz $L_\Phi(T,\mu)$.

Certaines classes $L_\Phi(T,\mu)$ sont des sous-espaces vectoriels de R^T ; c'est le cas si et seulement si Φ vérifie la condition (Δ_2).

Si Ψ est la fonction conjuguée de Φ, on appelle espace d'Orlicz sur T associé à la fonction de Young Φ l'ensemble, que l'on note $L^{\Phi}(T,\mu)$, des fonctions f, définies sur T, telles que pour tout $g \in L_{\Psi}(T,\mu)$, on a :

$$\int_T f(t)g(t)d\mu(t) < \infty .$$

Tout espace d'Orlicz est un sous-espace vectoriel de R^T ; il contient la classe d'Orlicz correspondante et il y a égalité si et seulement si Φ vérifie la condition (Δ_2). Une autre différence est que deux fonctions de Young définissent la même classe d'Orlicz si et seulement si elles sont égales ; par contre il suffit qu'elles soient équivalentes à l'infini pour qu'elles définissent le même espace d'Orlicz.

Tout espace d'Orlicz est muni de deux normes équivalentes ; la première, appelée norme d'Orlicz, est définie par :

$$\|f\|_{\Phi,\mu} = \sup\{|\int_T f(t)g(t)d\mu(t)| : \int_T \Psi(g(t))d\mu(t) \leq 1\} ,$$

et la seconde, appelée norme de Luxemburg, est définie par

$$\|f\|_{(\Phi),\mu} = \inf\{\alpha > 0 : \int_T \Phi(\frac{f(t)}{\alpha})d\mu(t) \leq 1\} . \tag{0.2.1}$$

L'espace $L^{\Phi}(T,\mu)$ muni de l'une de ces deux normes est un espace de Banach. De la définition de la norme de Luxemburg on déduit qu'une condition nécessaire et suffisante pour que $f \in L^{\Phi}(T,\mu)$ est qu'il existe une constante $\beta > 0$ telle que :

$$\int_T \Phi(\beta f(t))d\mu(t) < \infty .$$

Les résultats précédents, appliqués aux fonctions de Young de type exponentiel, nous donnent :

$$L^{\Phi_\alpha}(T,\mu) = L^{\Phi_{\alpha,1}}(T,\mu) ,$$

et

$$\frac{1}{2e}\|f\|_{(\Phi_{\alpha,1}),\mu} \leq \|f\|_{(\Phi_\alpha),\mu} \leq C(\alpha)\|f\|_{(\Phi_{\alpha,1}),\mu} .$$

Certaines formes linéaires, définies sur $L^{\Phi}(T,\mu)$ ou sur $L^{\Psi}(T,\mu)$, peuvent être majorées à partir des normes précédentes ; en effet, pour tout élément f de $L^{\Phi}(T,\mu)$ et tout élément g de $L^{\Psi}(T,\mu)$, on a les inégalités, appelées inégalités de Hölder généralisées,

$$\left|\int f(t)g(t)d\mu(t)\right| \leq \|f\|_{\Phi,\mu}\|g\|_{(\Psi),\mu} ,$$

$$\left|\int f(t)g(t)d\mu(t)\right| \leq \|f\|_{(\Phi),\mu}\|g\|_{\Psi,\mu} .$$

Nous utiliserons souvent les normes de fonctions indicatrices. Voici quelques-unes de leurs propriétés :

pour tout élément f de $L^{\Phi}(T,\mu)$ on a :

$$A,B \in \mathfrak{T},\ A \subset B \Rightarrow \|I_A f\|_{(\Phi),\mu} \leq \|I_B f\|_{(\Phi),\mu} \leq \|f\|_{(\Phi),\mu} ,$$

pour toute constante $\beta > 0$, telle que $\Phi(\beta f)$ soit μ-intégrable, il existe un nombre réel $\eta > 0$, tel que :

$$(0.2.2) \qquad A \in \mathfrak{T},\ \mu(A) \leq \eta \Rightarrow \|I_A f\|_{(\Phi),\mu} \leq \frac{1}{\beta} ,$$

pour tout $A \in \mathfrak{T}$, tel que $\mu(A) > 0$, on a :

$$\|I_A\|_{\Phi,\mu} = \mu(A)\Psi^{-1}\left(\frac{1}{\mu(A)}\right) ,$$

et

$$\|I_A\|_{(\Phi),\mu} = \frac{1}{\Phi^{-1}\left(\frac{1}{\mu(A)}\right)} .$$

Enfin pour les fonctions de Young de type exponentiel nous avons l'évaluation suivante des normes d'Orlicz de leurs conjuguées : pour toute fonction f on a :

$$\frac{1}{2(1+3.2^{1/\alpha})}\|f\|_{\Psi_{\alpha},\mu} \leq \int_T |f|\left(\log\left(1+\frac{|f|}{\int_T |f|d\mu}\right)\right)^{1/\alpha} d\mu \leq K(\alpha)\|f\|_{\Psi_{\alpha},\mu} ,$$

avec $$K(\alpha) = \exp(1 + \frac{1}{\alpha}\log\frac{2}{\alpha e}) \ , \quad \text{et}$$

$$(0.2.3) \quad \frac{1}{(1+3C(\alpha)2^{1/\alpha})}\|f\|_{\Psi_{\alpha,1},\mu} \leq \int_T |f|\left(\log\left(1+\frac{|f|}{\int_T |f|d\mu}\right)\right)^{1/\alpha} d\mu \leq \|f\|_{\Psi_{\alpha,1},\mu} \ .-$$

0.3. Dualité des espaces d'Orlicz.

Notons E^Φ la fermeture de l'ensemble des fonctions bornées de $L^\Phi(T,\mu)$. Du théorème de Lusin nous déduisons que E^Φ est également la fermeture de l'ensemble des fonctions continues de $L^\Phi(T,\mu)$; donc E^Φ est séparable. Le résultat le plus important est que pour toute forme linéaire ℓ , définie sur E^Φ , continue, il existe un élément g de $L^\Psi(T,\mu)$, tel que pour tout $f \in E^\Phi$, on a

$$\ell(f) = \int_T f(t)g(t)d\mu(t) \ ;$$

c'est-à-dire que le dual topologique de E^Φ est $L^\Psi(T,\mu)$.

Un cas particulier intéressant est celui où Φ vérifie la condition (Δ_2) ; en effet celle-ci est une condition nécessaire et suffisante pour que $E^\Phi = L^\Phi(T,\mu)$ et on a alors les propriétés précédentes pour $L^\Phi(T,\mu)$. C'est le cas, par exemple, pour les espaces $L^{\Psi_\alpha}(T,\mu), \alpha > 0$.-

I. MAJORATION ET CONTINUITE DES FONCTIONS ALEATOIRES REELLES. METHODE DES MESURES MAJORANTES.

Cette première partie de notre travail, comme nous l'avons annoncé dans l'introduction, est consacrée à la présentation dans son cadre le plus général de la méthode des mesures majorantes. Elle est divisée en deux parties. Dans le premier paragraphe nous juxtaposons les théorèmes de A. Garsia et de C. Preston. Ensuite nous développons la méthode de mesures majorantes et nous montrons ses similitudes et ses différences avec les deux premiers résultats. Dans le deuxième paragraphe nous abordons l'étude de la régularité des trajectoires de fonctions aléatoires réelles. La méthode nous donne des conditions suffisantes pour que celles-ci aient presque sûrement leurs trajectoires majorées ou continues. Nous discutons en détail des hypothèses que nous faisons et nous montrons que malgré le formalisme des espaces d'Orlicz elles sont naturelles.

Une partie des paragraphes est consacrée à l'étude des fonctions de Young de type puissance qui nous donnent par des calculs plus précis, dans certains cas, des conditions plus faibles.

1.1. Majoration et continuité de fonctions réelles. Méthode des mesures majorantes.

Les résultats généraux sur la majoration et la continuité des trajectoires de fonctions aléatoires réelles, que nous obtiendrons dans le deuxième paragraphe de ce chapitre, sont des applications de résultats concernant les fonctions réelles, que nous allons établir dans ce paragraphe.
La méthode des mesures majorantes nous permettra d'améliorer le résultat de C. Preston ([24]).

Dans un premier temps nous rappellerons le théorème de A. Garsia, E. Rodemich et H. Rumsey ([14]), qui concerne des fonctions définies sur [0,1].

Ensuite nous nous placerons dans un espace métrique quelconque et nous donnerons le théorème de C. Preston où apparaissent dans l'étude de la continuité, les espaces d'Orlicz associés à des fonctions de Young.

La suite du paragraphe sera consacrée à la méthode des mesures majorantes. Nous énoncerons le résultat de majoration et celui de continuité dans le cadre le plus général possible. Nous en déduirons des corollaires qui améliorent sensiblement le résultat de C. Preston. Nous verrons que les résultats finaux dépendent essentiellement de la fonction de Young utilisée et la méthode des mesures majorantes n'étant pas tout à fait unitaire, nous mettrons en évidence certaines classes de fonctions, les fonctions puissances, où les conditions optimales s'obtiennent de manière différente. Mais l'idée de la méthode est toujours la même : par une décomposition "standard" nous obtiendrons une représentation intégrale dans des espaces d'Orlicz et nous utiliserons l'inégalité de Hölder généralisée.

Le premier résultat qui a utilisé justement la technique de représentation par une intégrale est celui de A. Garsia, E. Rodemich et H. Rumsey ([14]). Le voici :

THEOREME 1.1.1. - <u>Soit</u> f <u>une fonction définie et continue sur</u> $[0,1]$, <u>muni de la distance usuelle. Soit</u> Φ <u>une fonction définie sur</u> $\mathbb{R}$, <u>positive, paire, croissante sur</u> $\mathbb{R}_+$ <u>et tendant vers l'infini avec</u> x . <u>Pour tout</u> x <u>supérieur à</u> $\Phi(0)$ <u>on pose</u> :

$$\Phi^{-1}(x) = \sup\{y : \Phi(y) \leq x\} .$$

<u>Soit de plus</u> ρ <u>une fonction définie sur</u> $[-1,1]$, <u>positive, paire, croissante sur</u> $[0,1]$, <u>continue et s'annulant à l'origine. On suppose que</u> :

$$B = \iint_{[0,1]^2} \Phi\left(\frac{f(x)-f(y)}{\rho(x-y)}\right) dxdy < \infty .$$

<u>Dans ces conditions pour tout couple</u> $(s,t) \in [0,1]^2$, <u>on a</u> :

$$|f(s)-f(t)| \leq 8 \int_0^{|s-t|} \Phi^{-1}\left(\frac{4B}{x^2}\right) d\rho(x) \ .$$

La démonstration est basée sur un découpage de $[0,1]$ par rapport à la distance usuelle, à partir d'un $t_o \in]0,1[$ fixé. On construit deux suites de nombres décroissant vers 0 , $(t_n ; n \in \mathbb{N})$ et $(d_n ; n \in \mathbb{N})$, telles que :

$$|f(t_o)-f(0)| \leq 4 \sum_{n=1}^{\infty} [\rho(d_{n-1})-\rho(d_n)] \Phi^{-1}\left(\frac{4B}{d_{n-1}^2}\right) \ .$$

Cette même inégalité appliquée à $f(1-t)$, nous permet de majorer $|f(0)-f(1)|$. On obtient le résultat en calculant cette dernière expression pour la fonction

$$\bar{f}(t') = f(s+t'(t-s)) \ ,$$

$t' \in [0,1]$ avec ,

$$\bar{\rho}(u) = \rho(u|s-t|) \ .$$

C'est cette technique de découpage qui est également à la base du résultat de C. Preston et de celui obtenu par les mesures majorantes. C. Preston ([24]) a généralisé le théorème précédent à une certaine classe de fonctions définies sur un espace métrique quelconque. Mais il a exigé en revanche que Φ soit plus régulière. En fait nous introduisons à partir de maintenant les notions et le langage des fonctions de Young et des espaces d'Orlicz. Les principaux résultats que nous utiliserons ont été rappelés dans le chapitre 0.

Dans toute la suite (T,d) sera un espace métrique séparable, $\mathcal{T}$ la tribu engendrée par les d-boules ouvertes de T et μ une mesure de probabilité sur $(T,\mathcal{T})$ telle que pour tout $t \in T$ et tout $r \in \mathbb{R}_+^*$ on a :

$$\mu(B_d(t,r)) > 0 \ ,$$

où $B_d(t,r)$ désigne la d-boule ouverte de centre t et de rayon r. On suppose donc que le support de μ est T tout entier. On désignera par δ un écart défini sur T et d-continu. Pour toute fonction f définie sur T on notera :

$$\tilde{f}_{\rho,\delta}(u,v) = \frac{f(u)-f(v)}{\rho(\delta(u,v))}\, I(u,v)_{\{(s,t)\,:\,\delta(s,t)\neq 0\}} ,$$

où ρ sera toujours une fonction définie sur R_+, positive, croissante, s'annulant et continue à l'origine. Si aucune confusion n'est à craindre les indices seront omis.

C. Preston ([24]) a démontré le théorème suivant :

THEOREME 1.1.2. - <u>Soit</u> f <u>une fonction définie sur</u> T <u>et vérifiant les deux hypothèses suivantes</u> :

i) <u>Il existe</u> Φ <u>et</u> μ, <u>définies comme ci-dessus, telles que</u>

$$\tilde{f}_{\rho,d} \in L^{\Phi}(T\times T,\, \mu\otimes\mu)$$

ii) <u>On a</u> :

$$\int_0^1 \Phi^{-1}\left[\frac{1}{(\inf\limits_{t\in T} \mu(B(t,\frac{u}{2})))^2}\right] d\rho(2u) < \infty .$$

<u>Dans ces conditions, il existe une fonction</u> f_o <u>définie sur</u> T, <u>continue et</u> μ <u>presque partout égale à</u> f, <u>telle que pour tout couple</u> $(s,t)\in T\times T$ <u>on a</u> :

$$|f_o(s)-f_o(t)| \leq 10 \|\tilde{f}_{\rho,d}\|_{(\Phi),\mu\otimes\mu} \int_0^{\frac{d(s,t)}{2}} \Phi^{-1}\left(\frac{1}{(\inf\limits_{u\in T}\mu(B(u,v)))^2}\right) d\rho(2v) .$$

Remarquons que d'après l'hypothèse i) la norme de Luxemburg de $\tilde{f}$, que l'on a notée $\|\tilde{f}_{\rho;d}\|_{(\Phi),\mu\otimes\mu}$ (0.2.1) , est finie.

Si l'hypothèse intégrale est vérifiée alors la continuité de f_o est immédiate à partir de l'inégalité.

Nous verrons par la suite que le résultat de continuité obtenu par la méthode des mesures majorantes, est vérifié sous des hypothèses moins fortes que celles du théorème de C. Preston. En particulier nous l'énoncerons pour un écart δ, d-continu quelconque, lié ou non à la fonction f. Ceci nous permettra un choix plus vaste dans l'étude des fonctions aléatoires.

Nous introduisons les notations suivantes, que nous garderons tout au long de notre travail. Pour une fonction de Young donnée Φ, on notera Ψ sa conjuguée. Soient une fonction f définie sur T et mesurable, une partie non négligeable S de $\mathfrak{T}$ et a un nombre réel strictement positif. Pour tout $t \in T$ et tout entier naturel n on pose :

$$\mu_n(t;S,\delta,a) = \mu(B_n(t,S,\delta,a)) = \mu(B_\delta(t,\frac{a}{2^n}) \cap S) ,$$

$$f_n(t;S,\delta,a) = \frac{1}{\mu_n(t;S,\delta,a)} \int_{B_n(t,S,\delta,a)} f(u)d\mu(u) ;$$

et si I_A désigne l'indicatrice de l'ensemble A, pour tout entier n supérieur à 1, on notera

$$g_n(u,v;t,S,\delta,a) = \frac{1}{\mu_n(t,S,\delta,a)\mu_{n-1}(t,S,\delta,a)} I_{B_n(t,S,\delta,a)\times B_n(t,S,\delta,a)}(u,v)$$

et

$$\bar{g}_n(u,v;t,S,\delta,a) = g_n(u,v;t,S,\delta,a) - g_n(v,u;t,S,\delta,a) .$$

On se placera toujours dans le cas où toutes ces quantités ont un sens. S'il n'y a pas de confusion possible les "variables" t,S,δ ou a seront omises pour alléger l'écriture.

La méthode des mesures majorantes, que nous allons exposer en détails dans le cadre de fonctions, est basée sur la proposition suivante :

PROPOSITION 1.1.3. - Soient f une fonction définie sur T, mesurable et $S \in \mathfrak{T}$ une partie non négligeable telle que $\delta(S)$, son δ-diamètre, soit fini. On suppose qu'il existe une fonction de Young Φ et une mesure de probabilité μ sur $(T,\mathfrak{T})$ telles que les propriétés suivantes soient vérifiées :

i) La restriction de $\tilde{f}_{\rho,\delta}$ à $S \times S$ est un élément de $L^{\Phi}(T \times T, \mu\otimes\mu)$.

ii) Pour tout $t \in S$ on a :

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t;S,\delta,\delta(S)) = f_o(t) .$$

iii) La suite de terme général $\sum_{k=1}^{n} \rho(\delta(u,v))g_k(u,v;t,S,\delta,\delta(S))$ est bornée, uniformément en t, dans $L^{\Psi}(T \times T, \mu\otimes\mu)$.

Dans ces conditions pour tout $t \in S$ on a :

$$|f_o(t)-\frac{1}{\mu(S)}\int_S f(u)d\mu(u)| \leq \tfrac{1}{2}\|\tilde{f}_{\rho,\delta}I_{S\times S}\|_{(\Phi),\mu\otimes\mu} \sup_{s\in S}\|\sum_{k=1}^{\infty} \rho\bar{g}_k(\cdot;s,S,\delta,\delta(S))\|_{\Psi,\mu\otimes\mu} .$$

Démonstration : Malgré la complexité des notations, cell-ci est simple. L'outil essentiel est l'inégalité de Hölder généralisée. Nous allons obtenir une représentation intégrale de f_n à un facteur de centrage près. En effet, en effectuant la somme au deuxième membre de l'égalité qui suit, le choix des rayons des boules nous donne :

$$2(f_n(t)-\frac{1}{\mu(S)}\int_S f(u)d\mu(u)) = \iint_{S\times S}(f(u)-f(v))(\sum_{k=1}^{n}\bar{g}_k(u,v))d\mu\otimes\mu(u,v) .$$

Les supports des fonctions $\bar{g}_k$ étant inclus dans le complémentaire de l'ensemble $\{(u,v) : \delta(u,v)=0\}$, on retrouve $\tilde{f}_{\rho,\delta}$ en introduisant le facteur $\rho(\delta(u,v))$.

Remarquons que si δ est une distance on peut se contenter des fonctions g_k et dans ce cas on n'a pas le coefficient 2 . Les conditions i) et iii) nous permettent d'appliquer l'inégalité de Hölder et d'obtenir le second membre de l'inégalité. L'hypothèse ii) nous donne, en faisant tendre n vers l'infini, le résultat annoncé.-

L'importance de cette proposition est capitale. Tout notre travail s'articule autour de celle-ci et dans la plupart des résultats que nous allons présenter c'est cette majoration que nous utiliserons. Les hypothèses peuvent paraître lourdes ; nous allons les commenter. La propriété i) est fondamentale ; dans le cas des fonctions elle est très forte ; par contre pour les fonctions aléatoires elle devient naturelle ; en effet, nous choisirons un écart δ lié à celles-ci de telle sorte que la propriété i) soit toujours vérifiée. La deuxième hypothèse est technique, nous la supprimerons de deux manières, soit en renforçant la condition iii) et alors on aura l'existence de f_o , soit dans le cas des fonctions aléatoires par le choix de l'écart δ qui nous donnera une convergence presque sûre en tout point vers la fonction étudiée.
Enfin la dernière condition paraît difficile à vérifier ; en fait nous allons en donner une écriture intégrale, à l'aide de Φ^{-1} , du type de celles de A. Garsia et C. Preston. Nous verrons également que pour certaines classes de fonctions de Young, les fonctions puissances, nous pourrons calculer directement la norme d'Orlicz de la série, les majorations seront alors, dans certains cas, plus fines.

COROLLAIRE 1.1.4. - <u>Avec les mêmes notations que celles de la proposition précédente, on suppose qu'il existe une fonction de Young</u> Φ <u>et une mesure de probabilité</u> μ <u>sur</u> $(T,\mathcal{T})$ <u>telles que les propriétés suivantes soient vérifiées</u> :

i) <u>La restriction de</u> $\tilde{f}_{\rho,\delta}$ <u>à</u> $S \times S$ <u>est un élément de</u> $L^{\Phi}(T \times T, \mu\otimes\mu)$.

ii) <u>Pour tout</u> $t \in S$ <u>on a</u> :

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t;S,\delta,\delta(S)) = f_o(t)$$

iii) On a :

$$\sup_{s\in S} \int_0^{\frac{\delta(S)}{2}} \frac{\rho(6u)}{u} \Phi^{-1}\left(\frac{1}{\mu^2(B_\delta(s,u)\cap S)}\right) du < \infty .$$

Dans ces conditions pour tout $t\in S$ on a la majoration :

$$|f_o(t) - \frac{1}{\mu(S)} \int_S f(u)d\mu(u)| \leq 2\|\tilde{f}_{\rho,\delta} I_{S\times S}\|_{(\Phi),\mu\otimes\mu} \sup_{s\in S} \int_0^{\frac{\delta(S)}{2}} \frac{\rho(6u)}{u} \Phi^{-1}\left(\frac{1}{\mu^2(B_S(s,u)\cap S)}\right) du.$$

Démonstration : Il suffit de montrer que l'intégrale de iii) est quatre fois plus grande que la norme d'Orlicz de la série de la proposition précédente. De l'inégalité triangulaire sur les normes on déduit :

$$B = \|\sum_{k\geq 1} \rho\,\bar{g}_k\|_{\Psi,\mu\otimes\mu} \leq \sum_{k\geq 1} \frac{1}{\mu_k\mu_{k-1}} \|(I_{B_k\times B_{k-1}} - I_{B_{k-1}\times B_k})\rho\|_{\Psi,\mu\otimes\mu} .$$

Dans les ensembles de variations des couples (u,v), en utilisant la croissance de ρ et la définition des rayons, on a :

$$\begin{aligned}\rho(\delta(u,v)) &\leq \rho(\delta(u,t)+\delta(v,t)) ,\\ &\leq \rho\left(\frac{\delta(S)}{2^k} + \frac{\delta(S)}{2^{k-1}}\right) ,\\ &\leq \rho\left(3\,\frac{\delta(S)}{2^k}\right) = \rho\left(6\,\frac{\delta(S)}{2^{k+1}}\right) .\end{aligned}$$

D'autre part d'après l'évaluation de la norme d'Orlicz d'une indicatrice et la croissance de $x\Phi^{-1}(\frac{1}{x})$ on a :

$$\begin{aligned}\|I_{B_k\times B_{k-1}} - I_{B_{k-1}\times B_k}\|_{\Psi,\mu\otimes\mu} &= 2(\mu_k\mu_{k-1} - \mu_k^2)\Phi^{-1}\left(\frac{1}{\mu_k\mu_{k-1} - \mu_k^2}\right) ,\\ &\leq 2\mu_k\mu_{k-1}\,\Phi^{-1}\left(\frac{1}{\mu_k\mu_{k-1}}\right) .\end{aligned}$$

Remarquons que le dernier terme est la norme d'Orlicz de $I_{B_k \times B_{k-1}}$. En reportant on a

$$B \leq 2 \sum_{k \geq 1} \rho(6 \frac{\delta(S)}{2^{k+1}}) \Phi^{-1}(\frac{1}{\mu_k \mu_{k-1}}) ,$$

$$\leq 4 \sum_{k \geq 1} \rho(6 \frac{\delta(S)}{2^{k+1}}) \Phi^{-1}(\frac{1}{\mu_k^2}) \frac{2^k}{\delta(S)} (\frac{\delta(S)}{2^k} - \frac{\delta(S)}{2^{k+1}}) ,$$

$$\leq 4 \int_0^{\frac{\delta(S)}{2}} \frac{\rho(6u)}{u} \Phi^{-1}(\frac{1}{\mu^2(B_\delta(t,u) \cap S)}) \, du .$$

Ceci nous donne le résultat annoncé.

Le corollaire 1.1.4. justifie le nom de mesure majorante. De manière précise on a :

DEFINITION 1.1.5. - _Soient_ (T,d) _un espace métrique séparable,_ $\mathfrak{T}$ _la tribu engendrée par les_ d _-boules ouvertes de_ T _et_ δ _un écart sur_ T _,_ d _-continu. Si_ Φ _est une fonction de Young, on dira qu'une mesure de probabilité_ μ _sur_ $(T,\mathfrak{T})$ _est une_ Φ _-mesure majorante par rapport à_ δ _si :_

$$\sup_{t \in T} \int_0^{\frac{\delta(T)}{2}} \Phi^{-1}(\frac{1}{\mu^2(B_\delta(t,u))}) \, du < \infty .$$

Les calculs qui ont été faits dans la démonstration du corollaire 1.1.4. ne sont pas toujours les plus efficaces. Nous avons en effet utilisé brutalement l'inégalité triangulaire pour nous ramener au calcul de la norme d'Orlicz de fonctions indicatrices, calcul que nous savons faire de manière générale.
La majoration que nous avons obtenue est néanmoins très précise pour des fonctions de Young à croissance rapide, par exemple, comme nous le verrons par la suite, pour la famille de fonctions de Young de type exponentiel. Par contre pour certaines fonctions de Young, à croissance "lente", ce n'est pas toujours le cas. Pour une famille entre elles, les fonctions puissances :

$$\Phi_r(x) = \frac{|x|^r}{r} \ (r>1) \ ,$$

nous pouvons calculer directement la norme d'une somme de fonctions à supports disjoints. En effet, comme nous l'avons vu dans le chapitre 0 , pour Φ_r les espaces d'Orlicz sont les espaces usuels L^r et les normes d'Orlicz et de Luxemburg sont, à des constantes multiplicatives près, les normes usuelles.

Le corollaire 1.1.4, avec ces considérations, devient :

COROLLAIRE 1.1.6. - Soit f une fonction définie sur T , mesurable et $S \in \mathcal{T}$ une partie non négligeable telle que $\delta(S)$, son δ-diamètre, soit fini. On suppose qu'il existe un réel $r>1$ et une mesure de probabilité μ sur $(T,\mathcal{T})$, tels que les propriétés suivantes soient vérifiées :

i) La restriction $\tilde{f}_{\rho,\delta}$ à $S \times S$ soit un élément de $L^r(T\times T, \mu\otimes\mu)$.

ii) Pour tout $t \in S$ on a :

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t;S,\delta,\delta(S)) = f_o(t)$$

iii) On a :

$$\sup_{t\in S} \int_o^{\frac{\delta(S)}{2}} \frac{\rho^{\frac{r}{r-1}}(6u)}{u\, \mu^{2/r-1}(B_\delta(t,u)\cap S)} du < \infty \ .$$

Dans ces conditions pour tout $t \in S$ on a la majoration :

$$|f_o(t)-\frac{1}{\mu(S)}\int_S f(u)d\mu(u)| \leq (r2^{r-2})^{\frac{1}{r}} \|\tilde{f}_{\rho,\delta} I_{S\times S}\|_{(r),\mu\otimes\mu}\left[\sup_{s\in S}\int_o^{\frac{\delta(S)}{2}} \frac{\rho^{r/r-1}(6u)}{u\,\mu^{2/r-1}(B_\delta(s,u)\cap S)} du\right]^{\frac{r-1}{r}}.$$

Démonstration : Il suffit de majorer la norme de la série (1.1.3 iii)) par l'intégrale (1.1.6 iii). Si r' désigne le nombre conjugué de r , comme nous l'avons vu dans le chapitre 0, $\Psi_r(x) = \frac{|x|^{r'}}{r'}$ et on a :

$$\Big\| \sum_{k\geq 1} \rho\bar{g}_k \Big\|_{r',\mu\otimes\mu} = r^{1/r} \Big[\iint_{T\times T} \Big(\sum_{k\geq 1} \rho\bar{g}_k \Big)^{r'} d\mu\otimes\mu \Big]^{1/r'} .$$

Les fonctions $\bar{g}_k$ étant à support disjoints, l'intégrale double du second membre est égale à

$$\sum_{k\geq 1} \iint_{T\times T} \rho^{r'} \bar{g}_k^{r'} \, d\mu\otimes\mu .$$

La conclusion se fait par des majorations identiques à celles de la démonstration du corollaire 1.1.4, en remarquant que

$$\iint_{T\times T} \left| I_{B_k\times B_{k-1}} - I_{B_{k-1}\times B_k} \right|^{r'} d\mu\otimes\mu = 2(\mu_k\mu_{k-1} - \mu_k^2) ,$$

et en remplaçant r' par sa valeur. -

Notons que dans ce cas particulier, l'utilisation des fonctions $\bar{g}_k$ est indispensable, même dans le cas où δ est une distance. Elles sont en effet à supports disjoints, ce qui n'est pas le cas des g_k .

Remarquons que la condition iii) du corollaire 1.1.4. s'écrit, pour les fonctions puissances :

$$\sup_{t\in S} \int_0^{\frac{\delta(S)}{2}} \frac{\rho(6u)}{u\,\mu^{2/r}(B_\delta(t,u)\cap S)} \, du < \infty .$$

Comme r est strictement plus grand que 1, on a :

$$\frac{1}{\mu^{2/r}(B_\delta(t,u)\cap S)} \leq \frac{1}{\mu^{2/r-1}(B_\delta(t,u)\cap S)} ;$$

par contre si ρ est plus petit que 1, on a :

$$\rho^{\frac{r}{r-1}}(6u) \leq \rho(6u) .$$

Autrement dit les conditions intégrales, que nous obtenons dans les deux corollaires pour les fonctions puissances, sont difficilement comparables. Leur efficacité dépend du choix de ρ , de μ et de r . Nous verrons que pour une famille de fonctions aléatoires particulières c'est la condition du corollaire 1.1.6. qui sera la plus faible.

La proposition 1.1.3. et les corollaires précédents vont nous permettre d'obtenir un résultat général de continuité. Nous en déduirons une amélioration du théorème 1.1.2. de C. Preston. Ce résultat général, en renforçant la condition iii) sur la série nous permet d'obtenir l'existence et la continuité de f_o . Dans le cas où δ est une distance elle nous donnera également l'égalité de f_o avec f μ-presque partout.

PROPOSITION 1.1.7. - Soit f une fonction définie sur T , mesurable. On suppose qu'il existe une fonction de Young Φ et une mesure de probabilité μ sur $(T,\mathfrak{T})$ telles que les propriétés suivantes soient vérifiées :

i) La fonction $\tilde{f}_{\rho,\delta}$ est un élément de $L^{\Phi}(T \times T, \mu\otimes\mu)$.

ii) Si Ψ désigne la conjuguée de Φ , on a :

$$\lim_{\varepsilon\to o} \sup_{t\in T} \Big\| \sum_{k=1}^{\infty} \rho(\delta) g_k(.;t,T,\delta,\varepsilon) \Big\|_{\Psi,\mu\otimes\mu} = 0 .$$

Il existe alors une fonction f_o définie sur T , continue telle que pour tout $t \in T$ on a :

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t;T,\delta,\varepsilon) = f_o(t) .$$

De plus pour tout s et t dans T on a la majoration :

$$|f_o(s)-f_o(t)| \leq \|\tilde{f}_{\rho,\delta}\|_{(\Phi),\mu\otimes\mu} \sup_{u\in T} \Big\| \sum_{k=1}^{\infty} \rho(\delta)\bar{g}_k(;u,T,\delta,\delta(s,t)) \Big\|_{\Psi,\mu\otimes\mu} .$$

Démonstration : Démontrons l'existence de f_o. D'après un calcul analogue à celui de la proposition 1.1.3. nous avons la représentation intégrale :

$$2(f_m(t)-f_n(t)) = \iint \tilde{f}_{\rho,\delta}(u,v)\Big(\sum_{k=n+1}^{m} \rho(\delta(u,v))\bar{g}_k(u,v;t,T,\delta,\varepsilon)\Big)d\mu\otimes\mu(u,v) \ ,$$

où on a pris $m \geq n$. En appliquant l'inégalité de Hölder généralisée, la condition ii) nous donne l'existence pour tout $\eta > 0$, d'un entier $p = p(\varepsilon,\eta)$, tel que si m et n sont supérieurs à p, on a, pour tout $t \in T$:

$$|f_m(t)-f_n(t)| \leq \tfrac{1}{2}\eta \, \|\tilde{f}_{\rho,\delta}\|_{(\Phi),\mu\otimes\mu} \ .$$

La suite $(f_n ; n \in \mathbb{N})$ est donc une suite de Cauchy sur T pour la norme uniforme, elle a une limite f_o.

Il ne nous reste plus qu'à montrer que f_o vérifie l'inégalité annoncée ; sa continuité en résultera, soient donc s et t fixés, on pose

$$A = B_\delta\Big(s,\frac{\delta(s,t)}{2}\Big) \cup B_\delta\Big(t,\frac{\delta(s,t)}{2}\Big) \ ,$$

$$\varepsilon = \delta(s,t) \ .$$

En prenant comme premier rayon $r_o = \delta(A)$ et $r_n = \frac{\varepsilon}{2^n}$, l'application de la proposition 1.1.3. pour $S = A$, nous donne

$$\Big|f_o(s) - \frac{1}{\mu(A)}\int_A f(u)d\mu(u)\Big| \leq \tfrac{1}{2}\,\|\tilde{f}_{\rho,\delta} I_{A\times A}\|_{(\Phi),\mu\otimes\mu} \sup_{u\in T} \Big\|\sum_{k\geq 1} \rho\bar{g}_k(\cdot\,;u,A,\delta,\varepsilon)\Big\|_{\Psi,\mu\otimes\mu} \ .$$

Cette même inégalité en t et le choix de A et des rayons nous donnent le résultat annoncé.-

Remarquons que l'on a majoré brutalement $\|\tilde{f}_{\rho,\delta} I_{A\times A}\|_{(\Phi),\mu\otimes\mu}$ par $\|\tilde{f}_{\rho,\delta}\|_{(\Phi),\mu\otimes\mu}$.

En se restreignant au couple (s,t) tel que $\delta(s,t) < \eta$ alors la norme de $\tilde{f}_{\rho,\delta} I_{A\times A}$ est majorée par celle de

$$\widetilde{f}_{\rho,\delta}\, I_{\{(u,v):\delta(u,v)<2\eta\}}\,,$$

en vertu d'un résultat du paragraphe 0.2. Cette remarque sera utilisée dans l'étude des fonctions aléatoires. Tous les résultats de continuité des trajectoires, que nous obtiendrons seront des applications de la proposition précédente.

Comme pour les majorations, la condition ii) peut s'exprimer plus agréablement sous forme intégrale à l'aide de Φ^{-1}. Nous avons le corollaire :

COROLLAIRE 1.1.8. - *Soit* f *une fonction définie sur* T, *mesurable. On suppose qu'il existe une fonction de Young* Φ *et une mesure de probabilité* μ *sur* $(T,\mathcal{T})$ *telles que les propriétés suivantes soient vérifiées* :

i) *La fonction* $\widetilde{f}_{\rho,\delta}$ *est un élément de* $L^{\Phi}(T\times T,\mu\otimes\mu)$.

ii) *On a* :

$$\lim_{\varepsilon\to o}\ \sup_{t\in T}\int_o^{\varepsilon}\frac{\rho(6u)}{u}\,\Phi^{-1}\Big(\frac{1}{\mu^2(B_\delta(t,u))}\Big)\,du=0\,.$$

Il existe alors une fonction f_o, *définie sur* T, *continue telle que* :

$$\lim_{n\to\infty} f_n(t;T,\delta,\varepsilon)=f_o(t)\ ;$$

De plus pour tout s *et* $t\in T$ *on a la majoration*

$$|f_o(s)-f_o(t)|\le 4\|\widetilde{f}_{\rho,\delta}\|_{(\Phi),\mu\otimes\mu}\ \sup_{v\in T}\int_o^{\frac{\delta(s,t)}{2}}\frac{\rho(6u)}{u}\,\Phi^{-1}\Big(\frac{1}{\mu^2(B_\delta(v,u))}\Big)\,du\,.$$

La démonstration est une application directe du corollaire 1.1.4. et de la proposition 1.1.7.

Nous étudions maintenant les relations entre f et f_o. Un cas particulier où les calculs sont agréables est celui où δ est une distance ; nous avons l'énoncé suivant :

PROPOSITION 1.1.9. - Soit f une fonction définie sur T , mesurable. On suppose qu'il existe une fonction de Young Φ et une mesure de probabilité μ sur $(T,\mathfrak{T})$ telles que les propriétés suivantes soient vérifiées :

i) La fonction $\tilde{f}_{\rho,\delta}$ est un élément de $L^{\Phi}(T\times T,\mu\otimes\mu)$.

ii) Si Ψ désigne la conjuguée de Φ on a :

$$\lim_{\varepsilon\to o}\ \sup_{t\in T}\ \Big\|\sum_{k\geq 1}\ \rho\Big(\frac{\varepsilon}{2^k}\Big)g_k(\,;t,T,\delta,\varepsilon)\Big\|_{\Psi,\mu\otimes\mu}=0\ .$$

Il existe alors une fonction f_o , définie sur T , continue et μ-presque partout égale à f , telle que pour tout s et $t\in T$ on ait :

$$|f_o(s)-f_o(t)|\leq\|\tilde{f}_{\rho,\delta}\|_{(\Phi),\mu\otimes\mu}\ \sup_{u\in T}\ \Big\|\sum_{k\geq 1}\ \rho(\delta)\bar{g}_k(\,;u,T,\delta,\delta(s,t))\Big\|_{\Psi,\mu\otimes\mu}\ .$$

Démonstration : En appliquant la proposition 1.1.7, il suffit de montrer que la limite f_o de la suite f_n est μ-presque partout égale à f . Par définition de la norme de Luxemburg, il existe une partie $N\in\mathfrak{T}$ négligeable telle que pour tout $t\notin N$ on a :

$$\|\tilde{f}_{\rho,\delta}(t,.)\|_{(\Phi),\mu}<\infty\ .$$

On se fixe $t\notin N$. Un calcul simple nous donne :

$$(f_n(t)-f(t))=\int_T(f(u)-f(t))I_{B_n(t)}(u)\ \frac{d\mu(u)}{\mu_n(t)}\ .$$

En introduisant le facteur $\rho(\delta(t,u))$, l'inégalité de Hölder généralisée donne :

$$|f_n(t)-f(t)| \leq \|\tilde{f}_{\rho,\delta}(t,.)\|_{(\Phi),\mu} \|\rho(\delta(t,.)) \frac{I_{B_n}(t)}{\mu_n(t)}\|_{\Psi,\mu} ,$$

$$\leq \frac{1}{\Phi^{-1}(1)} \|\tilde{f}_{\rho,\delta}(t,.)\|_{(\Phi),\mu} \|\rho(\frac{\varepsilon}{2^n})\, g_n(;t,T,\delta,\varepsilon)\|_{\Psi,\mu\otimes\mu} .$$

La condition ii) nous donne, en faisant tendre n vers l'infini, le résultat.-

Cette proposition est l'amélioration du résultat de C. Preston. De manière analogue à celle du corollaire 1.1.8. nous obtenons une représentation intégrale de la série à l'aide de Φ^{-1}. La condition de continuité s'écrit alors

$$\lim_{\varepsilon \to o} \sup_{t \in T} \int_o^{\varepsilon} \frac{\rho(6u)}{u}\, \Phi^{-1}\left(\frac{1}{\mu^2(B(t,u))}\right) du = 0 .$$

Dans le cas particulier des fonctions de Young de type puissance, les résultats de continuité s'énoncent :

COROLLAIRE 1.1.10. - Soit f une fonction définie sur T et mesurable. On suppose qu'il existe un réel $r>1$, et une mesure de probabilité μ sur $(T,\mathfrak{J})$, tels que les propriétés suivantes soient vérifiées :

i) La fonction $\tilde{f}_{\rho,\delta}$ est un élément de $L^r(T \times T, \mu\otimes\mu)$.

ii) On a :

$$\lim_{\varepsilon \to o} \sup_{t \in T} \int_o^{\varepsilon} \frac{\rho^{r/r-1}(6u)}{u\mu^{2/r-1}(B_d(t,u))}\, du = 0 .$$

Il existe alors une fonction f_o, définie sur T, continue et μ-presque partout égale à f, telle que pour tout $s,t \in T$ on ait :

$$|f_o(s)-f_o(t)| \leq 6\, \|\tilde{f}_{\rho,d}\|_{(r),\mu\otimes\mu} \left[\sup_{v \in T} \int_o^{\frac{d(s,t)}{2}} \frac{\rho^{\frac{r}{r-1}}(6u)}{u\mu^{2/r-1}(B_d(v,u))}\, du\right]^{\frac{r-1}{r}} .$$

Pour la démonstration il suffit d'appliquer la technique du corollaire 1.1.6. à la proposition 1.1.9.

Ce dernier résultat termine l'étude des fonctions. Nous allons à présent appliquer ces corollaires à l'étude de majoration et de continuité des trajectoires de fonctions aléatoires.

1.2. Majoration et continuité des trajectoires de fonctions aléatoires. Méthode des mesures majorantes.

Ce paragraphe est consacré à l'étude de la régularité des trajectoires de fonctions aléatoires. Nous allons établir, sous des hypothèses assez générales, des conditions suffisantes pour que les trajectoires de telles fonctions soient majorées ou continues presque sûrement. La méthode que nous utilisons est celle des mesures majorantes. Ce paragraphe et les chapitres suivants nous permettent de montrer que cette méthode, qui a été introduite par X. Fernique ([11]) dans l'étude des trajectoires des processus gaussiens, peut être étendue à l'étude de famille quelconque de fonctions aléatoires.

Les principaux résultats de ce paragraphe seront obtenus à l'aide des corollaires 1.1.4. et 1.1.8. Nous les appliquerons à une suite de fonctions aléatoires qui convergera vers la fonction étudiée ; nous éviterons ainsi le développement de Karhunen-Loève qui a été utilisé par A. Garsia, E. Rodemich et H. Rumsey ([14]) et C. Preston ([25]) dans l'application de leurs théorème respectif (1.1.1. et 1.1.2) à l'étude des processus gaussiens.

Dans un premier temps nous donnons quelques résultats techniques ; en particulier une proposition où nous étudions le comportement de la norme de Luxemburg des accroissements normalisés d'une fonction aléatoire. Dans la suite nous présentons les théorèmes de majorations et de continuité pour conclure ce paragraphe avec quelques corollaires immédiats.

La méthode des mesures majorantes que nous présentons est à rapprocher avec la technique de P. Boulicaut ([3]). En effet il a utilisé également le formalisme des fonctions de Young et des espaces d'Orlicz pour l'étude de la continuité des trajectoires de fonctions aléatoires. Mais quoique les résultats auxquels nous aboutissons sont similaires, les démarches sont totalement différentes et les hypothèses de départ plus faibles comme nous le verrons.

Nous commençons par définir les différentes quantités que nous utiliserons. Comme précédemment (T,d) désignera un espace métrique séparable et $(\Omega,\mathcal{G},P)$ un espace d'épreuves. On se donne

$$X = \{X(\omega,t);\omega\in\Omega,\ t\in T\}\ ,$$

une fonction aléatoire réelle. Soit $r\geq 1$ et supposons

$$\delta(s,t) = (E|X(s)-X(t)|^r)^{1/r}\ ,$$

fini pour tout couple $(s,t)\in T\times T$, δ est donc un écart que l'on exigera d-continu sur T . Cette hypothèse implique que X est continu en probabilité. On supposera X séparable et $\mathcal{G}\otimes\mathcal{T}$-mesurable. Comme dans le paragraphe 1.1. on note

$$\widetilde{X}_{Id,\delta}(\omega,s,t) = \widetilde{X}_\delta(\omega,s,t) = \frac{X(\omega,s)-X(\omega,t)}{\delta(s,t)}\ I_{\{(u,v):\delta(u,v)\neq 0\}}(s,t)\ .$$

Les résultats que nous obtiendrons se généralisent aisément à $\widetilde{X}_{\rho,\delta}$. Si aucune confusion n'est à craindre les indices seront omis.

Nous donnons en premier lieu un lemme de "dérivation" de X par rapport à des boules ouvertes.

LEMME 1.2.1. - Soient X une fonction aléatoire définie sur un espace métrique séparable (T,d) , $(\Omega,\mathcal{G},P)$ un espace d'épreuves et μ une mesure de probabilité sur $(T,\mathcal{T})$; soit de plus $r = (r_n;n\in\mathbb{N})$ le terme général d'une série à termes positifs, convergente, on pose :

$$X_n(t) = X_n(t;T,\delta,r) = \frac{1}{\mu_n(t;T,\delta,r)} \int_{B_n(t,T,\delta,r)} X(u)d\mu(u) .$$

Dans ces conditions pour tout $t \in T$, $X_n(t)$ converge presque sûrement vers $X(t)$ quand n tend vers l'infini.

Démonstration : La définition de X_n , la mesurabilité de X , le théorème de Fubini et l'inégalité de Hölder, nous donnent, par définition de δ :

$$E|X_n(t)-X(t)| \leq E\left(\frac{1}{\mu_n(t)} \int_{B_n(t)} |X(u)-X(t)|d\mu(u)\right) ,$$

$$\leq \frac{1}{\mu_n(t)} \int_{B_n(t)} \delta(u,t)d\mu(u) ,$$

$$\leq r_n ,$$

qui est le terme général d'une série convergente ; le lemme est démontré.-

Grâce à ce lemme on pourra appliquer la méthode des mesures majorantes sans hypothèses de convergence.

Nous formulons à présent les deux hypothèses générales qui concernent l'appartenance de $\tilde{X}_\delta$ à des espaces d'Orlicz et que nous ferons constamment dans ce paragraphe.

On notera (H_1) et (H_2) les propriétés suivantes :

(H_1) : Il existe une mesure de probabilité μ sur $(T,\mathfrak{T})$ et une fonction de Young Φ telles que

$$\tilde{X}_\delta \in L^\Phi(T \times T , \mu \otimes \mu) ,$$

P - presque sûrement.

(H_2) : Il existe une mesure de probabilité μ sur $(T,\mathfrak{T})$ et une fonction de Young Φ telles que :

$$\widetilde{X}_\delta \in L^\Phi(\Omega \times T \times T\,,\, P \otimes \mu \otimes \mu)\ .$$

Ces deux hypothèses appellent quelques commentaires :

REMARQUES 1.2.2 : a) C'est l'hypothèse (H_2) que l'on peut vérifier en pratique ; en effet, d'après le paragraphe 0.2. elle est équivalente à l'existence d'une mesure de probabilité μ sur $(T,\mathcal{T})$, d'une fonction de Young Φ et d'une constante $\beta > 0$ telles que :

$$\iint_{T \times T} E(\Phi(\beta \widetilde{X}_\delta))d\mu \otimes \mu < \infty\ .$$

b) D'après ce qui précède, si l'hypothèse (H_2) est vérifiée, il existe alors une mesure de probabilité μ sur $(T,\mathcal{T})$, une fonction de Young Φ et une constante strictement positive β , telles que pour P-presque tout $\omega \in \Omega$ on a :

$$\iint_{T \times T} \Phi(\beta \widetilde{X}_\delta(\omega,.))d\mu \otimes \mu < \infty\ ;$$

C'est l'hypothèse (H_1) . Par contre, si cette dernière est vérifiée, nous pourrons alors trouver, pour P-presque tout $\omega \in \Omega$, une constante $\beta = \beta(\omega)$, strictement positive, qui n'est pas forcément une variable aléatoire, telle que

$$\iint_{T \times T} \Phi(\beta(\omega)\widetilde{X}_\delta(\omega,.))d\mu \otimes \mu < \infty\ .$$

Ceci n'entraîne évidemment pas l'hypothèse (H_2) . Dans la suite nous montrerons que parmi toutes les "constantes" $\beta(\omega)$, il en existe une qui est une variable aléatoire.

c) Remarquons que l'hypothèse de P. Boulicaut ([3]), pour tout couple $(s,t) \in T \times T$

$$\|X(s)-X(t)\|_{(\Phi),P} \le \rho(d(s,t))\ ,$$

entraîne l'hypothèse (H_2) pour $\tilde{X}_{\rho,\delta}$; en effet elle est équivalente à

$$E(\Phi(\tilde{X}_{\rho,d})) \leq 1 .$$

Par contre, la réciproque n'est pas vraie. Donc tous nos résultats concernant $\tilde{X}_{\rho,d}$ seront appliquables à une famillé plus vaste de fonctions aléatoires.

En fait l'hypothèse qui est essentielle est que

$$\delta(s,t) = (E|X(s)-X(t)|^r)^{1/r} ,$$

définisse bien un écart. Ceci suffit pour que l'hypothèse (H_2) reste vérifiée. C'est net si $r>1$ $(\Phi(x) = \frac{|x|^r}{r})$, c'est vrai aussi si $r = 1$ d'après les propriétés des fonctions intégrables.

De deux espaces d'Orlicz contenant $\tilde{X}_\delta$ on aura avantage à choisir celui qui est le plus petit ; c'est-à-dire celui qui est défini par la fonction de Young, la plus grande au sens de la relation d'ordre partiel définie par M.A. Krasnoselsky et Y.B. Rutitsky ([21]) à savoir

$$\Phi_1 < \Phi_2 \Leftrightarrow (\exists\, x_o , \exists\, K : x \geq x_o \Rightarrow \Phi_1(x) \leq \Phi_2(Kx)) .$$

Les conditions de majoration et de continuité s'exprimant à l'aide de Φ^{-1} , comme nous l'avons vu dans le premier paragraphe, nous obtiendrons alors les conditions les plus faibles.

Nous allons à présent étudier le comportement de la norme de Luxemburg de $\tilde{X}_\delta$ sous les différentes hypothèses.

PROPOSITION 1.2.4. - Soient X une fonction aléatoire définie sur un espace métrique séparable (T,d) et δ l'écart d'ordre 1 induit par X sur T . On a les propriétés suivantes :

i) Sous l'hypothèse (H_1) la quantité $\|\tilde{X}_\delta(\omega,.)\|_{(\Phi),\mu\otimes\mu}$ définit une variable aléatoire.

ii) Sous l'hypothèse (H_2) il existe une constante $\beta = \beta_X$ strictement positive telle que :

$$x > \beta \Rightarrow P(\|\tilde{X}_\delta\|_{(\Phi),\mu\otimes\mu} > x) \leq \frac{\beta}{x} .$$

iii) Sous l'hypothèse (H_2) , pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une variable aléatoire $\eta = \eta(\omega)$ presque sûrement strictement positive telle que :

$$A \in \mathfrak{J} , \ \mu(A) < \eta(\omega) \Rightarrow \|\tilde{X}_\delta(\omega,.) I_{A\times A}\|_{(\Phi),\mu\otimes\mu} \leq \beta(1+\varepsilon)$$

où la constante β est la même qu'en ii).

Démonstration : i) Pour toute constante $\gamma > 0$, par définition de la norme de Luxemburg, on a :

$$\{\omega : \|\tilde{X}(\omega,.)\|_{(\Phi),\mu\otimes\mu} \leq \gamma\} = \{\omega : \iint_{T\times T} \Phi(\frac{\tilde{X}(\omega,.)}{\gamma}) d\mu\otimes\mu \leq 1\} .$$

Les hypothèses de mesurabilité de X entraînent la mesurabilité du second ensemble et de là le résultat.

ii) D'après l'hypothèse (H_2) , il existe une constante

$$\beta = \|\tilde{X}_\delta\|_{(\Phi),P\otimes\mu\otimes\mu} ,$$

telle que :

$$\iint_{T\times T} E\Phi(\frac{\tilde{X}}{\beta}) d\mu\otimes\mu \leq 1 .$$

Pour tout $x \geq \beta$, l'inégalité de Čebičev, la mesurabilité de X et la convexité de Φ nous donnent

$$\begin{aligned} P(\|\tilde{X}_\delta\|_{(\Phi),\mu\otimes\mu} > x) &\leq P(\iint_{T\times T} \Phi(\frac{\tilde{X}_\delta}{x})\, d\mu\otimes\mu > 1) , \\ &\leq E \iint_{T\times T} \Phi(\frac{\tilde{X}_\delta}{x})\, d\mu\otimes\mu , \\ &\leq \frac{\beta}{x} . \end{aligned}$$

C'est le résultat.-

iii) Le nombre β étant la même constante que précédemment, pour tout $\varepsilon>0$, on pose $\gamma=\frac{1}{(1+\varepsilon)\beta}$; alors $\Phi(\gamma\tilde{X}_\delta)$ est P-presque sûrement $\mu\otimes\mu$-intégrable. L'application de la propriété 0.2.2. nous donne le résultat annoncé.-

On remarquera que le résultat ii) ci-dessus n'est pas très efficace ; il ne nous assure même pas de l'intégrabilité de $\|\tilde{X}\|_{(\Phi),\mu\otimes\mu}$. En fait, dans la plupart des applications que nous verrons, nous obtiendrons des majorations beaucoup plus précises qui nous permettront de vérifier au moins l'intégrabilité de la norme de $\tilde{X}$.

Nous en venons à présent aux deux résultats principaux de ce paragraphe. Le premier théorème nous donne une condition suffisante pour qu'une fonction aléatoire ait presque sûrement ses trajectoires majorées :

THEOREME 1.2.5. - Soient (T,d) un espace métrique séparable et $(\Omega,\mathcal{G},P)$ un espace d'épreuves. Soit X une fonction aléatoire réelle définie sur T, vérifiant l'hypothèse (H_1) et telle que l'écart d'ordre 1 induit par X sur T est bien défini. De plus on suppose que le δ-diamètre, $\delta(T)$, de T, est fini et que :

$$\sup_{t\in T}\int_0^{\delta(T)}\Phi^{-1}\left(\frac{1}{\mu^2(B_\delta(t,u))}\right)du<\infty ,$$

où Φ et μ sont déterminées par (H_1). Dans ces conditions il existe une partie négligeable N de Ω telle que pour tout $\omega\notin N$ et tout $t\in T$ on ait :

$$\left|X(\omega,t)-\int_T X(\omega,s)d\mu(s)\right|\le 6\|\tilde{X}_\delta(\omega,.)\|_{(\Phi),\mu\otimes\mu}\sup_{s\in T}\int_0^{\frac{\delta(T)}{2}}\Phi^{-1}\left(\frac{1}{\mu^2(B_\delta(s,u))}\right)du .$$

Démonstration : Nous allons appliquer le corollaire 1.1.4. pour $\rho=\mathrm{Id}$ et $S=T$. Pour tout $t\in T$ et tout entier n, positif, comme dans le paragraphe 1.1. et le lemme 1.2.1, nous posons :

$$X_n(t) = X_n(t;T,\delta,\delta(T)) = \frac{1}{\mu_n(t,T,\delta,\delta(T))} \int_{B_n(t,T,\delta,\delta(T)} X(u)d\mu(u) ,$$

où μ est la mesure de probabilité déterminée par (H_1) . Nous allons vérifier les hypothèses du corollaire 1.1.4. La condition i) est valable pour tout ω en dehors d'une partie négligeable N_o et ceci en vertu de (H_1) . Pour la condition ii) il suffit d'appliquer le lemme 1.2.1 ; en effet comme la série de terme général $\frac{\delta(T)}{2^n}$ est convergente, pour tout $t \in T$, $X_n(t)$ converge presque sûrement vers $X(t)$ quand n tend vers l'infini. Soit, pour t fixé, N_t l'ensemble de divergence, qui est négligeable. La troisème condition est satisfaite par hypothèse. L'application du corollaire, nous donne pour tout $t \in T$, l'existence d'une partie négligeable N_t de Ω telle que pour tout $\omega \notin N_o \cup N_t$, on a :

$$|X(\omega,t)-\int_T X(\omega,u)d\mu(u)| \leq 6\|\tilde{X}_\delta(\omega,.)\|_{(\Phi),\mu\otimes\mu} \sup_{s\in T} \int_o^{\frac{\delta(T)}{2}} \Phi^{-1}(\frac{1}{\mu^2(B(s,v))}) dv .$$

Soit $(t_n ; n \in \mathbb{N})$ une suite dense dans T ; la continuité en probabilité de X entraîne que cette suite est séparante. Soit N_1 la partie négligeable de Ω associé à la séparabilité de X pour cette suite. Pour tout $\omega \notin N_1$ et tout $t \in T$ on a :

$$|X(\omega,t)-\int_T X(\omega,u)d\mu(u)| \leq \limsup_{t_n\to t} |X(\omega,t_n)-\int_T X(\omega,u)d\mu(u)| .$$

En posant $N = N_o \cup N_1 \cup (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_{t_n})$, pour tout $\omega \notin N$, qui est une partie négligeable de Ω , et tout $t \in T$, nous en déduisons la majoration annoncée.-

Remarquons que l'hypothèse que nous avons faite sur le δ - diamètre de T n'est pas une hypothèse artificielle : c'est une condition nécessaire pour que $E(\sup_{t\in T}|X(t)|)$ soit fini.

Le théorème précédent se généralise aisément, toujours en utilisant le corollaire 1.1.4, à une partie quelconque mesurable S de Ω et à une fonction ρ vérifiant les hypothèses de régularité adéquates. Notons également que dans le cas des fonctions de Young de type puissance, nous obtenons aisément un résultat de majoration analogue au corollaire 1.1.6, pour les fonctions aléatoires.

Comme dans le cas des fonctions réelles, le théorème précédent justifie le nom de mesure majorante. De manière précise nous posons :

DEFINITION 1.2.6. - Soient (T,d) un espace métrique séparable et $(\Omega,\mathcal{G},P)$ un espace d'épreuves. Soit X une fonction aléatoire réelle telle que l'écart d'ordre 1, δ, induit sur T par X est bien défini. On dira qu'une mesure de probabilité μ sur $(T,\mathcal{T})$ est une Φ-mesure majorante pour X par rapport à δ, si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

i) $\tilde{X}_\delta \in L^\Phi(T\times T,\mu\otimes\mu)$ P-presque sûrement

ii) $$\sup_{t\in T}\int_0^{\frac{\delta(T)}{2}} \Phi^{-1}\left(\frac{1}{\mu^2(B_\delta(t,u))}\right) du < \infty .$$

Dans la plupart des cas où nous appliquerons la méthode, la première condition sera vérifiée pour toute mesure de probabilité μ. Donc une Φ-mesure majorante pour une fonction aléatoire sera une Φ-mesure majorante sur T par rapport à l'écart δ au sens de la définition 1.1.5.

Nous en venons à présent au deuxième résultat important de ce paragraphe à savoir un théorème de continuité. Nous allons obtenir, comme dans le paragraphe 1.1, une majoration des accroissements d'une fonction aléatoire.

THEOREME 1.2.7. - Soient (T,d) un espace métrique séparable et $(\Omega,\mathcal{G},P)$ un espace d'épreuves. Soit X une fonction aléatoire réelle, définie sur T et telle que l'écart d'ordre 1 induit sur T par X soit bien défini. On suppose qu'il existe sur $(T,\mathcal{T})$ une mesure de probabilité μ qui est une Φ-mesure

<u>majorante pour</u> X <u>par rapport à</u> δ , <u>et pour tout</u> ε <u>strictement positif on</u> <u>définit la variable aléatoire</u>

$$Y_\varepsilon(\omega) = \|\tilde{X}_\delta(\omega,.)I_{\{(u,v):\delta(u,v)<2\varepsilon\}}\|_{(\Phi),\mu\otimes\mu} .$$

<u>Dans ces conditions il existe une variable aléatoire</u> Y'_ε <u>de même loi</u> <u>que</u> Y_ε <u>telle que pour tout</u> ε <u>strictement positif on ait :</u>

$$\delta(s,t)<\varepsilon \Rightarrow |X(\omega,s)-X(\omega,t)| \leq 12\, Y'_\varepsilon(\omega) \sup_{u\in T} \int_0^{\frac{\delta(s,t)}{2}} \Phi^{-1}\left(\frac{1}{\mu^2(B_\delta(u,v))}\right)dv .$$

<u>Démonstration</u> : Remarquons tout d'abord qu'en vertu de la proposition 1.2.4. i), Y_ε est bien une variable aléatoire qui est majorée par $\|\tilde{X}(\omega,.)\|_{(\Phi),\mu\otimes\mu}$. La démonstration est immédiate à partir de la proposition 1.1.7. et du théorème précédent, en remarquant que si

$$A = B(s,\frac{\delta(s,t)}{2}) \cup B(t,\frac{\delta(s,t)}{2}) ,$$

alors

$$A\times A \subset \{(u,v) : \delta(u,v)<2\varepsilon\} ,$$

dès que $\delta(s,t)$ est plus petit que ε . Pour avoir le résultat annoncé il reste à poser $Y'_\varepsilon = Y_\varepsilon$ en dehors du négligeable associé à la séparabilité de X et à la convergence presque sûre de X_n , et $Y_\varepsilon = +\infty$ sur ce dernier.-

Les différents choix de Φ et μ étant illimités, les théorèmes 1.2.5. et 1.2.7 ont un champ très vaste d'applications. Nous en verrons quelques-unes dans les chapitres suivants. En fait le reste de notre travail est consacré à la mise en oeuvre de la méthode des mesures majorantes pour des fonctions aléatoires particulières. Nous allons conclure ce paragraphe par un corollaire qui nous donne une condition suffisante de continuité, condition que nous utiliserons par la suite.

COROLLAIRE 1.2.8. - Soient (T,d) un espace métrique séparable et $(\Omega,\mathcal{G},P)$ un espace d'épreuves. Soient X une fonction aléatoire, définie sur T, et μ une Φ-mesure majorante pour X par rapport à δ. On suppose de plus que X vérifie l'hypothèse (H_2). Une condition suffisante pour que X ait ses trajectoires presque sûrement continues est que :

$$\lim_{\varepsilon\to o}\ \sup_{t\in T}\int_o^{\varepsilon}\Phi^{-1}\left(\frac{1}{\mu^2(B_\delta(t,u))}\right)du = 0 .$$

Dans ces conditions on a les propriétés suivantes :

i) Il existe une variable aléatoire Y positive telle que pour tout $s,t\in T$ on ait :

$$|X(\omega,s)-X(\omega,t)| \leq 12\,Y(\omega)\sup_{u\in T}\int_o^{\frac{\delta(s,t)}{2}}\Phi^{-1}\left(\frac{1}{\mu^2(B_\delta(u,v))}\right)dv .$$

ii) Il existe une variable aléatoire $\varepsilon=\varepsilon(\omega)$, presque sûrement strictement positive et une constante α_X, positive, telle que :

$$\delta(s,t)<\varepsilon(\omega) \Rightarrow |X(\omega,s)-X(\omega,t)|\leq 12\,\alpha_X\sup_{u\in T}\int_o^{\frac{\delta(s,t)}{2}}\Phi^{-1}\left(\frac{1}{\mu^2(B_\delta(u,v))}\right)dv .$$

Démonstration : Comme δ est d-continu, il suffit de montrer la δ-continuité des trajectoires de X. Le fait que la condition est suffisante découle immédiatement du théorème 1.2.7. où nous avons majoré les accroissements de X. La propriété i) est la conclusion de ce théorème où nous avons majoré Y_ε par $\|\tilde{X}(\omega,.)\|_{(\Phi),\mu\otimes\mu}$. Pour montrer la propriété ii), remarquons que quand ε tend vers 0 la quantité

$$\mu\otimes\mu(\{(u,v) : 0<\delta(u,v)<\varepsilon\})$$

tend également vers 0. X vérifiant l'hypothèse (H_2), la proposition 1.2.4. iii) nous donne le résultat annoncé.-

Les résultats précédents se généralisent aisément au cas où ρ n'est pas réduit à l'identité. Notons également que pour les fonctions de Young de type puissance, on obtient les conditions qui découlent du corollaire 1.1.10. Dans ce cas particulier on sait de plus que la variable aléatoire $Y(\omega)$ est intégrable à l'ordre r ; ceci se déduit de la forme particulière de la norme de Luxemburg dans ce cas.

Dans la cinquième partie nous verrons également que la condition suffisante de continuité est également suffisante, dans certains cas, pour la propriété du théorème central limite.-

II. FONCTIONS ALEATOIRES ASSOCIEES A DES FONCTIONS DE YOUNG DE TYPE EXPONENTIEL.

Dans cette deuxième partie de notre travail, nous étudions la régularité des trajectoires de fonctions aléatoires dont les accroissements, réduits par l'écart d'ordre deux, sont des éléments d'un espace $L^{\Phi_\alpha}(T,\mu)$. Dans un premier temps, nous appliquons la méthode des mesures majorantes, pour aborder ensuite une méthode plus générale : la méthode d'Orlicz. Nous terminons enfin par quelques exemples.

2.1. Méthode des mesures majorantes.

L'application des résultats généraux de la partie précédente aux fonctions aléatoires associées à une fonction Φ_α , constitue une généralisation des résultats obtenus par X. Fernique ([11],[12]) sur les fonctions aléatoires gaussiennes.

Dans la suite nous aurons besoin du lemme technique suivant :

LEMME 2.1.1. - Soient (T,d) un espace métrique séparable et μ une mesure de probabilité sur $(T,\mathfrak{T})$. Pour toute fonction $f\in L^{\Phi_\alpha}(T,\mu)$ et pour tout nombre réel $a\geq \|f\|_{(\Phi_\alpha,1),\mu}$, on a :

$$\int_T \exp\left(\tfrac{1}{2}\left|\frac{f(t)}{a}\right|^\alpha\right)d\mu(t)\leq\sqrt{e}+C(\alpha)\ .$$

Pour la démonstration, on utilise essentiellement la définition de la norme de Luxemburg et l'inégalité

$$x(e^{\frac{x^\alpha}{2}}-1)\leq C(\alpha)\Phi_{\alpha,1}(x)\ ,$$

pour tout $x\geq 0$, avec $C(\alpha) = ([\frac{1}{\alpha}]+1)!\,2^{[\frac{1}{\alpha}]+1}$.

Le premier résultat que nous énonçons est consacré à l'évaluation de la loi de probabilité de la norme de Luxemburg d'une fonction aléatoire à trajectoires dans un espace L^{Φ_α}. C'est l'application de la proposition générale 1.2.4. aux fonctions de Young Φ_α.

PROPOSITION 2.1.2. - Soient (T,d) un espace métrique séparable et $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espace d'épreuves. Soit X une fonction aléatoire réelle, définie sur T, telle qu'il existe une constante $a>0$ et un nombre réel $\alpha>0$, tels que pour tout t, $t\in T$, on ait :

$$E(\Phi_{\alpha,1}(\frac{X(t)}{a}))\leq 1 .$$

Dans ces conditions, pour toute mesure de probabilité μ sur $(T,\mathcal{T})$ on a les propriétés suivantes :

i) Les trajectoires de X appartiennent P-presque sûrement à l'espace d'Orlicz $L^{\Phi_\alpha}(T,\mu)$.

ii) Pour tout $x>a2^{1/\alpha}$ on a :

$$P(\|X\|_{(\Phi_{\alpha,1}),\mu}>x)\leq (C(\alpha)+\sqrt{e})2^{-\frac{x^\alpha}{2a^\alpha}} ,$$

et il existe une constante C positive telle que :

$$E(\|X\|_{(\Phi_{\alpha,1}),\mu})\leq C .$$

iii) Pour tout $\varepsilon>0$, il existe une variable aléatoire $\eta=\eta(\omega)$ presque sûrement strictement positive telle que :

$$A\in\mathcal{T},\ \mu(A)<\eta(\omega) \Rightarrow \|X(\omega)I_A\|_{(\Phi_{\alpha,1}),\mu}\leq(1+\varepsilon)a .$$

Démonstration : i) le résultat est immédiat à partir de la norme de Luxemburg.

ii) La définition de cette norme, l'application de l'inégalité de Čebičev, de celle de Jensen à la fonction x^p et enfin la mesurabilité de X et le théorème de Fubini, nous donnent :

$$P(\|X\|_{(\Phi_{\alpha,1}),\mu} > x) \leq P(\int_T \Phi_{\alpha,1}(\frac{X}{x})d\mu > 1) \ ,$$

$$\leq P(\int_T \exp(|\frac{X}{x}|^{\alpha})d\mu > 2) \ ,$$

$$\leq 2^{-p} \int_T E(\exp p\,|\frac{X}{x}|^{\alpha})\,d\mu \ .$$

Choisissons $p = x^{\alpha}/2a^{\alpha}$, $p > 1$; d'où $x > a2^{1/\alpha}$. Du lemme 2.1.1. on déduit alors

$$P(\|X\|_{(\Phi_{\alpha,1}),\mu} > x) \leq (C(\alpha) + \sqrt{e})2^{-\frac{x^{\alpha}}{2a^{\alpha}}} \ ;$$

c'est le premier résultat. Une égalité classique d'intégration nous donne ensuite :

$$E(\|X\|_{(\Phi_{\alpha,1}),\mu}) = \int_0^{+\infty} P(\|X\|_{(\Phi_{\alpha,1}),\mu} > x)dx \ ,$$

$$\leq a2^{1/\alpha} + (C(\alpha) + \sqrt{e}) \int_0^{+\infty} 2^{-\frac{x^{\alpha}}{2a^{\alpha}}} dx \ ;$$

par un changement de variable, on déduit immédiatement le deuxième résultat avec

$$C = a2^{1/\alpha} + a(C(\alpha) + \sqrt{e})(\frac{2}{\log 2})^{1/\alpha}\,\Gamma(\frac{1}{\alpha}) \ .$$

Notons qu'un calcul analogue, nous donnerait une majoration de $E(\|X\|^r_{(\Phi_{\alpha,1}),\mu})$ pour tout $r > 0$.

iii) Le résultat se déduit de la proposition 1.2.4. iii).-

Nous abordons à présent les résultats de majoration des trajectoires de fonctions aléatoires associées à des fonctions Φ_α . Comme pour l'étude des processus gaussiens, l'écart que nous utiliserons sera :

$$\delta^2(s,t) = E|X(s)-X(t)|^2 ,$$

que nous supposerons toujours d-continu. Dans ces conditions on pourra appliquer le lemme 1.2.1. : pour toute suite de nombres réels $r = (r_n ; n \in \mathbb{N})$, strictement positifs, tels que la série $\sum_n r_n$ converge,

$$X_n(t) = X_n(t;T,\delta,r) = \frac{1}{\mu_n(t,T,\delta,r)} \int_{B_n(t,T,\delta,r)} X(u)d\mu(u)$$

converge, pour tout $t \in T$, presque sûrement vers $X(t)$. Comme dans la partie I on note

$$\tilde{X}_{Id,\delta}(s,t) = \tilde{X}_\delta(s,t) = \frac{X(s)-X(t)}{\delta(s,t)} I_{\{(u,v):\delta(u,v)\neq o\}}(s,t) .$$

S'il n'y a pas de confusion possible nous omettrons les indices. L'hypothèse générale que nous ferons constamment sur $\tilde{X}_\delta$ est la suivante :

(H) <u>Il existe deux nombres réels,</u> α <u>et</u> a , <u>strictement positifs, tels que pour tout</u> $s,t \in T$ <u>on ait</u> :

$$E(\Phi_{\alpha,1}(\frac{\tilde{X}_\delta(s,t)}{a})) \leq 1 .$$

Cette hypothèse implique (H_2) ; nous savons (proposition 2.1.2.) évaluer la loi de $\|\tilde{X}_\delta\|_{(\Phi_{\alpha,1}),\mu\otimes\mu}$.

Sous ces hypothèses nous avons le théorème de majoration suivant :

THEOREME 2.1.3. - <u>Soient</u> (T,d) <u>un espace métrique séparable et</u> $(\Omega,\mathcal{G},P)$ <u>un espace d'épreuves. Soit</u> X <u>une fonction aléatoire réelle définie sur</u> T <u>et vérifiant l'hypothèse</u> (H) . <u>De plus on suppose que le</u> δ<u>-diamètre</u> $\delta(T)$ <u>de</u> T <u>est fini</u>

et qu'il existe une mesure de probabilité μ sur $(T,\mathfrak{T})$ telle que :

$$\sup_{t\in T}\int_0^{\delta(T)}\left(\log\left(1+\frac{1}{\mu(B_\delta(t,u))}\right)\right)^{1/\alpha}du<\infty\ ,$$

où α est déterminé par l'hypothèse (H) . Dans ces conditions il existe une partie négligeable N de Ω et une constante C , positive, telles que pour tout $\omega\notin N$ et tout $t\in T$ on ait :

$$|X(\omega,t)-\int_T X(\omega,s)d\mu(s)|\leq C\|\widetilde{X}_\delta(\omega,.)\|_{(\Phi_{\alpha,1}),\mu\otimes\mu}\sup_{u\in T}\int_0^{\frac{\delta(T)}{2}}\left(\log\left(1+\frac{1}{\mu^2(B_\delta(u,v))}\right)\right)^{1/\alpha}dv\ .$$

Démonstration : En appliquant la technique de la démonstration du corollaire 1.1.4, pour tout entier k , l'inégalité (0.2.3) nous donne :

$$\left\|\frac{I_{B_k\times B_{k-1}}}{\mu_k\mu_{k-1}}\right\|_{\Psi_{\alpha,1},\mu\otimes\mu}\leq(1+3C(\alpha)2^{1/\alpha})\iint_{T\times T}\frac{I_{B_k\times B_{k-1}}}{\mu_k\mu_{k-1}}\left(\log\left(1+\frac{I_{B_k\times B_{k-1}}}{\mu_k\mu_{k-1}}\right)\right)^{1/\alpha}d\mu\otimes\mu\ ,$$

$$\leq(1+3C(\alpha)2^{1/\alpha})\left(\log\left(1+\frac{1}{\mu_k^2}\right)\right)^{1/\alpha}\ .$$

La suite de la démonstration est identique à celle du corollaire 1.1.4. La conclusion s'établit en utilisant la séparabilité de X , comme dans le théorème 1.2.5. avec

$$C=6(1+3C(\alpha)2^{1/\alpha})\ .-$$

Notons que la conclusion du théorème serait encore vérifiée si nous avions seulement supposé que X vérifie l'hypothèse (H_1) , mais alors nous ne pourrions évaluer la loi de $\|\widetilde{X}_\delta\|_{(\Phi_{\alpha,1}),\mu\otimes\mu}$ de manière aussi précise que sous l'hypothèse (H) .

D'après la définition 1.2.6, une mesure de probabilité μ sur $(T,\mathfrak{T})$ sera appelée une mesure majorante pour une fonction aléatoire X , qui vérifie l'hypothèse (H) , si

$$\sup_{t\in T}\int_o^{\delta(T)}(\log(1+\frac{1}{\mu(B_\delta(t,u))}))^{1/\alpha}du<\infty .$$

Remarquons que cette fonction de μ est semi-continue inférieurement. Si T est compact alors l'ensemble des mesures de probabilité sur $(T,\mathcal{T})$ l'est également ; dans ce cas, il existe des mesures de probabilité μ_o telles que la fonction précédente soit minimale. On dira alors que μ_o est une meilleure mesure majorante.

Notons également que la fonction $(\log(1+\frac{1}{x}))^{1/\alpha}$ étant convexe pour $x\in\,]0,1]$, si X est une fonction aléatoire définie sur $[0,1]$, vérifiant l'hypothèse (H) , stationnaire et périodique de période 1 , alors, l'ensemble des mesures majorantes étant fermé, la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$ est une meilleure mesure majorante.

Le théorème 2.1.3. nous permet d'obtenir une condition suffisante de majoration. On a :

COROLLAIRE 2.1.4. - Soient (T,d) un espace métrique séparable et $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espace d'épreuves. Soit X une fonction aléatoire définie sur T , vérifiant l'hypothèse (H) et telle qu'il existe une mesure de probabilité μ sur $(T,\mathcal{T})$ telle que :

$$\iint_{T\times T}E(X(t)X(s))d\mu(t)d\mu(s) = 0 .$$

Une condition suffisante pour que X ait presque sûrement ses trajectoires majorées est que μ soit une mesure majorante pour X ; il existe alors une constante C , positive, telle que :

$$E(\sup_{t\in T}|X(t)|)\le C\sup_{s\in T}\int_o^{\frac{\delta(T)}{2}}(\log(1+\frac{1}{\mu^2(B_\delta(s,u))}))^{1/\alpha}du .$$

Démonstration : L'hypothèse que l'on a faite sur la covariance de X implique que le terme de centrage $\int_T X(s)d\mu(s)$ est nul. On obtient le résultat annoncé à l'aide du théorème 2.1.3. et de la proposition 2.1.2. ii) avec

$$C = 6(1+3C(\alpha)2^{1/\alpha})[a2^{1/\alpha}+(C(\alpha)+\sqrt{e})a(\frac{2}{\log 2})^{1/\alpha}\Gamma(\frac{1}{\alpha})] \text{ . -}$$

Nous abordons à présent la deuxième partie de ce paragraphe où nous étudions la continuité des trajectoires des fonctions aléatoires vérifiant (H) . Le théorème que nous allons présenter fournit une majoration des accroissements de X .

THEOREME 2.1.5. - Soient (T,d) un espace métrique séparable et $(\Omega,\mathcal{G},P)$ un espace d'épreuves. Soit X une fonction aléatoire réelle définie sur T , vérifiant l'hypothèse (H) et admettant une mesure majorante μ sur $(T,\mathcal{J})$, par rapport à δ . Pour tout $\varepsilon>0$ on définit la variable aléatoire :

$$Y_\varepsilon(\omega) = \|\tilde{X}_\delta(\omega,.)I_{\{(u,v):\delta(u,v)<2\varepsilon\}}\|_{(\Phi_{\alpha,1}),\mu\otimes\mu} \text{ .}$$

Dans ces conditions, il existe une partie négligeable N de Ω et une constante C , positive, telles que pour tout $\omega\notin N$ et pour tout $\varepsilon>0$, on ait :

$$\delta(s,t)<\varepsilon \Rightarrow |X(\omega,s)-X(\omega,t)| \leq C\, Y_\varepsilon(\omega) \sup_{u\in T}\int_o^{\frac{\delta(s,t)}{2}} (\log(1+\frac{1}{\mu^2(B_\delta(u,v))}))^{1/\alpha}dv \text{ .}$$

Démonstration : Elle est identique à celle du théorème 1.2.7 ; pour l'évaluation des normes d'Orlicz des indicatrices, on utilise la majoration

$$\frac{1}{\mu_k\mu_{k-1}}\|I_{B_k\times B_{k-1}}-I_{B_{k-1}\times B_k}\|_{\Psi_{\alpha,1},\mu\otimes\mu} \leq 2(1+3C(\alpha)2^{1/\alpha})(\log(1+\frac{1}{\mu_k^2}))^{1/\alpha} \text{ ,}$$

qui nous donne le résultat avec $C = 12(1+3C(\alpha)2^{1/\alpha})$. -

Cette majoration des accroissements nous donne une condition suffisante de continuité :

COROLLAIRE 2.1.6. - Soient (T,d) un espace métrique séparable et $(\Omega,\mathcal{G},P)$ un espace d'épreuves. Soit X une fonction aléatoire réelle, définie sur T, vérifiant l'hypothèse (H) et admettant une mesure majorante μ sur $(T,\mathcal{J})$ par rapport à δ, que l'on suppose d-continu. Une condition suffisante pour que X ait presque sûrement ses trajectoires continues est que :

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sup_{t\in T} \int_0^{\varepsilon} \left(\log\left(1+\frac{1}{\mu(B_\delta(t,u))}\right)\right)^{1/\alpha} du = 0 .$$

Dans ces conditions on a les propriétés suivantes :

i) Il existe une variable aléatoire $Y(\omega)$ et une constante C, positives, telles que pour tout s et t de T, on ait :

$$|X(\omega,s)-X(\omega,t)| \leq C\, Y(\omega) \sup_{u\in T} \int_0^{\frac{\delta(s,t)}{2}} \left(\log\left(1+\frac{1}{\mu^2(B_\delta(u,v))}\right)\right)^{1/\alpha} dv .$$

ii) Il existe une variable aléatoire $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$, presque sûrement strictement positive et une constante C, positive, telles que :

$$\delta(s,t) < \varepsilon(\omega) \Rightarrow |X(\omega,s)-X(\omega,t)| \leq C \sup_{u\in T} \int_0^{\frac{\delta(s,t)}{2}} \left(\log\left(1+\frac{1}{\mu^2(B_\delta(u,v))}\right)\right)^{1/\alpha} dv .$$

Démonstration : L'écart δ étant d-continu, il suffit d'établir la δ-continuité des trajectoires de X. Le fait que la condition est suffisante, est une conséquence immédiate de la majoration des accroissements de X, obtenue au théorème précédent. La première propriété découle de celui-ci en posant :

$$Y(\omega) = \begin{cases} \|\widetilde{X}_\delta(\omega,\cdot)\|_{(\Phi_\alpha,1),\mu\otimes\mu} & \text{si } \omega \notin N , \\ +\infty \text{ sinon ,} & \end{cases}$$

et $C = 12(1+3C(\alpha)2^{1/\alpha})$. Pour montrer la seconde, il suffit, comme dans le cas général (corollaire 1.2.8), de remarquer que quand ε tend vers 0 , la quantité

$$\mu\otimes\mu\{(u,v):0<\delta(u,v)<2\varepsilon\} ,$$

tend vers 0 . D'après la proposition 2.1.2. iii), on en déduit que la variable $Y_\varepsilon(\omega)$ du théorème 2.1.5, satisfait à :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} Y_\varepsilon(\omega) \le a ,$$

P - presque sûrement, a étant déterminé par l'hypothèse (H) . On a le résultat avec $C = 12a(1+3C(\alpha)2^{1/\alpha})$. -

Pour les deux résultats que nous allons énoncer, on se place dans le cas où la mesure d'une boule ne dépend pas du centre de celle-ci. Dans le premier nous obtenons une condition suffisante de continuité faisant intervenir la structure topologique de T , induite par δ , et plus particulièrement l'exposant d'entropie de T .

COROLLAIRE 2.1.7. - Soit X une fonction aléatoire réelle définie sur un espace métrique séparable (T,d) et sur un espace d'épreuves $(\Omega,\mathcal{G},P)$, vérifiant l'hypothèse (H) . Pour tout $h>0$, on note $N(h)$ le nombre minimal de δ - boules ouvertes de rayon h recouvrant T . Une condition suffisante pour que X ait presque sûrement ses trajectoires continues, est que la série de terme général $\frac{1}{2^n}(\log N(\frac{1}{2^n}))^{1/\alpha}$ soit convergente. Dans ces conditions on a les propriétés :

i) Il existe une variable aléatoire $Y(\omega)$ et une constante C , positives, telles que pour tout s et t de T on ait :

$$|X(\omega,s)-X(\omega,t)| \le C\, Y(\omega) \int_0^{\frac{\delta(s,t)}{4}} \left(\log\left(1+\frac{N^2(u)}{u^2}\right)\right)^{1/\alpha} du .$$

ii) Il existe une variable aléatoire $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$, presque sûrement strictement positive, et une constante C , positive, telles que :

$$\delta(s,t) < \varepsilon(\omega) \Rightarrow |X(\omega,s)-X(\omega,t)| \le C \int_0^{\frac{\delta(s,t)}{4}} \left(\log\left(1+\frac{N^2(u)}{u^2}\right)\right)^{1/\alpha} du \, .$$

En particulier la condition suffisante est vérifiée dès que l'exposant d'entropie de T est strictement inférieur à α .

Démonstration : C'est une conséquence du corollaire 2.1.6, que l'on applique à une mesure adaptée. Pour tout entier n , on note S_n l'ensemble des points s de T tels que la famille des boules ouvertes centrées en ces points et de rayon $\frac{1}{2^n}$ forme un recouvrement minimal de T . Avec les notations de l'énoncé nous avons :

$$\mathrm{Card}(S_n) = N\left(\frac{1}{2^n}\right) .$$

On pose

$$\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} \sum_{s\in S_n} \frac{\varepsilon_s}{N\left(\frac{1}{2^n}\right)} ,$$

où ε_s est la mesure de probabilité ponctuelle au point s ; on vérifie que

$$\sup_{t\in T} \int_0^{1/2^n} \left(\log\left(1+\frac{1}{\mu(B_\delta(t,u))}\right)\right)^{1/\alpha} du \le \sum_{k\ge n+1} \frac{1}{2^k}\left(\log\left(1+2^k N\left(\frac{1}{2^k}\right)\right)\right)^{1/\alpha} .$$

Le corollaire 2.1.6. nous montre alors que puisque le terme de droite est le reste d'une série convergente, X a presque sûrement ses trajectoires continues. D'autre part comme

$$\sup_{u\in T} \int_0^{\frac{\delta(s,t)}{2}} \left(\log\left(1+\frac{1}{\mu^2(B_\delta(u,v))}\right)\right)^{1/\alpha} dv \le 2 \int_0^{\frac{\delta(s,t)}{4}} \left(\log\left(1+\frac{N^2(v)}{v^2}\right)\right)^{1/\alpha} dv ,$$

ce même corollaire nous donne les deux propriétés.

Par ailleurs, en notant $r(T)$ l'exposant d'entropie de T, on a

$$r(T) = \limsup_{\varepsilon \to o} \frac{\log\log N(\varepsilon)}{\log \frac{1}{\varepsilon}} .$$

Si $r(T) < \alpha$, la série de terme général $\frac{1}{2^m}\left(\log N\left(\frac{1}{2^m}\right)\right)^{1/\alpha}$, se majore par une série géométrique convergente. D'où la condition suffisante.-

Le second résultat que nous donnons concerne des fonction aléatoires définies sur $[0,1]^n$ et dont l'écart d'ordre deux est majoré par une fonction. On a :

COROLLAIRE 2.1.8 : Sur $[0,1]^n$, muni de la distance usuelle $d(s,t) = \|s-t\|$ et de la mesure de Lebesgue, on considère une fonction aléatoire X vérifiant l'hypothèse (H) et telle que pour tout s et $t \in [0,1]^n$, on ait :

$$\delta^2(s,t) = E|X(s)-X(t)|^2 \leq f^2(\|s-t\|) ,$$

où f est une fonction définie sur R_+, positive, strictement croissante et continue. Une condition suffisante pour que X ait presque sûrement ses trajectoires continues est que

$$\int^{\infty} f(e^{-x^\alpha})dx < \infty ,$$

où α est déterminé par l'hypothèse (H). Dans ces conditions il existe une variable aléatoire $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$, presque sûrement strictement positive, et une constante C, positives, telles que

$$\delta(s,t) < \varepsilon(\omega) \Rightarrow |X(\omega,s)-X(\omega,t)| < C\, n^{1/\alpha}\left[f(\|s-t\|)\left(\log \frac{1}{\|s-t\|}\right)^{1/\alpha} + \int_{\left(\log \frac{1}{\|s-t\|}\right)^{1/\alpha}}^{\infty} f(e^{-x^\alpha})dx\right].$$

<u>Démonstration</u> : C'est une conséquence du corollaire 2.1.6. ii). En effet, si

λ désigne la mesure de Lebesgue sur $[0,1]^n$ et f^{-1} la fonction inverse de f , pour tout $u \in]0,f(\frac{1}{2})[$ et tout $t \in [0,1]^n$, on a :

$$\lambda(B_\delta(t,u)) \geq (2f^{-1}(u))^n ,$$

d'où on déduit pour tout $\varepsilon \in]0,f(\frac{1}{2})[$

$$\sup_{t\in[0,1]^n} \int_o^\varepsilon (\log(1+\frac{1}{\lambda^2(B_\delta(t,u))}))^{1/\alpha} du \leq$$

$$\leq (2n\,\frac{\log 3}{\log 2})^{1/\alpha}\left[\varepsilon(\log\frac{1}{f^{-1}(\varepsilon)})^{1/\alpha} + \int_{(\log\frac{1}{\varepsilon})^{1/\alpha}}^\infty f(e^{-x^\alpha})dx\right] .$$

Ceci nous donne la suffisance de la condition. Pour le deuxième résultat il suffit de reporter la majoration précédente dans celle du corollaire 2.1.6. ii) et on obtient

$$C = 12a(1+3C(\alpha)2^{1/\alpha})(2\,\frac{\log 3}{\log 2})^{1/\alpha} . -$$

Nous concluons ce paragraphe par un résultat qui nous sera très utile dans la cinquième partie de notre travail où nous étudions les fonctions aléatoires vérifiant l'hypothèse (H) pour lesquelles nous avons la propriété du théorème central limite.

COROLLAIRE 2.1.9 : Soient (T,d) un espace métrique séparable et $(\Omega,\mathcal{C},P)$ un espace d'épreuves. Soit X une fonction aléatoire définie sur T , telle qu'il existe deux nombres réels a et α strictement positifs tels que pour tout s et t de T on ait :

$$E(\Phi_{\alpha,1}(\frac{\tilde{X}_{Id,\delta}(s,t)}{a})) \leq 1 .$$

On suppose de plus que X admet une mesure majorante μ sur $(T,\mathcal{T})$, par rapport à δ . Dans ces conditions il existe une constante C positive telle que pour tout $\varepsilon > 0$ on ait :

$$E(\sup_{\delta(s,t)<\varepsilon} |X(s)-X(t)|) \leq C \sup_{u\in T} \int_0^{\frac{\varepsilon}{2}} \left(\log\left(1+\frac{1}{\mu^2(B_\delta(u,v))}\right)\right)^{1/\alpha} dv \, .$$

La démonstration est immédiate à partir du théorème 2.1.5. et de la proposition 2.1.2. ii). On obtient :

$$C = 12(1+3C(\alpha)2^{1/\alpha})[a2^{1/\alpha}+(C(\alpha)+\sqrt{e})(\frac{2}{\log 2})^{1/\alpha} a\Gamma(\frac{1}{\alpha})] \, . -$$

2.2. Méthode d'Orlicz.

Cette méthode nous fournit des conditions suffisantes de majoration et de continuité des trajectoires de fonctions aléatoires associées aux fonctions $\Phi_{\alpha,1}$ et qui admettent des représentations intégrales dans des espaces d'Orlicz.

Nous commençons par un lemme technique et un exemple.

LEMME 2.2.1. - i) *Sur un espace d'épreuves* $(\Omega,\mathcal{C},P)$ *on considère une variable aléatoire réelle* λ , *dont la loi est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, de densité* $(\alpha/\sqrt{2\pi})|x|^{\frac{\alpha}{2}-1}\exp(-2|x|^{\alpha})$, *où* α *est nombre réel strictement positif. Dans ces conditions on a* :

$$E(\lambda) = 0 \, , \, E(\lambda^2) = \frac{\Gamma(\frac{2}{\alpha}+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}2^{2/\alpha}} \, , \, E(e^{|\lambda|^{\alpha}}) = \sqrt{2} \, .$$

ii) *On pose* $\nu = \sigma\lambda/(E(\lambda^2))^{1/2}$ *et on suppose que*

$$\sigma \leq \frac{3}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\frac{2}{\alpha}+\frac{1}{2})}{2^{2/\alpha+1}} \, ;$$

alors $E(\Phi_{\alpha,1}(\nu)) \leq 1$. -

Exemple 2.2.2. – Considérons une suite de variables aléatoires indépendantes $(\lambda_n ; n \in \mathbb{N})$, avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_n = \sigma_n \lambda/(E(\lambda^2))$ où λ est la variable aléatoire du lemme précédent. On se donne également une suite numérique double $(a_{n,m} ; n,m \in \mathbb{N})$. Nous nous proposons d'examiner sous quelles conditions sur les écarts-type, on peut majorer la fonction aléatoire :

$$X_n(\omega) = \sum_{m \in \mathbb{N}} a_{n,m} \lambda_m(\omega) , \; n \in [1,N] .$$

Soit $(k_m ; m \in \mathbb{N})$ une suite de nombres réels strictement positifs de somme 1. L'application de l'inégalité (0.1.1) nous donne :

$$|X_n(\omega)| \leq 2^{1/\alpha} \sum_{m \in \mathbb{N}} |a_{n,m}| \left(\log\left(1+ \frac{|a_{n,m}|}{k_m}\right)\right)^{1/\alpha} + C(\alpha) \sum_{m \in \mathbb{N}} k_m \Phi_{\alpha,1}(\lambda_m(\omega)) .$$

D'après le lemme 2.2.1. ii), si pour tout entier m, σ_m est inférieur à

$\frac{3}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\frac{2}{\alpha} + \frac{1}{2})}{2^{2/\alpha+1}}$ alors

$$E(\sup_{n \in \mathbb{N}} |X_n|) \leq 2^{1/\alpha} \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{N}} |a_{n,m}| \left(\log\left(1+ \frac{|a_{n,m}|}{k_m}\right)\right)^{1/\alpha} + C(\alpha) .$$

Supposons que l'on connaisse la mesure de probabilité μ, sur $[1,N]$, répartissant le maximum de $|X_n|$, c'est-à-dire que

$$\mu(\{n\}) = P(\sup|X| = |X_n|) .$$

Dans ces conditions nous pouvons modifier le résultat précédent ; en effet, nous en déduisons

$$E(\sup|X|) \leq C(\alpha) + 2^{1/\alpha} \int_{[1,N]} d\mu(n) \sum_{m \in \mathbb{N}} |a_{n,m}| \left(\log\left(1+ \frac{|a_{n,m}|}{k_m}\right)\right)^{1/\alpha} .$$

Par passage à la limite sur $\mathbb{N}$, en désignant par $\tau(\mu)$ l'ensemble des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ de loi μ , nous avons :

i) Une condition suffisante pour que $E(\sup_{n\in\mathbb{N}} |X_n|)$ soit fini est :

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{m\in\mathbb{N}} |a_{n,m}| (\log(1+\frac{|a_{n,m}|}{k_m}))^{1/\alpha} < \infty .$$

ii) Une condition suffisante pour que $E(\sup_{\tau\in\tau(\mu)} |X\circ\tau|)$ soit fini est :

$$\int_{\mathbb{N}} d\mu(n) \sum_{m\in\mathbb{N}} |a_{n,m}| (\log(1+\frac{|a_{n,m}|}{k_m}))^{1/\alpha} < \infty .$$

iii) Une condition suffisante pour que $E(\sup_{n\in\mathbb{N}} |X_n|)$ soit fini est :

$$\sup_{\mu} \int_{\mathbb{N}} d\mu(n) \sum_{m\in\mathbb{N}} |a_{n,m}| (\log(1+\frac{|a_{n,m}|}{k_m}))^{1/\alpha} < \infty . -$$

Dans tous les cas nous avons une majoration explicite. Remarquons que la condition i) est du type "mesure majorante". Par contre, dans ii) et iii) on voit apparaître une nouvelle expression. C'est ce type de majoration que nous fournit la méthode d'Orlicz. Nous énonçons les résultats généraux.

THEOREME 2.2.3. - Soient S un espace métrisable, $\mathcal{S}$ la tribu engendrée par les boules de S et μ une mesure de probabilité sur $(S,\mathcal{S})$. Soient $(\Omega,\mathcal{A},P)$ un espace d'épreuves et Y une fonction aléatoire réelle, définie sur $\Omega\times S$, $\mathcal{A}\otimes\mathcal{S}$ - mesurable et telle qu'il existe deux nombres réels strictement positifs α et a , vérifiant pour tout $s\in S$:

$$E(\Phi_{\alpha,1}(\frac{Y(s)}{a})) \leq 1 .$$

Soient de plus T un ensemble et f une fonction définie sur $S\times T$.

Pour tout $t \in T$, on note f_t l'application de S dans $\mathbb{R}$ qui à s associe $f(s,t)$ et que l'on suppose $\mathcal{S}$-mesurable.

i) Si l'application $t \mapsto f_t$, de T dans $(L^{\Phi_\alpha}(S,\mu))^*$ est bornée, alors la fonction aléatoire définie sur T par :

$$X(\omega,t) = \int_S Y(\omega,s) f(s,t) d\mu(s) ,$$

a, presque sûrement, ses trajectoires majorées.

ii) Si T est un espace topologique et si l'application $t \mapsto f_t$, de T dans $(L^{\Phi_\alpha}(S,\mu))^*$ est faiblement continue, alors X a, presque sûrement, ses trajectoires continues.

iii) Soit π une mesure de probabilité sur $(T,\mathcal{T})$ et supposons que l'application $(s,t) \mapsto f(s,t)$, élément de $(L^{\Phi_\alpha}(S \times T, \mu \otimes \pi))^*$ est telle que :

$$\iint_{S \times T} |f(s,t)| (\log(1+|f(s,t)|))^{1/\alpha} d\mu(s) d\mu(t) < \infty .$$

Soit de plus $\tau : \Omega \to T$, une application mesurable, de loi π. Dans ces conditions, l'application $\omega \mapsto X(\omega,\tau(\omega))$ est majorée par une variable aléatoire intégrable et son espérance est inférieure à :

$$a(1+3C(\alpha)2^{1/\alpha}) \iint_{S \times T} |f(s,t)| \left(\log\left(1+\frac{|f(s,t)|}{\iint |f| d\mu \otimes \pi}\right)\right)^{1/\alpha} d\mu(s) d\pi(t) .$$

Démonstration : i) D'après les hypothèses que l'on a faites sur Y ; il existe une partie négligeable N de Ω, telle que pour tout $\omega \notin N$, $Y(\omega,.) \in L^{\Phi_\alpha}(S,\mu)$. Remarquons que les hypothèses de mesurabilité entraînent que la fonction aléatoire X est bien définie. Si $\| \|^*$ désigne la norme dans $(L^{\Phi_\alpha}(S,\mu))^*$, alors pour tout $\omega \notin N$ on a :

$$|X(\omega,t)| \leq \|Y(\omega,.)\|_{(\Phi_{\alpha,1}),\mu} \|f_t\|^* .$$

Comme la famille $(f_t ; t \in T)$ est bornée, nous en déduisons, pour tout $\omega \notin N$:

$$\sup_{t \in T} |X(\omega,t)| \leq \|Y(\omega,.)\|_{(\Phi_{\alpha,1}),\mu} \sup_{t \in T} \|f_t\|^* .$$

C'est le résultat. Remarquons que si on ne fait pas d'hypothèses supplémentaires, le membre de gauche n'est pas forcément une variable aléatoire.

ii) Avec les mêmes notations qu'en i), soit $\omega \notin N$ fixé, donc $Y(\omega,.) \in L^{\Phi_\alpha}(S,\mu)$. Pour simplifier les choses, supposons T métrisable ; alors pour tout $t_o \in T$ fixé et tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel $\eta > 0$ tel que, par hypothèse

$$d(t,t_o) < \eta \Rightarrow |<Y(\omega,.);f_t> - <Y(\omega,.);f_{t_o}>| < \varepsilon \ ;$$

nous avons le résultat.

iii) D'après le théorème de Fubini et les hypothèses de mesurabilité, pour π-presque tout $t \in T$, $f_t \in (L^{\Phi_\alpha}(S,\mu))^*$. Donc pour P-presque tout ω et π-presque tout t,

$$X(\omega,t) = \int_S Y(\omega,s) f(s,t) d\mu(s) \ ,$$

a bien un sens. La variable τ étant de loi π, nous en déduisons que, pour P-presque tout ω,

$$X(\omega,\tau(\omega)) = \int_S Y(\omega,s) f(s,\tau(\omega)) d\mu(s) \ ,$$

est bien définie. Remarquons que par composition l'application $Y(\omega,s)f(s,\tau(\omega))$ est $\mathcal{G}\otimes\mathcal{S}$-mesurable. D'où, en prenant l'espérance du module et en majorant par les normes, on a :

$$E(|X \circ \tau|) \leq \|Y\|_{(\Phi_{\alpha,1}),P\otimes\mu} \|f\|^*_{P\otimes\mu} .$$

Par définition de la norme de Luxemburg et d'après l'hypothèse sur Y, de l'inégalité (0.2.3) et du théorème du transfert, on a :

$$E|X\circ\tau| \le a(1+3C(\alpha)2^{1/\alpha}) \iint_{S\times T} |f(s,t)|\left(\log\left(1+\frac{|f(s,t)|}{\iint|f|d\mu d\pi}\right)\right)^{1/\alpha} d\mu(s)d\pi(t) .$$

C'est le résultat annoncé.-

Nous allons donner quelques exemples d'application de ce théorème.

EXEMPLE 2.2.4. - Soit $(X_i; i\in\mathbb{N})$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que $X_i = \sigma_i\lambda_i$, pour tout $i\in\mathbb{N}$, où $(\sigma_i; i\in\mathbb{N})$ est une suite de nombres réels strictement positifs et $(\lambda_i; i\in\mathbb{N})$ une suite de copies indépendantes de la variable λ du lemme 2.2.1. Soient de plus $\mu = (\mu_i; i\in\mathbb{N})$ une mesure de probabilité sur $\mathbb{N}$ telle que la série $\sum_{i\in\mathbb{N}} \sigma_i\mu_i$ converge et τ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ de loi μ . Dans ces conditions si $\tau(\mu)$ désigne l'ensemble des variables aléatoires de loi μ , on a :

$$\sup_{\tau\in\tau(\mu)} E|X\circ\tau| \le (1+3C(\alpha)2^{1/\alpha}) \sum_{i\in\mathbb{N}} \sigma_i\mu_i\left(\log\left(1+\frac{1}{\mu_i}\right)\right)^{1/\alpha} .$$

Démonstration : Pour pouvoir appliquer le théorème précédent, il nous faut définir Y , la fonction f et la mesure de probabilité π . On pose :

$$C = \sum_{\ell\in\mathbb{N}} \mu_\ell\sigma_\ell , \quad \pi = \frac{1}{C}\sum_{k\in\mathbb{N}} \mu_k\sigma_k\varepsilon_k ,$$

où ε_k est la mesure de probabilité concentrée au point k ; pour tous les entiers k et ℓ , on note

$$Y_k = \frac{X_k}{\sigma_k} , \quad f(k,\ell) = \frac{C}{\mu_k}\delta_{k\ell} ,$$

où $\delta_{k\ell}$ est le symbole de Kronecker. Comme $Y_k = \lambda_k$, d'après le lemme 2.2.1. i) $E(\Phi_{\alpha,1}(Y_k))$ est inférieur à 1 pour tout k et par conséquent $a = 1$. D'autre part

$$\int Y_k f(k,\ell)d\pi(k) = X_\ell ;$$

on a donc une représentation intégrale du type recherché. Comme

$$\iint f(k,\ell)d\mu(\ell)d\pi(k) = C \ ,$$

on obtient le résultat annoncé à l'aide du théorème 2.2.3. iii).-

EXEMPLE 2.2.5. - Soient μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ de médiane nulle, et λ une variable aléatoire de densité $(\frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}})|x|^{\frac{\alpha}{2}-1}\exp(-2|x|^{\alpha})$ avec α un nombre réel strictement positif. On pose

$$X(\omega,t) = t\lambda(\omega) \ ,$$

$$G(t) = \begin{cases} \mu\{s : s \geq t\} & \text{si} \quad t > 0 \ , \\ \mu\{s : s \leq t\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans ces conditions, si $\tau(\mu)$ désigne l'ensemble des variables aléatoires de loi μ, on a :

$$\sup_{\tau \in \tau(\mu)} E|X \circ \tau| \leq (1+3C(\alpha)2^{1/\alpha}) \int_{\mathbb{R}} G(t)(\log(1+\frac{1}{G(t)}))^{1/\alpha} dt \ .$$

Démonstration : On suppose que l'intégrale du second membre est finie. On pose

$$C = \int_{\mathbb{R}} G(t)dt \ ;$$

cette quantité est majorée par $(\log 2)^{-1/\alpha}$ fois l'intégrale de l'énoncé. Donc C est fini. Si C est nul, alors $G(t)$ est presque partout nulle ; c'est-à-dire que μ est concentrée en 0. Le résultat est alors immédiat. Supposons C non nul et posons :

$$d\pi(s) = \frac{G(s)}{C} ds \ ,$$

$$f(s,t) = \frac{t}{|t|} I_{[o,t]}(s) \frac{C}{G(s)} \ ;$$

la mesure π est bien une mesure de probabilité. Une intégration par parties nous donne :

$$\iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} |f(s,t)|d\mu(t)d\pi(s) = C .$$

D'autre part d'un calcul simple on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda(\omega)f(s,t)d\pi(s) = X(\omega,t) ;$$

Comme, d'après le lemme 2.2.1. i), $E(\Phi_{\alpha,1}(\lambda)) \leq 1$, l'application du théorème 2.2.3. iii) nous donne l'inégalité annoncée. -

Pour $\alpha = 2$, on retrouve le résultat connu (X. Fernique ([12])) dans le cadre gaussien. On peut généraliser l'exemple précédent.

EXEMPLE 2.2.6. - Soient g une fonction sur un ensemble T , μ une mesure de probabilité sur (T,g) et λ une variable aléatoire de densité

$$\frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}}|x|^{\frac{\alpha}{2}-1}\exp(-2|x|^{\alpha}) ,$$

où α est un nombre réel strictement positif. On pose

$$X(\omega,t) = g(t)\lambda(\omega) ,$$

$$G(t) = \mu\otimes\mu\{(u,v):|g(u)-g(v)|>|t|\} .$$

Si $\tau(\mu)$ désigne l'ensemble des variables aléatoires de loi μ , on a :

$$\sup_{\tau\in\tau(\mu)} E|X\circ\tau| \leq \tfrac{1}{2}(1+3C(\alpha)2^{1/\alpha}) \int_{\mathbb{R}} G(t)(\log(1+\frac{2}{G(t)}))^{1/\alpha}dt .$$

Démonstration : Soient $\tau,\sigma\in\tau(\mu)$ indépendantes et indépendantes de X , on a :

$$\sup_{\tau\in\tau(\mu)} E(X\circ\tau) \leq \sup_{\sigma,\tau\in\tau(\mu)} E(X\circ\tau-X\circ\sigma) \leq 2 \sup_{\tau\in\tau(\mu)} E(X\circ\tau) .$$

Il suffit, à présent, d'appliquer le résultat précédent à $Y(\omega,t) = t\lambda(\omega)$ avec comme mesure, la mesure symétrique, image de $\mu\otimes\mu$ par l'application $(u,v)\mapsto g(u)-g(v)$. La majoration de l'exemple 2.2.5. nous donne le résultat. -

Dans le résultat qui suit, nous allons utiliser la représentation intégrale que nous fournit la méthode des mesures majorantes.

THEOREME 2.2.7. - Soient (T,d) un espace métrique et $(\Omega,\mathcal{G},P)$ un espace d'épreuves. Soit X une fonction aléatoire définie sur T, centrée et vérifiant l'hypothèse (H) c'est-à-dire qu'il existe deux nombres réels α et a strictement positifs tels que pour tout $s,t\in T$ on ait :

$$E\left(\Phi_{\alpha,1}\left(\frac{\tilde{X}_{Id,\delta}(s,t)}{a}\right)\right)\leq 1 .$$

On suppose de plus que le δ-diamètre de T, $\delta(T)$, est fini. Alors une condition suffisante pour que X ait presque sûrement ses trajectoires majorées est que :

$$\sup_{\mu\in\mathcal{M}_+^1(T)}\int_T d\mu(t)\int_0^{\frac{\delta(T)}{2}}\left(\log\left(1+\frac{1}{\mu^2(B_\delta(t,u))}\right)\right)^{1/\alpha}du<\infty ,$$

où $\mathcal{M}_+^1(T)$ désigne l'ensemble des mesures de probabilité sur $(T,\mathcal{T})$. On a alors

$$E(\sup_{t\in T}X(t))\leq 6a(1+3C(\alpha)2^{1/\alpha})\sup_{\mu\in\mathcal{M}_+^1(T)}\int_T d\mu(t)\int_0^{\frac{\delta(T)}{2}}\left(\log\left(1+\frac{1}{\mu^2(B_\delta(t,u))}\right)\right)^{1/\alpha}du .$$

Démonstration : Dans un premier temps, supposons que T soit fini. Avec les mêmes notations que celles des paragraphes précédents, pour tout $t\in T$ et pour tout entier n, on a :

$$X_n(t)-\int_T X(s)d\mu(s)=\frac{1}{2}\iint_{T\times T}\tilde{X}_\delta(u,v)\left(\sum_{k=1}^{n}\delta(u,v)\bar{g}_k(u,v;t)\right)d\mu(u)d\mu(v) .$$

Comme T est fini, il existe un entier n tel que pour tout $t\in T$, $X_n(t)=X(t)$.

Soit $\tau(\omega)$ l'indice du maximum de X sur T et choisissons comme mesure μ la loi de τ. L'application du théorème 2.2.3. iii) et le fait que X soit centré, nous donnent :

$$E(\max_T X) \leq 6a \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\delta(T)}{2^k} - \frac{\delta(T)}{2^{k+1}}\right) \left\| \frac{I_{B_k \times B_{k-1}}}{\mu_k \mu_{k-1}} \right\|^*_{\mu \otimes \mu \otimes \mu},$$

où la troisième intégration porte sur le centre t des boules B_k. Comme

$$\iiint_{T \times T \times T} I_{B_k(t) \times B_{k-1}(t)}(u,v) \frac{d\mu(u)d\mu(v)}{\mu_k(t)\mu_{k-1}(t)} d\mu(t) = 1,$$

l'inégalité (0.1.1) nous donne :

$$E(\max_T X) \leq 6a(1+3C(\alpha)2^{1/\alpha}) \int_T d\mu(t) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\delta(T)}{2^k} - \frac{\delta(T)}{2^{k+1}}\right) \left(\log\left(1+\frac{1}{\mu_k^2(t)}\right)\right)^{1/\alpha},$$

d'où la conclusion dans le cas où T est fini. Si T est quelconque, pour toute partie finie T_o de T, le raisonnement précédent nous donne :

$$E\left(\sup_{t \in T_o} X(t)\right) \leq C \sup_{\mu \in \mathcal{M}_+^1(T)} \int_T d\mu(t) \int_o^{\frac{\delta(T)}{2}} \left(\log\left(1+\frac{1}{\mu^2(B_\delta(t,u))}\right)\right)^{1/\alpha} du ;$$

en particulier si T_o est un sous-ensemble d'une suite séparante pour X. La séparabilité de X nous donne le résultat sur T entier. -

De la majoration du théorème précédent on peut déduire une condition suffisante de majoration, du type "maxi-min", à savoir :

$$\sup_{\mu \in \mathcal{M}_+^1(T)} \inf_{\pi \in \mathcal{M}_+^1(T)} \int_T d\mu(t) \int_o^{\frac{\delta(T)}{2}} \left(\log\left(1+\frac{1}{\pi^2(B_\delta(t,u))}\right)\right)^{1/\alpha} du < \infty .$$

Ce résultat termine le paragraphe consacré à la méthode d'Orlicz, méthode qui est plus générale que celle des mesures majorantes, mais qui est plus difficilement applicable en pratique, la difficulté majeure étant dans la recherche d'une représentation par une intégrale.

Nous verrons (IV) que dans certains cas on peut obtenir des minorations faisant intervenir les mêmes termes des résultats précédents. On en déduira des conditions nécessaires et suffisantes. -

2.3. Applications.

Dans ce dernier paragraphe nous allons donner trois applications des résultats obtenus dans les deux paragraphes précédents. Les deux premières concernent les processus gaussiens d'une part et les processus à accroissements sous-gaussiens, d'autre part. Ces deux familles de processus vérifient l'hypothèse (H) pour $\alpha = 2$. Nous retrouverons ainsi les résultats de X. Fernique ([10],[11]) sur les processus gaussiens où, pour la première fois, les méthodes des mesures majorantes et d'Orlicz ont été utilisées. Pour les processus à accroissements sous-gaussiens, nous retrouverons les résultats de N.C. Jain et M.B. Marcus ([19]) et la condition de mesures majorantes établie par B. Heinkel ([17]). Dans la troisième application, nous étudierons une famille de fonctions aléatoires associées à l'espace L^{Φ_1}. Les résultats généraux, pour $\alpha = 1$, seront dans certains cas proches de la notion d'entropie.

Exemple 1 : fonctions aléatoires gaussiennes : Pour $\alpha = 2$, la fonction de Young s'écrit $\Phi_{2,1}(x) = e^{x^2} - 1$. Les résultats obtenus par la méthode des mesures majorantes, nous donnent, dans le cas gaussien :

THEOREME 2.3.1. - Soient (T,d) un espace métrique séparable et $(\Omega, \mathcal{G}, P)$ un espace d'épreuves. Soit X une fonction aléatoire gaussienne définie sur $\Omega \times T$. On suppose que le δ-diamètre, $\delta(T)$, de T est fini. On a alors les propriétés suivantes :

i) S'il existe une mesure de probabilité μ sur $(T,\mathcal{T})$ telle que

$$\iint_{T\times T} E(X(s)X(t))d\mu(s)d\mu(t) = 0 ,$$

une condition suffisante pour que X ait presque sûrement ses trajectoires majorées, est que

$$\sup_{t\in T}\int_0^{\frac{\delta(T)}{2}} \sqrt{\log\frac{1}{\mu(B_\delta(t,u))}}\,du<\infty ;$$

il existe alors une variable aléatoire $Y(\omega)$, positive, telle que pour tout $t\in T$, on ait :

$$|X(\omega,t)| \leq 57\, Y(\omega) \sup_{s\in T}\int_0^{\frac{\delta(T)}{2}} \sqrt{\log(1+\frac{1}{\mu^2(B_\delta(s,u))})}\,du .$$

ii) Une condition suffisante pour que X ait presque sûrement ses trajectoires continues est qu'il existe une mesure de probabilité μ sur $(T,\mathcal{T})$ telle que :

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\sup_{t\in T}\int_0^{\varepsilon} \sqrt{\log\frac{1}{\mu(B_\delta(t,u))}}\,du = 0 ;$$

il existe alors une variable aléatoire $Y(\omega)$, positive, telle que pour tout s et $t\in T$, on ait :

$$|X(\omega,s)-X(\omega,t)| \leq 114\ Y(\omega) \sup_{u\in T}\int_0^{\frac{\delta(s,t)}{2}} \sqrt{\log(1+\frac{1}{\mu^2(B_\delta(u,v))})}\,dv .$$

On montre aisément que si une fonction aléatoire gaussienne a sa covariance majorée par 1 , alors pour tout a supérieur à $\sqrt{\frac{8}{3}}$ et tout $t\in T$ on a :

$$E(\Phi_{2,1}(\frac{X(t)}{a})) \leq 1 .$$

Donc toute fonction aléatoire gaussienne vérifie l'hypothèse (H) avec $\alpha = 2$. Le théorème précédent est une conséquence directe des corollaires 2.1.4. et 2.1.6. Notons que la variable aléatoire Y est la même dans les deux propriétés et qu'elle est égale, en dehors d'un négligeable, à la norme de Luxemburg de $\tilde{X}_\delta$ par rapport à $\Phi_{2,1}$. De la proposition 2.1.2., on sait que pour tout x supérieur à $\sqrt{\frac{16}{3}}$, on a

$$P(Y>x) \leq 4\, e^{-x^2 \frac{3\log 2}{16}} , \; E(Y) \leq 22 .$$

Remarquons également que la méthode générale que nous avons développée, allège la preuve du résultat de continuité par rapport à la démonstration originale ([11]) où la représentation intégrale se faisait dans l'espace d'Orlicz $L^{\Phi_2}(T^4, \mu^{\otimes 4})$ en utilisant $\tilde{\tilde{X}}$.

L'application du corollaire 2.1.7. nous permet de retrouver la condition de R.M. Dudley ([4]) sur l'exposant d'entropie. Le corollaire 2.1.8. est, dans le cas gaussien, la condition de continuité de X. Fernique ([8]). La démonstration originale de ce résultat est basée sur des découpages de plus en plus fin de [0,1]. Nous retrouvons ici la même démonstration que dans ([11]). Notons que l'on peut, toujours par la méthode des mesures majorantes, alléger les hypothèses sur f , en considérant $\tilde{X}_{f,d}$.

Enfin, la méthode d'Orlicz et plus particulièrement le théorème 2.2.7. nous fournit une condition suffisante de majoration qui s'écrit :

$$\sup_{\mu \in \mathcal{M}_+^1(T)} \int_T d\mu(t) \int_0^{\frac{\delta(T)}{2}} \sqrt{\log \frac{1}{\mu(B_\delta(t,u))}}\, du < \infty .$$

X. Fernique a montré ([12]) que cette condition était également nécessaire pour une très large famille de fonctions aléatoires gaussiennes. -

Exemple 2 : fonctions aléatoires à accroissemenrs sous-gaussiens.

DEFINITION 2.3.2. - Soit X une fonction aléatoire réelle sur un espace métrique (T,d) . Soit δ l'écart induit sur T par la covariance de X . On dit que X est à accroissements sous-gaussiens si pour tout nombre réel λ et tout couple $(s,t) \in T \times T$, on a :

$$E(\exp \lambda(X(s)-X(t))) \leq \exp \frac{\lambda^2 \delta^2(s,t)}{2} .$$

Une telle fonction aléatoire vérifie l'hypothèse (H) ; en effet, on montre que pour tout nombre réel a supérieur à $\frac{5}{2}$ et pour tout couple $(s,t) \in T \times T$ on a :

$$E(\Phi_{2,1}(\frac{\tilde{X}_{Id,\delta}(s,t)}{a})) \leq 1 .$$

Comme c'est la même fonction de Young qui intervient, le théorème 2.3.1. est encore vrai si X est à accroissements sous-gaussiens. En particulier, nous avons une condition suffisante de majoration des trajectoires, condition originale, à savoir :

$$\sup_{t \in T} \int_o^{\frac{\delta(T)}{2}} \sqrt{\log \frac{1}{\mu(B_\delta(t,u))}}\, du < \infty .$$

La condition suffisante de continuité est celle établie par B. Heinkel ([17]) ; en particulier elle est satisfaite, dans le cadre du corollaire 2.1.7, si l'exposant d'entropie de T est strictement inférieur à 2 .

Le corollaire 2.1.8. nous donne, dans le cadre de cette famille, une généralisation du résultat de N.C. Jain et M.B. Marcus ([19]). Il avait été établi pour des fonctions aléatoires du type :

$$X(\omega,t) = \sum_n \varphi_n(t)\lambda_n(\omega) ,$$

où les λ_n sont indépendantes et sous-gaussiennes. La méthode des mesures majorantes nous permet, avec exactement les mêmes hypothèses que dans ([19]) et en utilisant $\tilde{X}_{f,d}$, de l'étendre à toute fonction aléatoire à accroissements sous-gaussiens.

Notons enfin que la condition suffisante de majoration obtenue par la méthode d'Orlicz est identique à celle du cas gaussien. -

Pour terminer l'étude de cet exemple, nous donnons un résultat qui nous permettra, dans la cinquième partie de notre travail, d'obtenir une condition suffisante pour qu'une suite de fonctions aléatoires à accroissements sous-gaussiens, indépendantes et isonomes, satisfasse la propriété du théorème central limite dans $C(T)$.

PROPOSITION 2.3.3. - Soient (T,d) un espace métrique séparable et $(\Omega,\mathfrak{a},P)$ un espace d'épreuves. Soit X une fonction aléatoire, définie sur T , à accroissements sous-gaussiens et admettant une mesure majorante μ sur $(T,\mathfrak{T})$ par rapport à δ . Dans ces conditions, il existe une constante C telle que pour tout $\varepsilon>0$, on ait :

$$E\Big(\sup_{\delta(s,t)<\varepsilon}|X(s)-X(t)|\Big)\leq C\sup_{u\in T}\int_{0}^{\varepsilon/2}\sqrt{\log\Big(1+\frac{1}{\mu^{2}(B_{\delta}(u,v))}\Big)}\,dv\,.$$

La démonstration est immédiate à partir du corollaire 2.1.9. avec $C = 3529$. -

Exemple 3 : Séries aléatoires de type exponentiel. - Ce troisième exemple illustre le cas où $\alpha = 1$; par définition des fonctions de Young $\Phi_{\alpha,1}$, on a alors :

$$\Phi_{1}(x) = \Phi_{1,1}(x) = e^{|x|}-|x|-1\,.$$

Considérons une suite de variables aléatoires $(\lambda_{n};n\in\mathbb{N})$ indépendantes et de même loi de densité $(1/\sqrt{2})\exp(-\sqrt{2}|x|)$, et une suite de fonctions $(\varphi_{n}(t);n\in\mathbb{N})$ définies sur T et telles que $\sum_{n}\varphi_{n}^{2}(t)$ converge uniformément.

DEFINITION 2.3.4. - *Soient* (T,d) *un espace métrique séparable et* $(\Omega,\mathcal{G},P)$ *un espace d'épreuves. On dit qu'une fonction aléatoire* X , *définie sur* T , *est une série aléatoire de type exponentiel si elle s'écrit* :

$$X(\omega,t) = \sum_n \varphi_n(t)\lambda_n(\omega) \ ,$$

où les suites $(\lambda_n; n\in\mathbb{N})$ *et* $(\varphi_n(t); n\in\mathbb{N})$ *vérifient les conditions ci-dessus.*

Comme nous le verrons par la suite (Remarque 4.1.11), une telle série aléatoire vérifie l'hypothèse (H) avec $\alpha = 1$; plus précisément pour tout nombre réel a supérieur à 3 et tout $s,t\in T$, on a

$$E(\Phi_1(\frac{\tilde{X}_\delta(s,t)}{a})) \le 1 \ .$$

La méthode de mesure majorante nous donne l'énoncé suivant :

THEOREME 2.3.5. - *Soient* (T,d) *un espace métrique séparable et* $(\Omega,\mathcal{G},P)$ *un espace d'épreuves. Soit* X *une série aléatoire de type exponentiel définie sur* $\Omega\times T$. *On suppose que le* δ-*diamètre,* $\delta(T)$, *de* T *est fini. On a alors les propriétés suivantes* :

i) *S'il existe une mesure de probabilité* μ *sur* $(T,\mathcal{T})$ *telle que*

$$\iint_{T\times T} E(X(s)X(t))d\mu(s)d\mu(t) = 0 \ ,$$

une condition suffisante pour que X *ait presque sûrement ses trajectoires majorées est que* μ *soit une mesure majorante et il existe alors une variable aléatoire* $Y(\omega)$, *positive, telle que pour tout* $t\in T$, *on ait*

$$|X(\omega,t)| \le 294\, Y(\omega) \sup_{s\in T} \int_0^{\frac{\delta(T)}{2}} \log(1+\frac{1}{\mu^2(B_\delta(s,u))})du \ .$$

ii) *Une condition suffisante pour que* X *ait presque sûrement ses*

<u>trajectoires continues est qu'il existe une mesure de probabilité</u> μ <u>sur</u> $(T,\mathcal{T})$ <u>telle que</u> :

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sup_{t\in T} \int_0^{\varepsilon} \log \frac{1}{\mu(B_\delta(t,u))} du = 0$$

<u>il existe alors une variable aléatoire</u> $Y(\omega)$, <u>positive, telle que, pour tout</u> $s,t\in T$, <u>on ait</u> :

$$|X(\omega,s)-X(\omega,t)| \leq 588\, Y(\omega) \sup_{u\in T} \int_0^{\frac{\delta(s,t)}{2}} \log\left(1+\frac{1}{\mu^2(B_\delta(u,v))}\right) dv .$$

La variable aléatoire Y est la même dans les deux cas ; elle est égale, en dehors d'un négligeable, à la norme de Luxemburg de $\widetilde{X}_\delta$; et, d'après la proposition 2.1.2, on sait que pour tout x supérieur à 6 on a :

$$P(Y>x) \leq 10e^{-x\frac{\log 2}{6}} , E(Y) \leq 90 .$$

Les corollaires 2.1.7. et 2.1.8. nous donnent, pour des séries aléatoires de type exponentiel, deux conditions suffisantes de continuité, avec dans chaque cas $\alpha = 1$. De même la condition suffisante de majoration obtenue par la méthode d'Orlicz s'écrit aisément dans ce cas.

Dans la quatrième partie de notre travail nous reviendrons plus longuement sur ces séries aléatoires. En particulier nous montrerons que la condition d'Orlicz est, dans certains cas, nécessaire.

Nous terminons ce paragraphe avec un résultat que nous utiliserons dans la partie consacrée au théorème central limite.

PROPOSITION 2.3.6. - <u>Soient</u> (T,d) <u>un espace métrique séparable et</u> $(\Omega,\mathcal{G},P)$ <u>un espace d'épreuves. Soit</u> X <u>une série aléatoire de type exponentiel, définie sur</u> T <u>et admettant une mesure majorante</u> μ <u>sur</u> $(T,\mathcal{T})$. <u>Dans ces conditions, il existe une constante</u> C , <u>positive, telle que, pour tout</u> $\varepsilon>0$ <u>on ait</u> :

$$E\left(\sup_{\delta(s,t)<\varepsilon}|X(s)-X(t)|\right)\leq C\sup_{u\in T}\int_{o}^{\varepsilon/2}\log\left(1+\frac{1}{\mu^{2}(B_{\delta}(u,v))}\right)dv \; .$$

C'est une conséquence du corollaire 2.1.9. avec $\alpha = 1$ et $C = 9312$. -

III. FONCTIONS ALEATOIRES ASSOCIEES A DES FONCTIONS DE YOUNG DE TYPE PUISSANCE.

Dans cette partie nous étudions les fonctions aléatoires définies sur $[0,1]$, dont le moment d'ordre p des accroissements est majoré par une fonction régulière. La mesure majorante que nous utiliserons est celle de Lebesgue. Nous travaillerons uniquement avec la distance usuelle sur $[0,1]$ et pour pouvoir appliquer la technique d'Orlicz on exigera que p soit strictement supérieur à 1.

Dans un premier temps, nous donnons un résultat qui est une conséquence du corollaire 1.1.10. Nous retrouvons ainsi le résultat de M.G. Hahn ([16]) qui avait été établi par des méthodes totalement différentes. Nous donnons ensuite une majoration que nous utiliserons dans la cinquième partie consacrée au théorème central limite.

Enfin nous appliquerons le résultat principal dans certains exemples et nous montrerons que la condition suffisante de continuité que nous avons obtenue est du même type que celles qui sont associées à des fonctions de Young de type exponentiel.

Sur $[0,1]$ muni de la distance usuelle, de la tribu des boréliens $\mathcal{B}$ et de la mesure de Lebesgue λ et sur un espace d'épreuves $(\Omega,\mathcal{G},P)$, on considère une fonction aléatoire réelle X. On supposera toujours que X est continue en probabilité et on utilisera une version de X séparable et $\mathcal{G}\otimes\mathcal{B}$-mesurable.
Le résultat essentiel de cette partie est le théorème suivant dû à M.G. Hahn ([16]) :

THEOREME 3.1.1. - <u>Soient</u> $(\Omega,\mathcal{G},P)$ <u>un espace d'épreuves et</u> X <u>une fonction aléatoire définie sur</u> $[0,1]\times\Omega$ <u>telle qu'il existe un nombre réel</u> $p>1$ <u>et une fonction</u> f <u>croissante, s'annulant et continue à l'origine et telle que pour tout</u> s <u>et</u> $t\in[0,1]$ <u>on ait</u> :

(3.1.1.) $$E(|X(s)-X(t)|^p) \leq f^p(|s-t|) .$$

<u>Une condition suffisante pour que</u> X <u>ait presque sûrement ses trajectoires continues est que</u>

$$\int_0 \frac{f(u)}{u^{1+\frac{1}{p}}}\, du < \infty ,$$

<u>et dans ces conditions il existe une variable aléatoire</u> Y <u>positive, possédant un moment fini d'ordre</u> p , <u>telle que pour tout</u> s <u>et</u> t <u>de</u> $[0,1]$ <u>on ait</u> :

$$|X(\omega,s)-X(\omega,t)| \leq 2.3^{\frac{p+1}{p-1}}\, Y(\omega)[F(3|s-t|)]^{\frac{p-1}{p}} ,$$

<u>avec</u>

$$F(x) = \int_0^x \frac{f(u)}{u^{1+\frac{1}{p}}}\, du ,$$

<u>et</u>

$$E(Y^p) \leq \frac{2}{p} F(1) .$$

Si f s'annule sur un intervalle du type $[0,\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, alors X est presque sûrement constante. On montre qu'il en est de même dans le cas où $p = 1$ et où l'inégalité 3.1.1. est vérifiée. Donc on peut supposer, sans restreindre la généralité, que le seul point où f s'annule est l'origine.

<u>Démonstration</u> : Pour $p > 1$, la fonction $\Phi_p(x) = \frac{|x|^p}{p}$ est une fonction de Young. Nous allons appliquer les résultats particuliers aux fonctions puissances que nous avons obtenues dans le premier chapitre et plus précisément le corollaire 1.1.10. Si r_o est un nombre réel strictement positif et si on pose, avec les mêmes notations que celles du paragraphe 1.2,

$$X_n(t) = \frac{1}{\lambda_n} \int_{B(t,\frac{r_o}{2^n})} X(u)\,du ,$$

on vérifie alors aisément que pour tout $t \in [0,1]$, $X_n(t)$ converge presque sûrement vers $X(t)$. Si N_t désigne l'ensemble de divergence, il suffit de montrer la majoration du théorème pour s et t fixés et $\omega \notin N_t \cup N_s$; on aura alors la relation sur tout $[0,1]^2$ et pour tout $\omega \in \Omega$ en utilisant la séparabilité de X , comme dans le théorème 1.2.5, et en posant $Y(\omega) = +\infty$ sur le négligeable de Ω déterminé par celle-ci, comme dans le corollaire 2.1.6. Fixons-nous donc un couple (s,t) et un élément $\omega \notin N_t \cup N_s$. On pose pour tout u strictement positif :

$$\varphi(u) = u^{\frac{1+p}{p^2}} f^{-1/p}(u) .$$

Dans ces conditions la fonction

$$\rho(u) = f(u)\varphi(u) = u^{\frac{1+p}{p^2}} f^{1-\frac{1}{p}}(u) ,$$

est de même nature que f , c'est-à-dire croissante, continue en 0 et s'annulant uniquement à l'origine. Vérifions les hypothèses du corollaire 1.1.10. On rappelle que

$$\tilde{X}_{\rho,d}(s,t) = \frac{X(s)-X(t)}{\rho(|s-t|)} I_{\{(u,v):u\neq v\}}(s,t) .$$

a) Montrons que la condition i) est vérifiée, à savoir $\tilde{X}_{\rho,d} \in L^p([0,1]^2, \lambda\otimes\lambda)$ P-presque sûrement. En effet

$$\iint_{[0,1]} E(|\tilde{X}_{\rho,d}(s,t)|^p)dsdt \leq 2 \int_0^1 \frac{f(u)}{u^{1+1/p}} du < \infty .$$

On pose

$$Y(\omega) = \|\tilde{X}_{\rho,d}(\omega,.)\|_{(\Phi_p),\lambda\otimes\lambda} .$$

Nous étudierons cette variable aléatoire par la suite.

b) Montrons que la condition ii) est vérifiée. On a, par définition de la fonction ρ

$$\int_0^\varepsilon \frac{\rho^{p/p-1}(6u)}{u\lambda^{2/p-1}(B_d(t,u))}\,du \leq 3^{2/p-1}\int_0^{6\varepsilon}\frac{f(u)}{u^{1+1/p}}\,du\ ,$$

et ceci pour tout $t\in[0,1]$. Quand ε tend vers 0, cette dernière intégrale, par hypothèse, tend vers 0.

c) Nous pouvons donc appliquer le corollaire 1.1.10. Nous en déduisons

$$|X(\omega,s)-X(\omega,t)| \leq (p4^{p-1})^{1/p}\,3^{2/p-1}\,Y(\omega)(F(3|s-t|))^{\frac{p-1}{p}}\ ,$$

d'où, en majorant le coefficient, la relation annoncée.

d) Pour terminer, calculons le moment d'ordre p de Y. Par définition de la norme de Luxemburg, on a :

$$Y(\omega) = \left[\frac{1}{p}\iint_{[0,1]^2}\left|\frac{X(\omega,s)-X(\omega,t)}{\rho(|s-t|)}\right|^p dsdt\right]^{1/p}.$$

La mesurabilité de X et le théorème de Fubini nous donnent :

$$E(Y^p) \leq \frac{1}{p}\iint_{[0,1]^2}\frac{1}{\varphi^p(|s-t|)}\,dsdt \leq \frac{2}{p}F(1)\ .$$

Ceci achève la démonstration du théorème. -

Nous allons faire quelques remarques concernant la démonstration et les résultats de ce théorème.

REMARQUES 3.1.2. i) : Le choix de la fonction φ n'est pas arbitraire ; en effet, pour toute fonction φ positive, nous avons à l'aide de l'inégalité de Hölder :

$$\int_0^1 \frac{f(u)}{u^{1+1/p}}\,du \leq \left[\int_0^1 \frac{du}{\varphi^p(u)}\right]^{1/p}\left[\int_0^1 \frac{f^{p/p-1}(u)\varphi^{p/p-1}(u)}{u^{\frac{p+1}{p-1}}}\,du\right]^{\frac{p-1}{p}} .$$

Si la première intégrale du deuxième membre est finie, on a l'appartenance de $\tilde{X}_{f.\varphi,d}$ à l'espace d'Orlicz L^p ; si la deuxième est également finie, on a la continuité. Nous avons choisi la meilleure fonction φ , celle pour laquelle les trois intégrales sont égales. -

ii) Le théorème 3.1.1. constitue, comme nous l'avons dit, le résultat de M.G. Hahn ([16]). Notons cependant qu'il avait été établi par des découpages de $[0,1]$. On remarquera que le module de continuité que nous obtenons par la méthode des mesures majorantes est plus agréable à manipuler en pratique que celui de M.G. Hahn qui est défini par des opérations sur des séries. -

Une conséquence directe du théorème précédent est le résultat suivant que nous utiliserons dans la cinquième partie de notre travail :

COROLLAIRE 3.1.3. - <u>Sous les mêmes hypothèses et avec les mêmes notations que celles du théorème 3.1.1, pour tout</u> ε <u>strictement positif on a</u> :

$$\left[E\left(\sup_{|s-t|<\varepsilon} |X(s)-X(t)|^p\right)\right]^{1/p} \leq \frac{4.3^{\frac{p+1}{p-1}}}{p^{1/p}}\, F(1)^{1/p}\, F(3\varepsilon)^{\frac{p-1}{p}} .$$

Nous allons donner quelques applications, avec des choix particuliers de la fonction f .

Soit X une fonction aléatoire sur $[0,1]$ telle qu'il existe $p>1$ tel que pour tout s et t de $[0,1]$ on ait :

$$E(|X(s)-X(t)|^p) \leq |s-t|^{1+r}$$

alors une condition suffisante pour que X ait presque sûrement ses trajectoires continues est que r soit strictement positif. En effet

$$\int_0^x \frac{f(u)}{u^{1+\frac{1}{p}}}\, du = \int_0^x u^{\frac{r}{p}-1}\, du = \frac{p}{r}\, x^{\frac{r}{p}} .$$

On retrouve ainsi, partiellement le résultat de Kolmogorov ([22]). Dans ces conditions il existe une variable aléatoire Y , possédant un moment d'ordre p fini, et une constante C , telles que pour tout $s,t \in [0,1]$ on ait :

$$|X(s)-X(t)| \leq C\, Y |s-t|^{\frac{r}{p}\frac{p-1}{p}} . -$$

Un autre cas qui a été fréquemment étudié est celui où la fonction aléatoire X est telle qu'il existe $p > 1$ et un nombre réel r tels que pour tout $s,t \in [0,1]$ on ait :

$$E(|X(s)-X(t)|^p) \leq \frac{|s-t|}{\left(\log \frac{1}{|s-t|}\right)^r} .$$

En appliquant le théorème 3.1.1. nous en déduisons qu'une condition suffisante pour que X ait presque sûrement ses trajectoires continues est que $r > p$. En effet dans ce cas

$$\int_0^x \frac{f(u)}{u^{1+\frac{1}{p}}}\, du = \frac{p}{r-p} \frac{1}{\left(\log \frac{1}{x}\right)^{\frac{r-p}{p}}} .$$

Dans ces conditions on a l'existence d'une variable aléatoire Y , possédant un moment d'ordre p fini, et une constante C telles que pour tout $s,t \in [0,1]$ on ait :

$$|X(s)-X(t)| \leq C\, Y \frac{1}{\left(\log \frac{1}{|s-t|}\right)^{\frac{r-p}{p}}} .$$

Notons que les résultats antérieurs de M. Loève ([22]) et de P. Bernard ([1]) qui sont un peu plus faibles, ont été obtenus par des méthodes totalement différentes. A.M. Garsia et Rodemich ([13]) ont obtenu la même condition suffisante par une méthode identique à celle du théorème 1.1.1, donc très proche de la méthode des mesures majorantes. Ils ont conjecturé que cette condition est également nécessaire. Certains contre-exemples de R.M. Dudley ([5]) et de M.G. Hahn ([16]) infirment cette conjecture.

Nous terminons cette partie par une remarque qui montre que malgré le fait qu'à partir d'un certain moment nous avons suivi une démarche différente pour les fonctions de Young de type puissance, les conclusions auxquelles nous aboutissons sont très semblables. En effet par un changement de variable on a l'équivalence :

$$\int_0 \frac{f(u)}{u^{1+\frac{1}{p}}}\,du<\infty \Leftrightarrow \int^{\infty} f(u^{-p})\,du<\infty\ .$$

Rappelons qu'au chapitre précédent, pour les fonctions Φ_α , nous avions obtenu la condition

$$\int^{\infty} f(e^{-x^{\alpha}})\,dx<\infty\ .$$

Autrement dit, cette condition, établie en 1964 par X. Fernique pour les processus gaussiens $(\alpha = 2)$, est très générale et convient à une très large famille de fonctions aléatoires. C'est la méthode des mesures majorantes qui a permis, dans une de ses applications, d'établir ce fait. -

IV. REGULARITE DES TRAJECTOIRES DES SERIES ALEATOIRES DE TYPE EXPONENTIEL.

Cette quatrième partie de notre travail est consacrée à l'étude de la régularité des trajectoires de certaines fonctions aléatoires de type exponentiel. Comme à la fin du paragraphe 2.3, un espace métrique (T,d) et un espace d'épreuves $(\Omega,\mathcal{G},P)$ étant donnés, nous appelons série aléatoire de type exponentiel sur T, la série

$$X(\omega,t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(t)\lambda_n(\omega) ,$$

où $(a_n;n\in\mathbb{N})$ est une suite de fonctions définies sur T et $(\lambda_n;n\in\mathbb{N})$ une suite de variables aléatoirs réelles, indépendantes et de même loi de densité $\frac{\sqrt{2}}{2}\exp(-\sqrt{2}|x|)$ par rapport à la mesure de Lebesgue.

Dans un premier temps nous établissons des lois "0-1" et des résultats d'intégrabilité pour ces fonctions aléatoires. Ces derniers nous permettent d'introduire de manière naturelle la fonction de Young $\Phi_{1,1}(x) = e^{|x|}-|x|-1$ pour l'étude de la majoration et de la continuité des trajectoires de séries aléatoires de type exponentiel. Nous en déduisons qu'une telle fonction aléatoire vérifie l'hypothèse (H) du paragraphe 2.1 ; c'est-à-dire que pour tout s,t de T, $\widetilde{X}_\delta$ est un élément de l'espace d'Orlicz $L^{\Phi_1}(\Omega,P)$, où δ est l'écart d'ordre deux induit par X sur T. Les résultats des paragraphes 2.1. et 2.2. sont donc applicables à ces fonctions aléatoires (avec $\alpha = 1$).

Le deuxième paragraphe est consacré à l'étude des processus composés, de type exponentiel. Dans certains cas, nous montrons que pour de tels processus, la condition suffisante de majoration obtenue par la méthode d'Orlicz, est également nécessaire. En particulier la condition du théorème 2.2.7 avec $\alpha = 1$, est nécessaire et suffisante pour des séries de type exponentiel définies sur une limite projective d'ensembles. -

4.1. Lois '0-1" et intégrabilité des séries aléatoires de type exponentiel.

Etant donnés un espace d'épreuves $(\Omega, \mathcal{a}, P)$, un espace métrisable T et N une pseudo-semi-norme sur R^T , $\mathcal{B}_{R^T}$ - mesurable, nous allons énoncer pour une série aléatoire de type exponentiel

$$X(\omega,t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n(t)\lambda_n(\omega) ,$$

définie sur $\Omega \times T$, des résultats du type lois "0-1" , à savoir

$$P(N(X)<\infty) = 0 \quad \text{ou} \quad P(N(X)<\infty) = 1 ,$$

$$P(N(X)=0) = 0 \quad \text{ou} \quad P(N(X)=0) = 1 .$$

De plus, nous obtiendrons un résultat d'intégrabilité : $N(X)$ est presque sûrement finie si et seulement s'il existe une constante $\beta>0$ telle que :

$$E(e^{\beta N(X)}) <\infty .$$

Ces conclusions seront appliquées, pour X séparable, à la pseudo-semi-norme

$$N(X) = \sup_{t \in T} |X(\omega,t)| .$$

On remarquera que ce qui précède justifie le choix de la fonction de Young $\Phi_{1,1}(x) = e^{|x|}-|x|-1$ pour l'étude des séries aléatoires de type exponentiel par les méthodes d'Orlicz et des mesures majorantes. Nous concluerons ce paragraphe, par le calcul de la norme de Luxemburg d'une série aléatoire de type exponentiel, sous certaines hypothèses.

Nous commençons par quelques résultats simples qui seront utilisés par la suite.

LEMME 4.1.1. - Sur un espace d'épreuves $(\Omega,\mathcal{C},P)$ on considère la variable aléatoire réelle λ de densité $\frac{a}{2}e^{-a|x|}$. Dans ces conditions on a les résultats suivants :

$$E(\lambda) = 0\,,\ E(|\lambda|) = \frac{1}{a} \quad \text{et} \quad E(\lambda^2) = \frac{2}{a^2}\,.$$

Pour tout $k\in[0,|a|[$ on a :

$$E(e^{k|\lambda|}) = \frac{a}{a-k}\,,\ E(e^{k\lambda}) = E(e^{-k\lambda}) = \frac{a^2}{a^2-k^2}\,.$$

Par la suite, nous aurons à manipuler fréquemment la fonction convexe $e^{|x|}-1$, qui majore la fonction de Young $\Phi_{1,1}(x) = e^{|x|}-|x|-1$. En particulier pour le calcul de la norme de Luxemburg de certaines fonctions nous utiliserons la majoration suivante :

LEMME 4.1.2. - Pour tout nombre réel x et tout $k>1$, nous avons l'inégalité

$$e^{|x|} \le \frac{1}{C(k)}(e^{kx}+e^{-kx})\,,$$

avec

$$C(k) = \left(\frac{k+1}{k-1}\right)^{\frac{k-1}{2k}} + \left(\frac{k-1}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{2k}}\,.$$

Remarquons que pour $k = 2$, $C(2)$ est strictement supérieur à 1,75. Ceci nous permettra de majorer la norme de Luxemburg de certaines séries aléatoires de type exponentiel.

Nous allons à présent donner deux lemmes qui nous permettront de représenter les variables et les fonctions de type exponentiel à l'aide de variables et de fonctions aléatoires gaussiennes et donc de les analyser à partir de l'analyse des fonctions gaussiennes.

LEMME 4.1.3. - Soient $(\Omega_1,\mathcal{C}_1,P_1),(\Omega_2,\mathcal{C}_2,P_2)$ deux espaces d'épreuves et

$\lambda(\omega_1), \lambda'(\omega_1), \mu(\omega_2)$ et $\mu'(\omega_2)$ des variables aléatoires gaussiennes, centrées, réduites et indépendantes. Dans ces conditions la variable aléatoire,

$$X(\omega_1,\omega_2) = \lambda(\omega_1)\mu(\omega_2)+\lambda'(\omega_1)\mu'(\omega_2) ,$$

définie sur l'espace d'épreuve $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{G}_1 \otimes \mathcal{G}_2, P_1 \otimes P_2)$ a comme densité $\frac{1}{2}e^{-|x|}$.

De ce lemme nous déduisons le résultat suivant :

LEMME 4.1.4. - Soient T un espace métrisable et $(\Omega,\mathcal{G},P)$ un espace d'épreuves. Etant donnée sur T la suite des fonctions $(a_n(t); n \in \mathbb{N})$, on définit sur $\Omega \times T$ la série aléatoire $X(\omega,t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n(t)\ell_n(\omega)$ où $(\ell_n; n \in \mathbb{N})$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de densité $(\frac{1}{\sqrt{2}})\exp(-\sqrt{2}|x|)$.

Sur des copies $(\Omega_1,\mathcal{G}_1,P_1)$ et $(\Omega_2,\mathcal{G}_2,P_2)$ de $(\Omega,\mathcal{G},P)$ on considère les suites de variables gaussiennes, centrées, réduites et indépendantes $(\lambda_n(\omega_1); n \in \mathbb{N})$, $(\lambda'_n(\omega_1); n \in \mathbb{N})$, $(\mu_n(\omega_2); n \in \mathbb{N})$ et $(\mu'_n(\omega_2); n \in \mathbb{N})$. Dans ces conditions $X(\omega,t)$ est de même loi que la série aléatoire:

$$X(\omega_1,\omega_2,t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n(t)}{\sqrt{2}} (\lambda_n(\omega_1)\mu_n(\omega_2)+\lambda'_n(\omega_1)\mu'_n(\omega_2)) .$$

THEOREME 4.1.5. - Soient T un espace métrisable et $(\Omega,\mathcal{G},P)$ un espace d'épreuves. Soient de plus N une pseudo-semi-norme sur $\mathbb{R}^T$, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^T}$-mesurable, et X une série aléatoire réelle de type exponentiel définie sur $\Omega \times T$. Dans ces conditions on a les propriétés suivantes :

i) $P(N(X)<\infty) = 0$ ou $P(N(X)<\infty) = 1$,

ii) $P(N(X)=0) = 0$ ou $P(N(X)=0) = 1$.

Démonstration : i) Nous noterons $X(\omega_1,\omega_2,t)$ la série aléatoire de type exponentiel de même loi que X , obtenue à l'aide du Lemme 4.1.4. Dans ces conditions nous avons :

$$P(N(X)<\infty) = P_1 \otimes P_2(N(X)<\infty) \;.$$

Supposons que $P(N(X)<\infty)$ soit strictement positive ; nous allons montrer que :

$$P_1 \otimes P_2(N(X)<\infty) = 1 \;.$$

Pour tout $\omega_1 \in \Omega_1$, nous définissons une pseudo-semi-norme N' sur l'ensemble des doubles suites de fonctions $(f,g) = (f_n(t),g_n(t);n\in \mathbb{N})$ en posant :

$$N'(f,g) = N(\sum_{n\in \mathbb{N}} [f_n(t)\lambda_n(\omega_1)+g_n(t)\lambda'_n(\omega_1)]) \;.$$

L'expression $(\mu,\mu') = (\frac{a_n(t)}{\sqrt{2}}\mu_n, \frac{a_n(t)}{\sqrt{2}}\mu'_n;n\in \mathbb{N})$ définit sur $\mathbb{N}$ une fonction aléatoire gaussienne qui vérifie une loi "0-1" (voir par exemple théorème 1.2.1. dans [11]) , à savoir

$$P_2(N'(\mu,\mu')<\infty) = 0 \quad \text{ou} \quad P_2(N'(\mu,\mu')<\infty) = 1 \;.$$

Soit $A_1 = \{\omega_1 \in \Omega_1 : P_2(N'(\mu,\mu')<\infty) = 1\}$. Par intégration sur les marges et d'après l'hypothèse, nous obtenons :

$$P(N(X)<\infty) = P_1(A_1)>0 \;.$$

Mais de l'intégrabilité des processus gaussiens (X. Fernique [9]) nous déduisons l'équivalence

$$P_2(N'(\mu,\mu')<\infty) = 1 \Leftrightarrow E_2(N'(\mu,\mu'))<\infty \;;$$

donc

$$P_1(A_1) = P_1(E_2[N(X)]<\infty) \;.$$

Nous définissons une pseudo-semi-norme sur l'ensemble des doubles suites numériques, $(f,g) = (f_n, g_n; n \in \mathbb{N})$, en posant :

$$M(f,g) = E_2[N(\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n(t)}{\sqrt{2}}(f_n\mu_n + g_n\mu'_n))] .$$

Soit $(\lambda,\lambda') = (\lambda_n(\omega_1), \lambda'_n(\omega_1); n \in \mathbb{N})$; c'est une fonction aléatoire gaussienne, l'application de la même loi "0-1" que ci-dessus, nous donne :

$$P_1(M(\lambda,\lambda')<\infty) = 0 \quad \text{ou} \quad P_1(M(\lambda,\lambda')<\infty) = 1 .$$

Mais

$$P_1(M(\lambda,\lambda')<\infty) = P_1(E_2N(X)<\infty) = P_1(A_1) = P(N(X)<\infty) > 0 ;$$

d'où

$$P(N(X)<\infty) = 1 \quad \text{et la conclusion.}$$

ii) La démonstration se fait de manière identique à la précédente, en utilisant la même représentation du processus par des variables gaussiennes et par exemple le théorème 1.2.1. dans [11]. -

Dans la démonstration du théorème d'intégrabilité nous utiliserons l'inégalité suivante :

LEMME 2.1.6. ([10]). - Soit la fonction de Young $\Phi_{2,1}(x) = e^{x^2}-1$. Pour toute fonction $f \in L^{\Phi_{2,1}}(T,\mu)$ on a l'inégalité :

$$\sup_{p\geq 1} \left(\frac{1}{p!}\right)^{1/2p} \|f\|_{L^{2p}(T,\mu)} \leq \|f\|_{(\Phi_{2,1}),\mu} .$$

Démonstration : Par définition de la norme de Luxemburg de f nous avons, au cas où elle n'est pas nulle :

$$\int_T \Phi\left(\frac{f(t)}{\|f\|_{(\Phi_{2,1}),\mu}}\right)d\mu(t) = \sum_{p\geq 1} \frac{1}{p!}\left(\frac{\|f\|_{L^{2p}}}{\|f\|_{(\Phi_{2,1}),\mu}}\right)^{2p} \leq 1 ,$$

donc chacun des termes de la série est inférieur à 1 d'où la conclusion. -

Nous donnons à présent le théorème d'intégrabilité pour les séries de type exponentiel, intégrabilité analogue à celle du cas gaussien, mais qui fait intervenir la fonction exponentielle.

THEOREME 4.1.7. - Soient T un espace métrisable et $(\Omega,\mathcal{G},P)$ un espace d'épreuves. Soient de plus N une pseudo-semi-norme sur R^T, $\mathcal{B}_{R^T}$-mesurable et X une série aléatoire réelle de type exponentiel définie sur $\Omega\times T$. Dans ces conditions les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $P(N(X)<\infty) = 1$,

ii) il existe une constante $b>0$ telle que :

$$E[\exp bN(X)] <\infty .$$

Démonstration : Supposons que $N(X)$ soit presque sûrement finie. Da la représentation de la série par des varaibles gaussiennes (lemme 4.1.4) et de la démarche suivie dans la démonstration du théorème 4.1.5, avec les mêmes notations, nous déduisons l'existence d'un sous-ensemble Ω' de Ω_1, de P_1-probabilité 1 et tel que pour tout $\omega_1\in\Omega'$ nous avons

$$P_2(N(X)<\infty) = 1 .$$

L'application qui, à toute double suite de fonctions $(f_n(t),g_n(t);n\in\mathbb{N})$, définies sur T, associe la quantité :

$$N\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n(\omega_1)f_n(t)+\lambda'_n(\omega)g_n(t)\right) ,$$

est une pseudo-semi-norme. La fonction aléatoire gaussienne

$$\left(\frac{a_n(t)}{\sqrt{2}}\,\mu_n\,,\,\frac{a_n(t)}{\sqrt{2}}\,\mu'_n\,;n\in\mathbb{N}\right)$$

étant donnée sur Ω_2 , l'application du théorème d'intégrabilité des vecteurs gaussiens, établi par X. Fernique ([9]), implique l'existence, pour tout $\omega_1\in\Omega'$, d'une constante a strictement positive, telle que :

$$E_2(\exp N^2(X)/_{a^2}) < \infty \;.$$

En posant $\Phi_{2,1}(x) = e^{x^2}-1$, nous en déduisons :

$$\forall\ \omega_1\in\Omega'\ ,\ \alpha(\omega_1) = \|N(X)\|_{(\Phi_{2,1}),P_2} < \infty \;.$$

En appliquant le lemme 4.1.6, nous obtenons

$$\forall\ p\geq 1\ ,\ \left(\frac{1}{p!}\right)^{1/2p}\left(E_2N^{2p}(X)\right)^{1/2p}\leq\alpha(\omega_1)\;.$$

L'application qui à toute double suite numérique $(f_n,g_n;n\in\mathbb{N})$ associe la quantité :

$$\Big\|N\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{a_n(t)}{\sqrt{2}}(f_n\mu_n+g_n\mu'_n)\Big)\Big\|_{(\Phi_{2,1}),P_2}\,,$$

est une semi-norme ; ceci se déduit aisément des propriétés de norme de $\|\cdot\|_{(\Phi_{2,1}),P_2}$, de pseudo-semi-norme de N et de l'intégrabilité des vecteurs gaussiens.

Le processus gaussien $(\lambda_n,\lambda'_n\,;\,n\in\mathbb{N})$ étant donné sur Ω_1 , en utilisant le même résultat que précédemment, nous obtenons une constante $b>0$ telle que :

$$\int_{\Omega_1}\exp(b\alpha^2(\omega_1))dP_1(\omega_1) < \infty \;.$$

De cette relation et de l'inégalité précédente, nous déduisons

$$E_1E_2\Big[\sum_{p\geq o} \frac{1}{(2p)!}\, b^{p/2} N^{2p}(X)\Big] \leq E_1(\exp b\alpha^2) < \infty \;;$$

ceci signifie $E(\operatorname{ch} bN(X))$ et donc $E(\exp bN(X))$ sont finies, ce qui est la condition b).

La réciproque est immédiate. -

De ce théorème nous déduisons le résultat suivant :

COROLLAIRE 4.1.8. - Soient T un espace métrisable et $(\Omega,\mathcal{G},P)$ un espace d'épreuves. Soient de plus N une pseudo-semi-norme sur $\mathbb{R}^T$, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^T}$-mesurable, et X une série aléatoire réelle de type exponentiel, définie sur $\Omega\times T$. Dans ces conditions les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $P(N(X) < \infty) = 1$

ii) $E[N(X)] < \infty$.

On en déduit, comme dans le cas gaussien.

COROLLAIRE 4.1.9. - Soient T un espace métrisable et $(\Omega,\mathcal{G},P)$ un espace d'épreuves. Soit de plus X une série aléatoire réelle, définie sur $\Omega\times T$, séparable et de type exponentiel. Dans ces conditions les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $P(\sup_{t\in T} |X(t)| < \infty) > 0$,

ii) $P(\sup_{t\in T} |X(t)| < \infty) = 1$,

iii) $E \sup_{t\in T} |X(t)| < \infty$,

iv) il existe une constante $b > 0$ telle que,

$$E(\exp(\beta \sup_{t\in T} |X(t)|)) < \infty .$$

Il apparaît à présent que la fonction de Young la plus naturelle pour l'étude de la majoration d'une fonction aléatoire de type exponentiel, est la fonction $\Phi_{1,1}(x) = e^{|x|}-|x|-1$. Donc, dans la méthode d'Orlicz et dans celle des mesures majorantes, l'espace d'Orlicz qui interviendra sera l'espace associé à $\Phi_{1,1}$ muni de la norme de Luxemburg. Nous terminons ce paragraphe par un exemple de calcul de la $\Phi_{1,1}$-norme de Luxemburg d'une série de type exponentiel. Pour un tel processus, défini sur T, l'indépendance de la suite $(\lambda_n ; n \in \mathbb{N})$ et l'application du lemme 4.1.1. nous donnent :

$$\Gamma_X(s,t) = E(X(s)X(t)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n(s)a_n(t) ,$$

$$\delta^2(s,t) = E(X(s)-X(t))^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n(s)-a_n(t))^2 .$$

PROPOSITION 4.1.10. - <u>Soient</u> T <u>un espace métrisable</u>, $\mathcal{T}$ <u>la tribu engendrée par les boules de</u> T <u>et</u> μ <u>une mesure de probabilité sur</u> $(T,\mathcal{T})$. <u>Soient de plus</u> $(\Omega,\mathcal{G},P)$ <u>un espace d'épreuves et</u> $X(\omega,t)$ <u>une série aléatoire de type exponentiel, définie sur</u> $\Omega\times T$, <u>que l'on supposera</u> $\mathcal{G}\otimes\mathcal{T}$-<u>mesurable. Une condition suffisante pour que</u> $\|X\|_{(\Phi_{1,1}),P\otimes\mu}$ <u>soit fini, est que</u> :

$$\forall\, t\in T,\ \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^2(t) \le 1 ,$$

<u>et dans ce cas</u>,

$$\|X\|_{(\Phi_{1,1}),P\otimes\mu} \le 3 .$$

<u>Démonstration</u> : L'application des Lemmes 4.1.1. et 4.1.2, du théorème de Fubini sous l'hypothèse de mesurabilité et de l'inégalité :

$$\forall\, x,y\in [0,1[\ ,\ 1-(x+y) \le (1-x)(1-y) ,$$

nous donnent :

$$E\left(\int_T \exp \frac{|X(t)|}{a}\, d\mu(t)\right) \le \frac{2}{C(k)} \int_T \frac{d\mu(t)}{1-\frac{k^2}{2a^2} \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n^2(t)} \,,$$

$$\le \frac{2}{C(k)(1-\frac{k^2}{2a^2})} \,.$$

D'après la remarque qui suit le lemme 4.1.2. pour tout $a \ge 3$, en prenant $k = 2$, on a :

$$E \int_T \exp \frac{|X|}{a}\, d\mu \le \frac{2}{C(2)(1-\frac{2}{a^2})} \le 2 \;;$$

Comme $\Phi_{1,1}(x)$ est majorée par $e^{|x|}-1$, on a le résultat annoncé par définition de la norme de Luxemburg.-

Remarquons que l'hypothèse de la proposition 4.1.10. est vérifiée dès que la covariance de X est majorée par 1 . Nous en déduisons que si X est une série aléatoire de type exponentiel, comme $\tilde{X}_\delta$ est une série aléatoire de type exponentiel de covariance majorée par 1 , X vérifie l'hypothèse (H) pour $\alpha = 1$ et $a = 3$; c'est-à-dire pour tout couple (s,t) de $T\times T$ on a

$$E\left(\Phi_{1,1}\left(\frac{\tilde{X}_\delta(s,t)}{3}\right)\right) \le 1 \,.$$

L'application des résultats que nous avons obtenus dans la deuxième partie, nous donne des conditions suffisantes de majoration et de continuité des trajectoires de X . Ces conditions font intervenir la fonction $\mathrm{Log}(1+\frac{1}{x})$. Nous allons voir dans la suite que dans certains cas ces conditions sont nécessaires.

4.2. Minoration de certains processus composés de type exponentiel.

Rappelons qu'avec la méthode d'Orlicz, nous avons montré (théorème 2.2.3.) que si une série aléatoire de type exponentiel X admet une représentation de type intégrale :

$$X(\omega,t) = \int_S Y(\omega,s)f(s,t)d\mu(s) ,$$

où Y est une série aléatoire de type exponentiel et f une fonction définie sur $S \times T$, toutes deux vérifiant certaines hypothèses, alors τ étant une variable aléatoire sur T de loi π , la variable aléatoire $X(\omega,\tau(\omega))$ a une espérance majorée par :

$$\iint_{S\times T} |f(s,t)| \operatorname{Log}\left(1+ \frac{|f(s,t)|}{\iint_{S\times T} |f(s,t)|d\mu(s)d\pi(t)}\right)d\mu(s)d\pi(t) .$$

Dans la première partie de ce paragraphe, nous allons donner des exemples de processus de type exponentiel tels que l'espérance de la variable aléatoire $X\circ\tau$ soit minorée par une quantité analogue à la précédente. Dans la seconde partie, nous obtenons des minorations de processus de type exponentiel définis sur des limites projectives d'ensembles, minorations faisant intervenir l'expression

$$\sup_{\mu\in\mathcal{M}_+^1(T)} \int_T d\mu(t) \int_0^{\frac{D}{2}} \operatorname{Log} \frac{1}{\mu(B(t,u))} du ,$$

la même que dans la majoration obtenue dans la méthode des mesures majorantes.

Nous ne pourrons pas obtenir des résultats plus généraux que les précédents, une inégalité de comparaison de deux séries de type exponentiel, analogue à celle de Slépian pour les processus gaussiens, nous faisant défaut.

Tous les exemples que nous allons présenter sont analogues à ceux que X. Fernique ([12]) a présenté dans le cas de processus gaussiens composés, notre but étant de montrer que la technique de minoration, ainsi introduite est une technique générale et liée à la méthode d'Orlicz. Il resterait à étudier leur relations.

LEMME 4.2.1. - Pour toute fonction f comprise entre 0 et $\frac{1}{2}$, on a l'équivalence :

$$\int_{\mathbf{R}} f(t)\log\frac{1}{f(t)}\,dt<\infty \Leftrightarrow \int_{\mathbf{R}} f(t)\log\left(1+\frac{1}{f(t)}\right)dt<\infty .$$

PROPOSITION 4.2.2. - Soient μ une mesure de probabilité sur $\mathbf{R}$, de médiane nulle et $\lambda(\omega)$ une variable aléatoire de densité $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\exp(-\sqrt{2}|x|)$. On pose :

$$X(\omega,t) = t\lambda(\omega) ,$$

$$G(t) = \begin{cases} \mu(\{s : s\geq t\}) & \text{si} \quad t\geq 0 , \\ \mu(\{s : s\leq t\}) & \text{si} \quad t<0 . \end{cases}$$

Dans ces conditions, si $\tau(\mu)$ désigne l'ensemble des variables aléatoires réelles de loi μ, on a :

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\int_{\mathbf{R}} G(t)\log\frac{1}{G(t)}\,dt \leq \sup_{\tau\in\tau(\mu)} E(X\circ\tau) .$$

Démonstration : On notera $F(t)$ la fonction complémentaire de la fonction de répartition de la mesure μ, c'est-à-dire :

$$G(t) = F(t) \quad \text{si} \quad t\geq 0 ,$$

$$G(t) = 1-F(t) \quad \text{sinon.}$$

On pose également :

$$\Phi(t) = P(\lambda>t) = \frac{1}{2}\,e^{-\sqrt{2}t} \quad \text{si} \quad t\geq 0 ,$$

$$\Phi(t) = 1-\frac{1}{2}\,e^{\sqrt{2}t} \quad \text{si} \quad t<0 .$$

D'où nous déduisons :

$$\Phi^{-1}(u) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Log} \frac{1}{2u} \qquad \text{si} \quad 0<u \le \frac{1}{2},$$

$$\Phi^{-1}(u) = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Log} 2(1-u) \quad \text{si} \quad \frac{1}{2}<u<1 .$$

Soit

$$\tau(\omega) = \sup\{t \in \mathbb{R} : \Phi\circ\lambda \le F(t)\}$$

donc

$$P(\tau > t) = P(\Phi\circ\lambda \le F(t)) = F(t) ;$$

la variable aléatoire $\tau(\omega)$, que nous venons de définir, appartient, par conséquent, à l'ensemble $\tau(\mu)$. Nous allons montrer que $E(X\circ\tau)$, qui est fini par hypothèse est minoré par la quantité adéquate.

Un calcul simple nous donne :

$$\int_0^{+\infty} t\Phi^{-1}(F(t))d\mu(t) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{\sqrt{2}} \operatorname{Log} 2F(t)dF(t) \ge \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^{+\infty} F(t)\operatorname{Log} \frac{1}{F(t)}\, dt ,$$

$$\int_{-\infty}^{0} t\Phi^{-1}(F(t))d\mu(t) = \int_{-\infty}^{0} \frac{t}{\sqrt{2}} \operatorname{Log} 2(1-F(t)d(1-F(t)) \ge \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{-\infty}^{0} (1-F(t))\operatorname{Log} \frac{1}{1-F(t)}\, dt ,$$

en faisant une intégration par parties. Comme

$$E(X\circ\tau) = E(\tau\lambda) = \int_{\mathbb{R}} t\Phi^{-1}(F(t))d\mu(t)$$

nous obtenons la minoration. -

COROLLAIRE 4.2.3. - Avec les mêmes hypothèses et les mêmes notations que celles de la proposition précédente, une condition nécessaire et suffisante pour que $\sup\limits_{\tau \in \tau(\mu)} E(|X\circ\tau|)$ soit fini est que :

$$\int_{\mathbb{R}} G(t) \log \frac{1}{G(t)}\, dt < \infty .$$

Démonstration : La nécessité de la condition découle de la minoration précédente. Une méthode analogue à celle de l'exemple 2.2.9, avec $\alpha = 1$, nous donne la majoration :

$$\sup_{\tau \in \tau(\mu)} E(|X \circ \tau|) \leq 6\sqrt{2} \int_{\mathbb{R}} G(t)\mathrm{Log}\left(1+ \frac{1}{G(t)}\right)dt \ ;$$

Le lemme 4.2.1. implique alors la suffisance de la condition. -

L'exemple qui suit concerne une suite de variables aléatoires de type exponentiel, on va obtenir une majoration analogue à celle de la proposition 2.2.4.

PROPOSITION 4.2.4. - Soient $(X_n ; n \in \mathbb{N})$ une suite de variables aléatoires réelles, indépendantes, de type exponentiel, $(\mu_n ; n \in \mathbb{N})$ une mesure de probabilité sur $\mathbb{N}$; on note p l'indice de la médiane de μ. Dans ces conditions, si $\tau(\mu)$ désigne l'ensemble des variables aléatoires de loi μ , on a :

$$\frac{1}{9\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu_k \sigma_k \left(\log \frac{1}{\mu_k} - 1\right) \leq \sup_{\tau \in \tau(\mu)} E(X \circ \tau),$$

où $(\sigma_n ; n \in \mathbb{N})$ désigne la suite des écarts-type associés.

Démonstration : a) Pour montrer la minoration, nous allons construire, comme dans [12], deux variables aléatoires τ et τ' , de loi μ , puis en minorant $\frac{1}{2}(E(X \circ \tau) + E(X \circ \tau'))$, nous obtiendrons le résultat. Avec les mêmes notations que celles de la démonstration de la proposition 4.2.2, nous définissons les deux suites :

$$(M_k ; k \in \mathbb{N}) \text{ et } (M'_k ; k \in \mathbb{N}) \text{ par:}$$

$$\Phi\left(\frac{M_k}{\sigma_k}\right) = \frac{\mu_k}{\sum_{j \geq k} \mu_j} , \quad \Phi\left(\frac{M'_k}{\sigma_k}\right) = \frac{\mu_k}{\sum_{j \leq k} \mu_j} \ ;$$

Alors si nous posons :

$$\tau(\omega) = k \quad \text{si} \quad \omega \in A_k = \{\omega : \forall\, j<k, X_j(\omega) < M_j, X_k(\omega) \geq M_k\}$$

$$\tau'(\omega) = k \quad \text{si} \quad \omega \in A'_k = \{\omega : \forall\, j>k, X_j(\omega) < M'_j, X_k(\omega) \geq M'_k\} \;;$$

les variables aléatoires τ et τ' , par définition des M_k et M'_k , sont toutes deux de loi μ . Par un calcul simple, en utilisant l'indépendance des X_i , nous obtenons :

$$E(X \circ \tau) = \sum_{k \in \mathbb{N}} E(X_k I_{\tau = k}) = \sum_{k \in \mathbb{N}} E(X_k I_{X_k \geq M_k}) P(X_i < M_i, \forall\, i<k) \,,$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{N}} \Big(\sum_{j \geq k} \mu_j\Big) \int_{M_k}^{+\infty} \frac{x}{\sigma_k\sqrt{2}} e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma_k}|x|} dx \,.$$

De même

$$E(X \circ \tau') = \sum_{k \in \mathbb{N}} \Big(\sum_{j \leq k} \mu_j\Big) \int_{M_k}^{+\infty} \frac{x}{\sigma_k\sqrt{2}} e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma_k}|x|} dx \,.$$

Si $k<p$ nous avons

$$\mu_k \leq \sum_{j<p} \mu_j \leq \frac{1}{2} \leq \sum_{j \geq p} \mu_j \leq \sum_{j \geq k} \mu_j \,,$$

d'où

$$\Phi\Big(\frac{M_k}{\sigma_k}\Big) \leq \frac{1}{2}, M_k \geq 0 \,.$$

De même si $k>p$ on obtient le fait que $M'_k \geq 0$. Nous en déduisons :

$$\int_{M_k}^{+\infty} \frac{x}{\sigma_k\sqrt{2}} e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma_k}x} dx = \frac{1}{2} e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma_k}M_k} \Big[M_k + \frac{\sigma_k}{\sqrt{2}}\Big] \,,$$

et

$$\int_{M'_k}^{+\infty} \frac{x}{\sigma_k\sqrt{2}}\, e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma_k}x}\, dx = \frac{1}{2}\, e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma_k}M'_k}\left[M'_k + \frac{\sigma_k}{\sqrt{2}}\right] .$$

En minorant $E(X\circ\tau)$ et $E(X\circ\tau')$ par une partie de la somme et en utilisant la définition de $\Phi(\frac{M_k}{\sigma_k})$ et $\Phi(\frac{M'_k}{\sigma_k})$ nous obtenons :

$$\sup_{\tau\in\tau(\mu)} E(X\circ\tau) \geq \frac{1}{2}(E(X\circ\tau)+E(X\circ\tau')) \geq \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{k\in\mathbb{N}-\{p\}} \mu_k\sigma_k \,\mathrm{Log}\,\frac{e}{4\mu_k} .$$

Mais $\frac{1}{\mu_k} \geq 2$ d'où

$$\frac{e}{4\mu_k^{1-\frac{1}{3}}} \geq \frac{e}{4}\, 2^{1-\frac{1}{3}} > 1 ,$$

et

$$\frac{e}{4\mu_k} \geq \frac{1}{\mu_k^{1/3}} .$$

En définitive

$$\sup_{\tau\in\tau(\mu)} E(X\circ\tau) \geq \frac{1}{6\sqrt{2}} \sum_{k\in\mathbb{N}-\{p\}} \mu_k\sigma_k \,\mathrm{Log}\,\frac{1}{\mu_k} .$$

Si pour tout $n\in\mathbb{N}$, μ_n est inférieur à $\frac{1}{2}$, il existe alors une troisième variable aléatoire τ'', de loi μ dont l'indice de la médiane est différent de p. Pour un calcul analogue au précédent nous obtenons dans ce cas :

$$\sup_{\tau\in\tau(\mu)} E(X\circ\tau) \geq \frac{1}{3}(E(X\circ\tau)+E(X\circ\tau')+E(X\circ\tau'')) ,$$

$$\geq \frac{1}{3\sqrt{2}} \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu_k\sigma_k \,\mathrm{Log}\,\frac{e}{4\mu_k} ,$$

$$\geq \frac{1}{9\sqrt{2}} \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu_k\sigma_k \,\mathrm{Log}\,\frac{1}{\mu_k} .$$

Si, par contre, il existe n_o tel que μ_{n_o} soit supérieur à $\frac{1}{2}$, alors

$$\mu_{n_o}\sigma_n \operatorname{Log} \frac{1}{\mu_{n_o}} \leq \mu_{n_o}\sigma_{n_o} \operatorname{Log}2 \leq \mu_{n_o}\sigma_{n_o} .$$

En conclusion, dans tous les cas possibles, nous avons la minoration

$$\frac{1}{9\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu_k\sigma_k(\log \frac{1}{\mu_k} - 1) \leq \sup_{\tau \in \tau(\mu)} E(X \circ \tau) ;$$

c'est le résultat annoncé. -

COROLLAIRE 4.2.5. - <u>Avec les mêmes hypothèses et les mêmes notations que celles de la proposition</u> 4.2.4, <u>une condition nécessaire et suffisante pour que</u> $\sup_{\tau \in \tau(\mu)} E(|X \circ \tau|)$ <u>soit fini est que</u>

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \mu_k\sigma_k \operatorname{Log} \frac{1}{\mu_k} < \infty .$$

<u>Démonstration</u> : L'application de l'exemple 2.2.4, avec $\alpha = 1$, nous donne

$$\sup_{\tau \in \tau(\mu)} E|X \circ \tau| \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu_k\sigma_k \log (1 + \frac{1}{\mu_k}) .$$

Donc la condition est suffisante. La minoration précédente implique la nécessité de la condition. -

Nous terminons ce paragraphe par l'étude de séries aléatoires de type exponentiel définies sur des limites projectives d'ensembles.

Soient $(S_n ; n \in \mathbb{N})$ une suite d'ensembles finis et $(\pi_n^m ; m \geq n , m,n \in \mathbb{N})$ une suite d'applications avec, pour $m \geq n$, π_n^m une application de S_m sur S_n. Nous supposons que ces deux suites vérifient les propriétés suivantes :

i) Pour tous les entiers k, m et n, les relations $k \geq m \geq n$ entraînent $\pi_n^k = \pi_n^m \circ \pi_m^k$.

ii) Pour tout entier n, π_n^n est l'application identité de S_n.

Soit T la limite projective de la famille $(S_n ; n \in \mathbb{N})$ pour la famille $(\pi_n^m ; m \geq n, m,n \in \mathbb{N})$, muni de la topologie correspondante ; on note

$$T = S_\infty = \varprojlim (S_n ; \pi_n^m) ;$$

donc T est l'ensemble des éléments t du produit des S_n qui, pour tout couple d'entiers (m,n), vérifient la relation :

$$\pi_n(t) = \pi_n^m \circ \pi_m(t) ,$$

où pour tout $n \in \mathbb{N}$, π_n désigne la projection de T sur S_n. Posons $S = \sum_{n \in \mathbb{N}} S_n$ et considérons $\Lambda = (\lambda(s) ; s \in S)$ une suite de variables aléatoires réelles, indépendantes et de densité $\frac{\sqrt{2}}{2} \exp(-\sqrt{2}|x|)$. Nous nous proposons d'étudier les séries aléatoires de type exponentiel définies sur T par :

$$X(t) = C(q) \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{q^n} \lambda \circ \pi_n(t) ,$$

avec $q > 1$ et $C^2(q) = (q^2-1)/2$. Comme dans les paragraphes précédents, X induit un écart δ sur T :

$$\delta^2(t,t') = E[|X(t)-X(t')|^2] .$$

Pour tout couple $(t,t') \in T \times T$, les projections de t et t' étant différentes à partir d'un certain rang, on pose :

$$n(t,t') = \sup\{n \in \mathbb{N} : \pi_n(t) = \pi_n(t')\} ;$$

on a alors

$$\delta(t,t') = \frac{1}{q^{n(t,t')}} .$$

On en déduit que δ est en fait une distance ; en effet, si $\delta(t,t') = 0$, alors pour tout entier n, $\pi_n(t) = \pi_n(t')$, dont $t = t'$. Remarquons que le δ-diamètre de T est 1 et que δ définit sur T une structure q-ultramétrique, c'est-à-dire que pour tout entier n, deux boules de rayon $\frac{1}{q^n}$ sont, soit disjointes, soit confondues. Donc tous les points de la boule $B(t, \frac{1}{q^n})$ sont projetés par π_n sur l'image de t dans S_n. Comme S_n est fini, T est compact. On pourra ainsi assimiler chaque point de S_n à une boule de rayon $\frac{1}{q^n}$ de T et ceci pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Nous avons le résultat suivant :

THEOREME 4.2.6. - Avec les mêmes notations que précédemment, si la série aléatoire de type exponentiel

$$X(t) = \sqrt{\frac{q^2-1}{2}} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{q^n} \lambda(\pi_n(t)) ,$$

est mesurable et séparable, alors une condition nécessaire et suffisante pour qu'elle ait presque sûrement ses trajectoires majorées est que :

$$\Delta(T) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}_+^1(T)} \int_T d\mu(t) \int_0^1 \log \frac{1}{\mu(B_\delta(t,u))} du < \infty ;$$

on a alors :

$$\frac{\sqrt{q^2-1}}{18} (\Delta(T) - \frac{q}{q-1}) \leq E(\sup_{t \in T} X(t)) \leq 36(1+2\Delta(T)) .$$

Démonstration : i) Le fait que la condition est suffisante, est une conséquence immédiate du théorème 2.2.7.

ii) Montrons que la condition est nécessaire. Soit μ une mesure de probabilité sur (T,δ). Pour obtenir le résultat, il suffit de minorer $E(X \circ \tau)$, τ désignant une certaine variable aléatoire à valeurs dans T de loi μ, par

$$\int_T d\mu(t) \int_0^1 \log \frac{1}{\mu(B_\delta(t,u))}\, du \, .$$

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}, \mu_n$ la mesure de probabilité sur S_n, image de μ par π_n. Dans toute la suite, nous considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, uniquement les points de s de S_n de μ_n-masse strictement positive. On remarquera que μ_n est également l'image de μ_{n+1} par π_n^{n+1}. Pour $s \in S_n$, on définit une mesure de probabilité sur $(\pi_n^{n+1})^{-1}(s)$ en posant :

$$\mu_{n,s}(t) = \frac{\mu_{n+1}(t)}{\mu_n(s)} \, .$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $s \in S_n$, on considère une famille de variables aléatoires $\tau_{n,s}$ indépendantes et mesurables par rapport à la famille $(\lambda(s), s \in S_n)$, à valeurs dans $(\pi_n^{n+1})^{-1}(s)$ et de loi $\mu_{n,s}$ respectivement. Les S_n étant finis, l'application de la proposition 4.2.4. nous donne, par définition de la famille Λ :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall s \in S_n \, , \; E(\lambda \circ \tau_{n,s}) \geq \frac{1}{9\sqrt{2}} \Big[\Big(\sum_{t \in (\pi_n^{n+1})^{-1}(s)} \mu_{n,s}(t) \log \frac{1}{\mu_{n,s}(t)} \Big) - 1 \Big] \, .$$

Soit τ une variable aléatoire sur T définie par :

$$\tau(\omega) = t \Leftrightarrow \forall\, n \in \mathbb{N}, \; \tau_{n,\pi_n(t)}(\omega) = \pi_{n+1}(t) \, .$$

Cette variable aléatoire est de loi μ ; en effet, pour tout A mesurable de T, on a :

$$\{\omega : \tau(\omega) \in A\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{\omega : \tau_{n,\pi_n(A)}(\omega) \in \pi_{n+1}(A)\} \; ;$$

de l'indépendance des $\tau_{n,s}$, on déduit pour tout entier k :

$$P\Big(\bigcap_{n\le k}\{\tau_{n,\pi_n(A)}\in\pi_{n+1}(A)\}\Big) = \prod_{n\le k}\frac{\mu_{n+1}(\pi_{n+1}(A))}{\mu_n(\pi_n(A))} = \mu_{k+1}(\pi_{k+1}(A)) \ ,$$

qui tend vers $\mu(A)$ quand $k\to\infty$. Par définition de la série X, on a

$$E(X\circ\tau) = C(q)\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{q^n}E(\lambda(\pi_n(\tau))) \ .$$

Mais

$$E(\lambda(\pi_n(\tau))) = \sum_{s\in S_n} E(\lambda(s)I_{\{\pi_n(\tau)=s\}}) \ ,$$

$$= \sum_{s\in S_n}\ \sum_{t\in(\pi_n^{n+1})^{-1}(s)} E(\lambda(t)I_{\{\pi_{n+1}(\tau)=t\}}) \ .$$

Comme

$$\{\pi_{n+1}(\tau)=t\} = \bigcap_{k\le n}\{\tau_{k,\pi_k^{n+1}(t)} = \pi_{k+1}^{n+1}(t)\} \ ,$$

de l'indépendance on obtient :

$$E(\lambda(\pi_n(\tau)) = \sum_{s\in S_n}\ \sum_{t\in(\pi_n^{n+1})^{-1}(s)} P\Big(\bigcap_{k\le n-1}\{\tau_{k,\pi_k^{n+1}(t)} = \pi_{k+1}^{n+1}(t)\}\Big)E\Big[\lambda(t)I_{\{\tau_{n,s}=t\}}\Big] \ ,$$

$$= \sum_{s\in S_n}\mu_n(s)E(\lambda\circ\tau_{n,s}) \ ,$$

quantité que l'on a minorée précédemment. D'où en reportant dans $E(X\circ\tau)$, en utilisant les propriétés de la fonction Log et par un réarrangement de la série on obtient :

$$E(X\circ\tau) \ge \frac{C(q)}{9\sqrt{2}}\Big[\sum_{n\ge 1}\Big(\frac{1}{q^{n-1}}-\frac{1}{q^n}\Big)\Big(\sum_{s\in S_n}\mu_n(s)\log\frac{1}{\mu_n(s)}\Big)-\frac{q}{q-1}\Big] \ .$$

Comme T est muni d'une structure q-ultramétrique, il existe une famille de points de T, $(t_s ; s \in S_n)$, telle que tous les points de la boule $B(t_s, \frac{1}{q^n})$ soient projetés sur s. Donc $(B(t_s, \frac{1}{q^n}) ; s \in S_n)$ forme une partition finie de T et $\mu_n(s) = \mu(B(t_s, \frac{1}{q^n}))$. D'où

$$E(X \circ \tau) \geq \frac{C(q)}{9\sqrt{2}} \left[\int_T d\mu(t) \sum_{n \geq 1} \log \frac{1}{\mu(B(t, \frac{1}{q^n}))} \int_{\frac{1}{q^n}}^{\frac{1}{q^{n-1}}} du - \frac{q}{q-1} \right].$$

On en déduit aisément la minoration annoncée et de là la nécessité de la condition $\Delta(T) < \infty$. -

En fait X. Fernique a prouvé que ce genre de minorations ne sont pas seulement vraies pour des processus gaussiens et ceux du type exponentiel, mais pour tous ceux dont la fonction de répartition des variables aléatoires qui les engendrent vérifie une propriété du type logarithmique.

Ces exemples de minorations achèvent la deuxième partie de notre travail consacrée aux séries aléatoires de type exponentiel.

V. THEOREME CENTRAL LIMITE.

Dans cette partie nous allons d'une part exposer le problème du Théorème Central Limite (en abrégé TCL) pour des fonctions aléatoires et, d'autre part, présenter quelques résultats obtenus dans les diverses directions d'études de ce problème. Vu le rôle fondamental du TCL pour les variables aléatoires en Probabilité et en Statistiques, il est naturel d'étudier ce problème pour les fonctions aléatoires.

Etant donné qu'une fonction aléatoire est une variable aléatoire dans un espace fonctionnel approprié, on peut poser le problème du TCL en termes de variables aléatoires à valeurs dans un espace de Banach. Le problème du TCL dans un tel espace se présente de la façon suivante : soit E un espace de Banach, soit $(X_n; n \in \mathbb{N})$ une suite de variables aléatoires indépendantes isonomes, définies sur le même espace d'épreuves $(\Omega, \mathcal{G}, P)$ et à valeurs dans E, de plus on suppose que les X_n sont centrées et de variance finie. Nous dirons que la suite $(X_n; n \in \mathbb{N})$ vérifie la propriété du TCL si les lois $\mathcal{L}(\frac{X_1+\ldots+X_n}{\sqrt{n}})$ convergent étroitement vers une mesure de probabilité γ_X sur E, lorsque n tend vers l'infini. Du TCL dans $\mathbb{R}$, il résulte que γ_X est nécessairement gaussienne.

Dans le cas des variables aléatoires réelles, une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite $(X_n; n \in \mathbb{N})$ vérifie la propriété du TCL est $E(X) = 0$ et $E(|X|^2) < \infty$; mais dans le cadre d'espaces plus généraux, cette condition n'est ni nécessaire ni suffisante ([18]).

La recherche de solutions au problème du TCL s'est faite dans deux directions. La première est la caractérisation des espaces de Banach E dans lesquels toute variable aléatoire centrée et de variance finie vérifie la propriété du TCL ; une telle caractérisation est donnée par J. Hoffmann-Jørgensen et

G. Pisier ([18]), à savoir que E est de type 2. La deuxième direction consiste à chercher des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction aléatoire satisfasse au TCL. Sous cette forme, le problème est directement lié à l'étude de la régularité des trajectoires des fonctions aléatoires ; par conséquent, le développement de méthodes pour cette étude a fourni des outils puissants pour résoudre le problème du TCL ; c'est dans cette direction que notre étude se fera. Dans ce domaine, notons les travaux de R.M. Dudley et V. Strassen ([7]) et de E. Giné ([15]) qui ont conduit au résultat de N. Jain et M. Marcus ([20]), que nous énoncerons et qui concerne les variables aléatoires à valeurs dans $C(T)$, où (T,d) est un espace métrique compact. Ce résultat est directement lié aux méthodes de J. Hoffmann-Jørgensen et G. Pisier, comme Zinn ([26]) l'a montré.

Le premier paragraphe est consacré à la présentation du problème du TCL, à l'énoncé du résultat de N. Jain et M. Marcus et enfin à quelques lemmes techniques. Dans le second, nous donnerons deux résultats originaux obtenus par la méthode des mesures majorantes. -

5.1. La propriété du Théorème Central Limite.

5.1. a) Présentation du problème.

Nous présentons ici le problème du TCL dans un espace de Banach particulier, que nous utiliserons par la suite.

Soient (T,d) un espace métrique compact et $C(T)$ l'espace des fonctions réelles, définies sur T , continues, muni de la norme de la convergence uniforme. Nous considérons les variables aléatoires X définies sur un espace d'épreuves $(\Omega,\mathcal{G},P)$ et à valeurs dans $C(T)$, vérifiant :

(h_1) Pour tout $t \in T , E(X(t)) = 0$,

(h_2) $\sup\limits_{t \in T} E(X^2(t)) < \infty$.

Soient X une telle variable aléatoire et $(X_n ; n \in \mathbb{N})$ une suite de copies indépendantes de X. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n ,$$

et désignons par μ_n la loi de $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$.

DEFINITION 5.1.1. - <u>On dit qu'une suite de mesures de probabilité</u> $(\mu_n ; n \in \mathbb{N})$ <u>converge étroitement vers une mesure de probabilité</u> μ <u>si pour toute fonction</u> f <u>définie sur</u> T , <u>continue et bornée on a :</u>

$$\lim_{n \to \infty} \int_T f d\mu_n = \int_T f d\mu .$$

A partir de la notion de convergence étroite, on définit la propriété du TCL.

DEFINITION 5.1.2. - <u>On dit qu'une variable aléatoire</u> X <u>à valeurs dans</u> $C(T)$ <u>vérifie la propriété du Théorème Central Limite si la suite</u> $(\mu_n ; n \in \mathbb{N})$ <u>des lois des</u> $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ <u>converge étroitement.</u>

Montrer qu'une variable aléatoire à valeurs dans $C(T)$ vérifie la propriété du TCL , c'est établir une propriété de compacité ; en effet dire que la suite de mesures de probabilité $(\mu_n ; n \in \mathbb{N})$ converge étroitement est équivalent, d'après P. Billingsley ([2]) et le TCL en dimension finie, à dire que :

a) Les marges de dimension finie sont étroitement convergentes,

b) La suite $(\mu_n ; n \in \mathbb{N})$ est tendue.

La propriété b) signifie que la suite $(\mu_n ; n \in \mathbb{N})$ satisfait à la condition de Prohorov, à savoir :

pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K de $C(T)$ tel que pour tout entier n , on ait

$$\mu_n(K) > 1-\varepsilon \ .$$

Dans la pratique, pour vérifier cette condition il nous suffira de montrer que

$$\forall\, \varepsilon>0 \ , \ \forall\, \eta>0 \ , \ \exists\, n_o \in \mathbb{N} \ , \ \exists\, \delta>0 :$$

$$n \geq n_o \Rightarrow \mu_n(x : \sup_{d(s,t)<\delta} |x(s)-x(t)| \geq \varepsilon) \leq \eta \ .$$

Si la condition a) est vérifiée, les marges finies des μ_n convergent vers celles d'une mesure cylindrique gaussienne sur $C(T)$. Si, de plus, on a la propriété précédente, alors les μ_n convergent étroitement vers une mesure de probabilité induite sur $C(T)$ par une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{G}, P)$, à valeurs dans $C(T)$ et de même covariance que X.

En conclusion, sous les hypothèses (h_1) et (h_2) et d'après le TCL en dimension finie, il suffira, pour avoir la propriété du TCL dans $C(T)$, de montrer que les sommes $(\frac{S_n}{\sqrt{n}}, n \in \mathbb{N})$ sont uniformément équicontinues en probabilité.

5.1. b) Une condition suffisante.

Nous allons énoncer le résultat de N. Jain et M. Marcus ([20]) qui donne une condition suffisante pour qu'une fonction aléatoire uniformément majorée satisfasse à la propriété du TCL.

Soient (T,d) un espace métrique et δ un écart sur T, d-continu. Comme dans le corollaire 2.1.7, on note $N_\delta(\varepsilon)$ le nombre minimal de δ-boules de rayon ε recouvrant T. Nous avons :

THEOREME 5.1.3. ([20]) : <u>Soit</u> X <u>une variable aléatoire définie sur un espace d'épreuves</u> $(\Omega, \mathcal{G}, P)$, <u>à valeurs dans</u> $C(T)$ <u>et vérifiant les conditions</u> (h_1) <u>et</u> (h_2). <u>On suppose de plus qu'il existe une variable aléatoire réelle</u> M <u>telle que</u> $E(M^2) = 1$ <u>et un écart</u> δ <u>sur</u> T, d-<u>continu, tels que pour tout</u> $s,t \in T$ <u>et tout</u> $\omega \in \Omega$, <u>on ait</u> :

(1) $$|X(s,\omega)-X(t,\omega)| \leq M(\omega)\delta(s,t) \ .$$

<u>Une condition suffisante pour que</u> X <u>vérifie la propriété du TCL est que</u>

(2) $$\int_0 \sqrt{\log N_\delta(u)}\, du < \infty \ .$$

La démonstration est basée sur la technique de "recouvrement" introduite par R.M. Dudley ([6]). Notons que la condition (2) est équivalente à

$$\sum_n \frac{1}{2^n} \sqrt{\log N_\delta(\frac{1}{2^n})} < \infty \ .$$

D'après le corollaire 2.1.7, une fonction aléatoire gaussienne définie sur T , centrée, à covariance continue et vérifiant la condition (2) pour l'écart induit sur T par la covariance, est presque sûrement à trajectoires continues ; une telle fonction aléatoire peut donc être considérée comme une variable aléatoire à valeurs dans $C(T)$ qui évidemment vérifie la propriété du TCL. Mais ce fait ne peut être déduit du théorème 5.1.3. En fait, il existe des processus gaussiens définis sur T vérifiant la condition (2) pour l'écart défini à partir de la covariance et pour lesquels tout écart δ satisfaisant à (1) est tel que :

$$\int_0 \sqrt{\log N_\delta(u)}\, du = \infty \ .$$

Notons également que B. Heinkel ([17]) a obtenu une condition suffisante plus générale du type "mesures majorantes", à savoir

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{t \in T} \int_0^\varepsilon \sqrt{\log \frac{1}{\mu(B_\delta(t,u))}}\, du = 0 \ .$$

5.1. c) Lemmes techniques.

Nous allons présenter quelques lemmes que nous utiliserons dans le deuxième paragraphe. Le premier, qui est dû à N. Jain et M. Marcus ([20]), est très important ; il nous permet en effet de nous restreindre uniquement aux variables symétriques.

LEMME DE SYMETRISATION. - Soit $(Z_n; n \in \mathbb{N})$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace d'épreuves $(\Omega, \mathcal{G}, P)$ et à valeurs dans $C(T)$. On suppose qu'il existe une mesure de probabilité μ sur $(C(T), \mathcal{B})$ telle que les marges finies des lois de $(Z_n; n \in \mathbb{N})$ convergent vers celles de μ, et que la suite $(Z_n; n \in \mathbb{N})$ satisfait à :

i) Pour tout $t \in T$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $E(Z_n(t)) = 0$.

ii) $\forall\, \varepsilon > 0$, $\forall\, \eta > 0$, $\exists\, \delta > 0 : d(s,t) \leq \delta \Rightarrow \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} P(|Z_n(s) - Z_n(t)| \geq \varepsilon) \leq \eta$.

Notons μ_n et μ'_n les lois de Z_n et $-Z_n$. Dans ces conditions, si la suite $(\mu_n * \mu'_n; n \in \mathbb{N})$ est tendue, alors la suite $(\mu_n; n \in \mathbb{N})$ converge étroitement vers μ.

Démonstration : On rappelle que le produit de convolution de deux mesures μ et ν est défini par :

$$\forall\, A \in \mathcal{B},\ \mu * \nu(A) = \int \mu(A-x)\, d\nu(x) .$$

La démonstration se fait en deux étapes.

1ère étape : Montrons qu'il existe une suite de mesures de Dirac $(\delta_{x_n}; n \in \mathbb{N})$ sur $C(T)$, telle que la suite $(\alpha_n = \mu_n * \delta_{x_n}; n \in \mathbb{N})$ soit tendue. En effet, par hypothèse, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, il existe un compact K_ℓ de $C(T)$ tel que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \mu_n * \mu'_n(K_\ell) > 1 - \frac{1}{\ell^2} .$$

Soit c une constante positive telle que la série $\sum\limits_{\ell \in \mathbb{N}} \frac{c}{\ell^{3/2}}$ soit inférieure à $1/2$ et posons :

$$A_{n_\ell} = \{x : \mu_n(K_\ell - x) > 1 - \frac{1}{c\sqrt{\ell}}\},\ F_n = \bigcap_{\ell \in \mathbb{N}} A_{n_\ell} ;$$

un calcul simple nous donne :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} ,\ \mu_n'(F_n^c) \leq \frac{1}{2} .$$

Donc F_n n'est pas vide. Soit $x_n \in F_n$ et posons $\alpha_n = \mu_n * \delta_{x_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; alors pour tous les entiers n et ℓ on a :

$$\alpha_n(K_\ell) = \mu_n(K_\ell - x_n) > 1 - \frac{1}{c\sqrt{\ell}} ,$$

la suite $(\alpha_n; n \in \mathbb{N})$ est donc tendue. Soit une sous-suite $(\alpha_{n_k}; k \in \mathbb{N})$ qui converge étroitement vers une mesure α. Mais les marges finies de $(\mu_{n_k}; k \in \mathbb{N})$ et $(\alpha_{n_k}; k \in \mathbb{N})$ convergent vers celles de μ et α respectivement ; donc pour tout $t \in T$, la suite $(x_{n_k}(t); k \in \mathbb{N})$ converge vers une limite $x(t)$. Comme μ et α sont définies sur $(C(T), \mathcal{B})$ et leurs marges finies d'indice t diffèrent de $\delta_{x(t)}$, x est un élément de $C(T)$.

<u>2ème étape</u> : Montrons que $\|x_{n_k} - x\| \to o$, quand $k \to \infty$. Pour simplifier l'écriture, supposons que $x = 0$ et que $(\alpha_n; n \in \mathbb{N})$ converge elle-même étroitement ; raisonnons par l'absurde : soit une constante $\theta > 0$, une suite $(n_k; k \in \mathbb{N})$ et une suite $(t_{n_k}; k \in \mathbb{N})$ de T, telles que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, |x_{n_k}(t_{n_k})| \geq \theta .$$

Comme T est compact, soit s_o un point d'accumulation de $(t_{n_k}; k \in \mathbb{N})$. On construit une sous-suite $S = (s_k; k \in \mathbb{N})$ de $(t_{n_k}; k \in \mathbb{N})$, telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on ait :

$$\delta_k = d(s_k, s_o) = \frac{1}{2} \min_{j \leq k} (\min(d(s_{j-1}, s_j); d(s_{j-1}, s_o))) ,$$

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} P(|Z_n(s_k) - Z_n(s_o)| \geq \frac{1}{2^k}) \leq \frac{1}{2^k} ;$$

la suite $(\delta_k, k \in \mathbb{N})$ étant décroissante, on a :

$$P\Big(\sup_{\substack{d(s,t) < \delta_k \\ s,t \in S}} |Z_n(s) - Z_n(t)| > \frac{1}{2^{k+1}} \Big) \le \frac{1}{2^{k+1}} .$$

Donc la suite $(\mu_n ; n \in \mathbb{N})$ est tendue sur $C(S)$. D'après l'hypothèse sur les marges finies, $(\mu_n ; n \in \mathbb{N})$ converge étroitement vers μ sur $C(S)$; de même $(\alpha_n ; n \in \mathbb{N})$ converge étroitement vers μ sur $C(S)$. D'où l'existence d'une constante $\gamma > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait

$$P\Big(\sup_{\substack{d(s,t) \le \gamma \\ s,t \in S}} |Z_n(s) - Z_n(t)| < \frac{\theta}{4}\Big) \ge \frac{3}{4} ,$$

$$P\Big(\sup_{\substack{d(s,t) \le \gamma \\ s,t \in S}} |Z_n(s) - Z_n(t) + x_n(s) - x_n(t)| < \frac{\theta}{4}\Big) \ge \frac{3}{4} .$$

On en déduit

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \sup_{\substack{d(s,t) \le \gamma \\ s,t \in S}} |x_n(s) - x_n(t)| < \frac{\theta}{2} .$$

Mais pour tout $s \in T$ et tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$x_n(s) \to 0 \ , \ (n \to \infty) \ , \ |x_{n_k}(t_{n_k})| \ge \theta \ ;$$

on en déduit

$$\exists\, n_k : \sup_{\substack{d(s,t) \le \gamma \\ s,t \in S}} |x_{n_k}(s) - x_{n_k}(t)| \ge \frac{3\theta}{4} .$$

D'où la contradiction. Donc $\|x_{n_k} - x\| \to 0 (k \to \infty)$. Ceci implique que $(\mu_{n_k} ; k \in \mathbb{N})$ converge étroitement vers μ. Donc la suite $(\mu_n ; n \in \mathbb{N})$ est relativement compacte et de ce fait tendue. De l'hypothèse sur les marges finies, on déduit la convergence étroite de $(\mu_n ; n \in \mathbb{N})$ vers μ. C'est le résultat annoncé. -

Le deuxième lemme nous fournit une inégalité sur des variables aléatoires de Rademacher. Une variable aléatoire ε est dite de Rademacher si elle prend les valeurs 1 et -1 avec une probabilité de $\frac{1}{2}$. Nous avons :

LEMME 5.1.4. - Soient $(\varepsilon_k ; k = 1,\dots,n)$ une suite de variables aléatoires de Rademacher, indépendantes et $(a_k ; k = 1,\dots,n)$ une suite de nombres réels. Pour tout réel α positif, on a l'inégalité :

$$E\left(\exp \alpha \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k \varepsilon_k}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}}\right) \leq e^{\alpha^2/2} .$$

La démonstration est basée sur l'inégalité

$$e^{-\alpha} + e^{\alpha} \leq 2e^{\alpha^2/2} .$$

Remarquons que l'on a une inégalité analogue avec les valeurs absolues ; il y a alors un facteur deux au membre de droite.

Nous allons conclure ce paragraphe par un lemme qui nous permettra de passer d'une famille de variables de Rademacher à une famille de variables gaussiennes. De manière précise on a :

LEMME 5.1.5. - Soit $(\lambda_k ; k = 1,\dots,n)$ une suite de variables aléatoires gaussiennes, centrées, réduites, indépendantes et définies sur un espace d'épreuves $(\Omega, \mathcal{G}, P)$. Soient $(\varepsilon_k ; k = 1,\dots,n)$ une suite de variables aléatoires de Rademacher, indépendantes, définies sur un espace d'épreuves $(\Omega', \mathcal{G}', P')$ et $(x_k ; k = 1,\dots,n)$ une suite de nombres réels. Dans ces conditions, pour tout $p \geq 1$ on a :

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\int\left|\sum_{k=1}^{n} x_k \varepsilon_k(\omega')\right|^p dP'(\omega')\right)^{1/p} \leq \left(\int\left|\sum_{k=1}^{n} x_k \lambda_k(\omega)\right|^p dP(\omega)\right)^{1/p} .$$

<u>Démonstration</u> : Soit $\omega' \in \Omega'$ fixé, on a :

$$\left|\int\left(\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k(\omega')|\lambda_k(\omega)|x_k\right)dP(\omega)\right| \leq \int\left|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k(\omega')|\lambda_k(\omega)|x_k\right|dP(\omega) ;$$

en appliquant l'inégalité de Hölder et en intégrant par rapport à P' , on en déduit :

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\int\left|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k(\omega')x_k\right|^p dP'(\omega')\right)^{1/p} \leq \left(\int\left(\int\left|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k(\omega')|\lambda_k(\omega)|x_k\right|^p dP(\omega)\right)dP'(\omega')\right)^{1/p} .$$

La variable aléatoire $\sum_{k=1}^{n} x_k\varepsilon_k|\lambda_k|$ définie sur $(\Omega' \times \Omega, \mathcal{G}\otimes\mathcal{G}')$ est gaussienne centrée, de variance $\sum_{k=1}^{n} x_k^2$; elle est donc de même loi que la variable aléatoire $\sum_{k=1}^{n} x_k\lambda_k$ définie sur $(\Omega,\mathcal{G})$, d'où l'on obtient l'inégalité annoncée. -

5.2. <u>Méthode des mesures majorantes et Théorème Central limite.</u>

Dans ce paragraphe nous présentons certains résultats nouveaux obtenus par la méthode des mesures majorantes. L'utilisation de cette méthode nous permet d'obtenir des conditions suffisantes pour que certaines variables aléatoires à valeurs dans $C(T)$ vérifient la propriété du TCL.

Nous considérons deux cas, le premier concerne les fonctions aléatoires associées à des fonctions de Young de type exponentiel et le second celles associées à des fonctions puissance.

5.2. a) Fonctions aléatoires associées aux fonctions Φ_α .

Considérons (T,d) un espace métrique compact, $(\Omega,\mathcal{G},P)$ un espace d'épreuves et X une fonction aléatoire réelle définie sur T vérifiant les hypothèses suivantes ;

(h_1) Pour tout $t \in T$, $EX(t) = 0$

(h_2) $\sup_{t \in T} E(X^2(t)) < +\infty$.

Nous rappelons qu'on désigne par $\Phi_{\alpha,1}$ la fonction $e^{|x|^\alpha} - \sum_{n\alpha \leq 1} \frac{|x|^{n\alpha}}{n!}$ et par (H) l'hypothèse :

Il existe des constantes α et a strictement positives telles que pour tout $s,t \in T$ on a

$$E(\Phi_{\alpha,1}(\frac{\tilde{X}(s,t)}{a})) \leq 1 .$$

Nous avons le résultat suivant :

PROPOSITION 5.2.1. - Si X est une fonction aléatoire réelle, symétrique, vérifiant l'hypothèse (H), alors il existe des constantes β et b strictement positives ne dépendant que de α et a telles que pour tout $s,t \in T$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on ait :

$$E(\Phi_{\beta,1}(\frac{\tilde{S}_n(s,t)}{b\sqrt{n}})) \leq 1 .$$

Démonstration : D'après la définition de la fonction $\Phi_{\beta,1}(x)$ on a

$$E(\Phi_{\beta,1}(\frac{\tilde{S}_n}{\sqrt{n}})) = \sum_{\substack{p\beta > 1 \\ p \in \mathbb{N}}} E(|\frac{\tilde{S}_n}{\sqrt{n}}|^{p\beta})\frac{1}{p!b^{p\beta}} .$$

Considérons une famille de variables de Rademacher, indépendantes $\{\varepsilon_k, k = 1,\dots,n\}$, en utilisant une formule classique d'intégration et la symétrie des X_i, on a

$$E\left|\frac{\widetilde{S}_n}{\sqrt{n}}\right|^{p\beta} = E\int dP(\varepsilon)\left|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \frac{\widetilde{X}_k}{\sqrt{n}}\right|^{p\beta} ,$$

$$= E\int_0^{+\infty} P\left(\frac{\left|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \frac{\widetilde{X}_k}{\sqrt{n}}\right|}{\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{|\widetilde{X}_k|^2}{n}\right)^{1/2}} > \frac{u^{1/p\beta}}{\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{|\widetilde{X}_k|^2}{n}\right)^{1/2}}\right)du .$$

En appliquant le lemme 5.1.4. on obtient :

$$E\left|\frac{\widetilde{S}_n}{\sqrt{n}}\right|^{p\beta} \leq 2E\left(\int_0^{+\infty} \exp\left\{-\frac{u^{2/p\beta}}{2\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{|\widetilde{X}_k|^2}{n}\right)}\right\}du\right) ,$$

$$\leq 2^{\frac{p\beta}{2}+1}\,\Gamma\left(\frac{p\beta}{2}+1\right)E\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{|\widetilde{X}_k|^2}{n}\right)^{\frac{p\beta}{2}} ;$$

d'où en reportant

$$E\left(\Phi_{\beta,1}\left(\frac{\widetilde{S}_n}{b\sqrt{n}}\right)\right) \leq \sum_{1<p\beta\leq 2} \frac{2^{\frac{p\beta}{2}+1}\,\Gamma\left(\frac{p\beta}{2}+1\right)}{p!\,b^{p\beta}} E\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{|\widetilde{X}_k|^2}{n}\right)^{\frac{p\beta}{2}} +$$

$$+ \sum_{p\beta>2} \frac{2^{\frac{p\beta}{2}+1}\,\Gamma\left(\frac{p\beta}{2}+1\right)}{p!\,b^{p\beta}} E\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{|\widetilde{X}_k|^2}{n}\right)^{\frac{p\beta}{2}} .$$

Remarquons que :

.) Si $1<p\beta\leq 2$, de la concavité de la fonction $x^{\frac{p\beta}{2}}$ on déduit,

$$E\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{|\widetilde{X}_k|^2}{n}\right)^{\frac{p\beta}{2}} \leq (E|\widetilde{X}|^2)^{\frac{p\beta}{2}} .$$

..) Si $p\beta > 2$, en utilisant la convexité de la fonction $x^{\frac{p\beta}{2}}$ on a :

$$E\Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{|\tilde{X}_k|^2}{n}\Big)^{\frac{p\beta}{2}} \leq E|\tilde{X}|^{p\beta} .$$

On en déduit la majoration :

$$E\Big(\Phi_{\beta,1}\Big(\frac{\tilde{S}_n}{b\sqrt{n}}\Big)\Big) \leq \sum_{1<p\beta\leq 2} \frac{2^{\frac{p\beta}{2}+1}\,\Gamma(\frac{p\beta}{2}+1)}{p!\,b^{p\beta}} (E|\tilde{X}|^2)^{p\beta/2} +$$

$$+ \sum_{p\beta>2} \frac{2^{\frac{p\beta}{2}+1}\,\Gamma(\frac{p\beta}{2}+1)}{p!\,b^{p\beta}}\, E|\tilde{X}|^{p\beta} .$$

Pour $p\beta > 2$ et pour tout nombre réel u positif on a l'inégalité :

$$u^{p\beta} \leq \Big(\frac{p\beta}{\alpha}\Big)^{\frac{p\beta}{\alpha}} e^{-\frac{p\beta}{\alpha}} e^{u^\alpha} ;$$

de celle-ci et de l'hypothèse (H) , on obtient :

$$E\Big(\Phi_{\beta,1}\Big(\frac{\tilde{S}_n}{b\sqrt{n}}\Big)\Big) \leq \sum_{1<p\beta\leq 2} \frac{2^{\frac{p\beta}{2}+}\,\Gamma(\frac{p\beta}{2}+1)}{p!\,b^{p\beta}} (E|\tilde{X}|^2)^{\frac{p\beta}{2}} +$$

$$+ \sum_{p\beta>2} \frac{1}{p!}\Big(\frac{a}{b}\Big)^{p\beta} \Big(\frac{p\beta}{\alpha}\Big)^{\frac{p\beta}{\alpha}} 2^{\frac{p\beta}{2}+1}\,\Gamma\Big(\frac{p\beta}{2}+1\Big) e^{-\frac{p\beta}{\alpha}} .$$

La proposition sera démontrée si on peut choisir β et b tels que les deux termes du second membre soient inférieurs à $\frac{1}{2}$. Si on désigne par u_p le terme général de la seconde série, il apparaît à partir de la formule de Stirling et en posant $\beta = \frac{2\alpha}{2+\alpha}$,

$$u_p \leq K\Big(2\Big(\frac{a}{b}\Big)^{\beta}\Big)^p ,$$

où K une constante numérique. Donc pour b supérieur à $\frac{a}{2^{1/\beta}}$, la deuxième série est convergente et on peut choisir b assez grand pour que sa somme soit majorée par $1/2$. D'autre part

$$\sum_{p=[\frac{1}{\beta}]+1}^{[\frac{2}{\beta}]} \frac{2^{\frac{p\beta}{2}+1}\,\Gamma(\frac{p\beta}{2}+1)}{p!\,b^{p\beta}}(E(|\tilde{X}|)^2)^{\frac{p\beta}{2}} \leq$$

$$\leq ([\tfrac{2}{\beta}]-[\tfrac{1}{\beta}]-1)\frac{2^{[\frac{2}{\beta}]\frac{\beta}{2}+1}\,\Gamma([\frac{2}{\beta}]\frac{\beta}{2}+1)}{([\frac{1}{\beta}]+1)!\,b^{([\frac{1}{\beta}]+1)\beta}}\sup((E|\tilde{X}|^2)^{[\frac{2}{\beta}]\frac{\beta}{2}},(E|\tilde{X}|^2)^{([\frac{1}{\beta}]+1)\frac{\beta}{2}}) .$$

Donc pour le même β, comme $E|\tilde{X}|^2 \leq 1$, on peut choisir b assez grand pour que ce terme soit majoré par $1/2$. La démonstration est achevée. -

Nous en venons à présent au TCL pour des fonctions aléatoires associées à des fonctions de Young de type exponentiel.

THEOREME 5.2.2. - Soient (T,d) un espace métrique compact, $(\Omega,\mathcal{G},P)$ un espace d'épreuves et X une fonction aléatoire réelle définie sur $\Omega \times T$ et vérifiant les hypothèses $(h_1),(h_2)$ et (H). Une condition suffisante pour que X satisfasse la propriété du TCL dans $C(T)$ est qu'il existe une mesure de probabilité μ sur $(T,\mathcal{T})$ telle que :

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\ \sup_{t\in T}\int_0^{\varepsilon}(\log\frac{1}{\mu(B_\delta(t,u))})^{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{2}}du = 0 ,$$

où α est déterminé par l'hypothèse (H).

Démonstration : Soit $(X_n;n\in\mathbb{N})$ une suite de fonctions aléatoires, indépendantes et de même loi que X. On pose, pour tout entier n

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \ .$$

D'après le TCL en dimension finie, les marges finies des lois des $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ convergent étroitement vers celles d'une mesure de probabilité gaussienne sur $C(T)$ et celle-ci est la mesure de probabilité induite sur $C(T)$ par le processus gaussien de même covariance que X qui existe d'après les hypothèses.

Supposons, dans un premier temps, que X soit symétrique. D'après le paragraphe 5.1. a), pour établir le résultat dans ce cas, il suffit de prouver que la suite $(\frac{S_n}{\sqrt{n}} ; n \in \mathbb{N})$ est tendue et pour cela il suffit de montrer :

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \forall \eta > 0 \ \exists \ \delta_o > 0 :$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \ P(\sup_{\delta(s,t) < \delta_o} \left| \frac{S_n(s)}{\sqrt{n}} - \frac{S_n(t)}{\sqrt{n}} \right| > \varepsilon \ ) < \eta \ .$$

D'après la proposition 5.2.1. et le corollaire 2.1.9, il existe une constante C positive telle que pour tout $\delta_o > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on ait :

$$E(\sup_{\delta(s,t) < \delta_o} \left| \frac{S_n(s)}{\sqrt{n}} - \frac{S_n(t)}{\sqrt{n}} \right|) \leq C \sup_{u \in T} \int_o^{\frac{\delta_o}{2}} (\log(1+ \frac{1}{\mu^2(B_\delta(u,v))}))^{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2}} dv \ .$$

L'hypothèse du théorème et l'inégalité de Čebičev nous donnent le résultat dans le cas symétrique. Pour le cas général nous allons appliquer le lemme de symétrisation. Soit $(X'_n ; n \in \mathbb{N})$ une suite de fonctions aléatoires de même loi que X, indépendantes et indépendantes de la suite $(X_n ; n \in \mathbb{N})$. Désignons par $(P_n ; n \in \mathbb{N})$ et $(P'_n ; n \in \mathbb{N})$ les lois de $(\frac{S_n}{\sqrt{n}} ; n \in \mathbb{N})$ et $(- \frac{S'_n}{\sqrt{n}} ; n \in \mathbb{N})$. D'après le TCL en dimension finie, les marges finies des P_n convergent étroitement vers celles d'une mesure de Probabilité gaussienne sur $C(T)$. Les $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ vérifiant l'hypothèse (h_1) et de l'inégalité de Čebičev on a :

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} P\left(\left|\frac{S_n(s)}{\sqrt{n}} - \frac{S_n(t)}{\sqrt{n}}\right| > \varepsilon\right) \le \frac{\delta^2(s,t)}{\varepsilon^2} .$$

D'après les calculs dans le cas symétrique, la suite $(P_n * P'_n ; n\in\mathbb{N})$ est tendue ; en effet, ce sont les lois de $(\frac{S_n - S'_n}{\sqrt{n}} ; n\in\mathbb{N})$ qui sont symétriques. Donc on peut appliquer le lemme de symétrisation ; celui-ci nous donne le résultat général. -

REMARQUES 5.2.3. i) : L'exposant $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2}$ n'est pas seulement le résultat d'un calcul, mais il est naturel. De l'hypothèse du théorème 5.2.2. on a

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \sup_{t\in T} \int_0^\varepsilon \left(\log\left(1+\frac{1}{\mu^2(B_\delta(t,u))}\right)\right)^{\frac{1}{\alpha}} du = 0 ,$$

donc X a presque sûrement ses trajectoires dans $C(T)$, d'après le corollaire 2.1.6. On a également :

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \sup_{t\in T} \int_0^\varepsilon \sqrt{\log\left(1+\frac{1}{\mu^2(B_\delta(t,u))}\right)}\, du = 0 ,$$

donc, d'après le théorème 2.3.1. ii), la fonction aléatoire gaussienne de même covariance que X , a presque sûrement ses trajectoires dans $C(T)$. Enfin la condition avec l'exposant en entier, nous permet d'avoir l'équicontinuité en probabilité et de là la convergence étroite. -

ii) On remarquera que pour montrer l'équitension de la suite $(\frac{S_n}{\sqrt{n}} ; n\in\mathbb{N})$ par la méthode des mesures majorantes, on est amené à utiliser une propriété des moments et non des probabilités. -

iii) Dans certains cas particuliers, on peut avoir le TCL sous des conditions plus faibles :

<u>Exemple 1</u> : Séries aléatoires de type exponentiel (2.3.4).

Si X est une série aléatoire de type exponentiel vérifiant les hypothèses

(h_1) et (h_2) , une condition suffisante pour qu'elle satisfasse la propriété du TCL est qu'il existe une mesure μ sur $(T,\mathcal{T})$ telle que :

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sup_{t \in T} \int_0^{\varepsilon} \log \frac{1}{\mu(B_\delta(t,u))} \, du = 0 \, .$$

En effet, dans ce cas $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ est encore une série aléatoire de type exponentiel et il suffit d'appliquer la proposition 2.3.6, alors que l'application du Théorème général exigerait un exposant égal à $^3/2$.

Exemple 2 : Fonctions aléatoires à accroissements sous-gaussiens (2.3.2).

Si X est à accroissements sous-gaussiens et vérifie les hypothèses (h_1) et (h_2) , alors une condition suffisante pour qu'elle satisfasse la propriété du TCL, est que

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sup_{t \in T} \int_0^{\varepsilon} \sqrt{\log \frac{1}{\mu(B_\delta(t,u))}} \, du = 0 \, .$$

En effet, $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ est encore à accroissements sous-gaussiens ; on applique alors la proposition 2.3.3. Le théorème général exigerait un exposant égal à 1. -

Ces remarques terminent la partie consacrée aux fonctions aléatoires associées aux fonctions Φ_α . -

5.2. b) Fonctions aléatoires associées aux fonctions puissances.

Dans cette dernière partie, nous montrons que la condition suffisante de continuité pour une fonction aléatoire, associée à fonction de Young de type puissance, est également suffisante pour la propriété du TCL. Le résultat que nous obtenons, généralise celui de M.G. Hahn ([16]) qui traite le cas $r = 2$. Nous avons :

THEOREME 5.2.4. - <u>Soit</u> $[0,1]$ <u>muni de la distance usuelle et de la mesure de Lebesgue. Soient</u> $(\Omega,\mathcal{G},P)$ <u>un espace d'épreuves et</u> X <u>une fonction aléatoire</u>

définie sur $\Omega \times [0,1]$, vérifiant les hypothèses (h_1) et (h_2) . On suppose qu'il existe un nombre réel $r \geq 2$ et une fonction f définie sur $[0,1]$, positive, croissante dans un voisinage de l'origine, continue et s'annulant à l'origine, tels que pour tout $s,t \in [0,1]$ on ait :

$$E(|X(s)-X(t)|^r) \leq f^r(|s-t|) .$$

Une condition suffisante pour que X vérifie la propriété du TCL dans $C([0,1])$, est que

$$\int_0 \frac{f(u)}{u^{1+1/r}} du < \infty .$$

Démonstration : Soit $(X_n ; n \in \mathbb{N})$ une suite de fonctions aléatoires indépendantes de même loi que X . Le TCL en dimension finie nous permet d'affirmer que les marges finies des $\mathcal{L}(\frac{S_n}{\sqrt{n}})$ convergent vers celles d'une mesure de probabilité gaussienne induite sur $C([0,1])$ par la fonction aléatoire gaussienne de même covariance que X ; les hypothèses du théorème et le corollaire 2.1.8. nous assurent de l'existence de celle-ci. Supposons, dans un premier temps, que X est symétrique. D'après le paragraphe 5.1. a), il suffit de montrer que :

$$\forall \varepsilon > o \ , \ \forall \eta > o \ , \ \exists n_o \in \mathbb{N} \ , \ \exists \delta_o > 0 :$$

$$n \geq n_o \Rightarrow P(\sup_{|s-t| < \delta} |\frac{S_n(s)}{\sqrt{n}} - \frac{S_n(t)}{\sqrt{n}}| \geq \varepsilon) \leq \eta .$$

Considérons un autre espace d'épreuves sur lequel nous définissons une suite de variables aléatoires de Rademacher indépendantes $(\varepsilon_n, n \in \mathbb{N})$. Par symétrie on sait que les suites $(\varepsilon_n X_n ; n \in \mathbb{N})$ et $(X_n ; n \in \mathbb{N})$ ont même loi.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$Z_n(\omega,\omega',t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} X_k(\omega,t)\varepsilon_k(\omega') .$$

D'après le lemme 5.1.5, pour tout $s,t \in [0,1]$, on a :

$$E(|Z_n(s)-Z_n(t)|^r) \leq (\tfrac{\pi}{2})^{r/2} \int dP(\omega) \int dP'(\omega') \Big| \sum_{k=1}^{n} \frac{(X_k(\omega,s)-X_k(\omega,t))}{\sqrt{n}} \lambda_k(\omega')\Big|^r ,$$

où $(\lambda_n ; n \in \mathbb{N})$ est une suite de variables gaussiennes, indépendantes, centrées et réduites. D'où

$$E(|Z_n(s)-(Z_n(t)|^r) \leq (\tfrac{\pi}{2})^{r/2} \Gamma(\tfrac{r}{2}+1) E\Big[\Big(\frac{\sum_{k=1}^{n} (X_k(s)-X_k(t))^2}{n}\Big)^{r/2}\Big] .$$

Posons $p = \frac{r}{2}$ et $q = \frac{r}{r-2}$ si $r>2$, et $q=+\infty$ si $r = 2$; l'application de l'inégalité de Hölder nous donne :

$$E(|Z_n(s)-Z_n(t)|^r) \leq (\tfrac{\pi}{2})^{r/2} \Gamma(\tfrac{r}{2}+1) \frac{n^{\frac{r-2}{2}}}{n^{r/2}} E\Big(\sum_{k=1}^{n} |X_k(s)-X_k(t)|^r\Big) ,$$

les variables X_k étant de même loi que X , nous en déduisons

$$E(|Z_n(s)-Z_n(t)|^r) \leq (\tfrac{\pi}{2})^{r/2} \Gamma(\tfrac{r}{2}+1)\, f^r(|s-t|) .$$

Le théorème 3.1.1, nous assure de la continuité de presque toutes les trajectoires de $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$. D'après le corollaire 3.1.3, il existe une constante C , positive, telle que

$$E\Big(\sup_{|s-t|<\delta} \Big|\frac{S_n(t)}{\sqrt{n}} - \frac{S_n(t)}{\sqrt{n}}\Big|^r\Big) \leq C\, F(1)\, F(3\delta)^{r-1} ,$$

avec

$$F(x) = \int_0^x \frac{f(u)}{u^{1+\frac{1}{r}}}\, du .$$

L'inégalité de Čebičev et l'hypothèse sur l'intégrale, nous permettent de conclure dans le cas symétrique. Pour le cas général, il suffit de remarquer, toujours à l'aide de l'inégalité de Čebičev, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $s,t \in [0,1]$,

$$P\left(\left|\frac{S_n(s)}{\sqrt{n}} - \frac{S_n(t)}{\sqrt{n}}\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} f^2(|s-t|) ,$$

et d'appliquer alors le lemme de symétrisation ; on a alors le résultat annoncé. -

Pour conclure cette partie, remarquons, comme dans le théorème 5.2.2, que c'est une propriété sur les moments que nous avons utilisée, et non sur les probabilités. -

CONCLUSION

Notre travail, loin d'être exhaustif, constitue les premiers pas dans la mise en oeuvre de la méthode des mesures majorantes dans toute sa généralité. En effet, plusieurs questions se posent de manière naturelle et leurs réponses permettront un progrès dans l'étude de la régularité des trajectoires des fonctions aléatoires réelles.

La première question qui est, à notre avis, fondamentale, a trait à l'unité de la méthode. Il est apparu, en ce qui concerne la représentation par une intégrale de la condition suffisante, deux démarches distinctes ; l'une, qui est générale, plus particulièrement adaptée aux fonctions de Young à croissance rapide (type exponentiel), l'autre, qui est plus efficace, dans certains cas, pour les fonctions à croissance lente (type puissance). Il serait utile d'approfondir l'étude et de justifier cette différence autrement que par les calculs. En particulier, il faudrait pouvoir déterminer quels choix de ρ et μ (corollaire 1.1.6.) accordent une plus grande efficacité à la deuxième démarche.

La deuxième question, qui est très générale, consiste en l'étude des mesures majorantes. A partir de leur existence, peut-on en construire une explicitement, et qui soit basée sur l'écart induit par la fonction aléatoire ? Nous avons vu que dans certains cas (corollaire 2.1.7, théorème 3.1.1.) cela était possible. Le problème reste ouvert dans le cas général. A partir d'une solution, il serait intéressant de pouvoir déterminer une meilleure mesure majorante. Enfin une question qui se pose de manière naturelle est de préciser quelles sont les mesures majorantes qui satisfont à la condition de continuité. Remarquons qu'une généralisation de la méthode d'Orlicz permettrait d'étendre les résultats précédents, mais il semblerait que ceci ne soit pas possible pour des fonctions de Young à croissance trop lente.

Un troisième groupe de problèmes ouverts concerne la recherche des cas dans lesquels les conditions suffisantes sont également nécessaires. Dans un premier temps, il faudrait chercher à généraliser les minorations que nous avons pour les processus gaussiens (X. Fernique [12]) et pour les séries aléatoires de type exponentiel (chapitre IV), définis sur des limites projectives d'ensembles. Puis, en approchant une fonction aléatoire par des fonctions aléatoires du type ultramétrique, on obtiendrait des conditions nécessaires. Notons également, dans le même ordre d'idées, le problème, qui est ouvert, de la construction d'une fonction aléatoire à trajectoires majorées ou continues qui n'admette pas de mesure majorante. L'étude d'une telle fonction nous apporterait des renseignements précieux sur la nature profonde de la méthode.

Enfin, la dernière question découle du cinquième chapitre. Peut-on avoir une condition suffisante générale, du type mesures majorantes, pour qu'une fonction aléatoire satisfasse au théorème central limite dans $C(T)$? On pourrait aborder également le problème de la nécessité des conditions. Pour terminer, remarquons qu'il serait intéressant d'étendre les résultats précédents aux fonctions aléatoires à trajectoires dans $D(T)$, espace des fonctions définies sur T et ayant des discontinuités de première espèce. -

REFERENCES

[1] BERNARD P. Quelques propriétés des trajectoires des fonctions aléatoires stables sur R^k. Ann. Inst. H. Poincaré Sec. B,6,2, (1970) pp. 131-151.

[2] BILLINGSLEY P. Convergence of probability measures. Wiley (1968).

[3] BOULICAUT P. Fonctions de Young et fonctions aléatoires à trajectoires continues. C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. A, 278 (1974), pp. 447-450.

[4] DUDLEY R.M. The sizes of compact subsets of Hilbert space and continuity of gaussian processes. J. Functional Anal., 1, 3, (1967), pp. 290-330.

[5] DUDLEY R.M. Sample functions of the gaussian process. Ann. of Probability, 1, (1973), pp. 66-103.

[6] DUDLEY R.M. Metric entropy and the central limit theorem in $C(S)$. Ann. Inst. Fourier, 24, 2, (1974), pp. 48-60.

[7] DUDLEY R.M. et STRASSEN V. The central limit theorem and the ε-entropie. Lect. Notes Math., 89, (1969), pp. 224-231.

[8] FERNIQUE X. Continuité des processus gaussiens. C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. A-B, 258, (1964), pp. 6058-6060.

[9] FERNIQUE X. Intégrabilité des vecteurs gaussiens. C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. A, 270, (1970), pp. 1698-1699.

[10] FERNIQUE X. Régularité de Processus gaussiens. Invent. Math., 12, (1971), pp. 303-320.

[11] FERNIQUE X. Régularité des trajectoires des fonctions aléatoires gaussiennes. Ecole d'Eté de Probabilité de St Flour (1974). Lect. Notes Math., 480, (1975), pp. 1-96.

[12] FERNIQUE X. Evaluation de processus gaussiens composés. Lect. Notes Math., 526, (1976), pp. 67-83.

[13] GARSIA A. et RODEMICH E. Monotonicity of certain functionals under rearrangement. Ann. Inst. Fourier, 24, 2, (1974), pp. 67-117.

[14] GARSIA A., RODEMICH E. et RUMSEY H. A real variable lemma and the continuity of paths of gaussian processes. Indiana Univ. Math. J, 20, (1971), pp. 565-578.

[15] GINÉ E. On the central limit theorem for sample continuous processes. Ann. of Probability, 2, (1974), pp. 629-641.

[16] HAHN M.G. Conditions for sample-continuity and central limit theorem. (1976) à paraître dans Ann. of Probability.

[17] HEINKEL B. Méthode des mesures majorantes et le théorème central limite dans $C(S)$. (1976) à paraître dans Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Gebiete.

[18] HOFFMANN-JØRGENSEN J. et PISIER G. The strong law of large numbers and the central limit theorem in Banach spaces. Ann. of Probability, 4, (1976), pp. 587-599.

[19] JAIN N.C. et MARCUS M.B. Sufficient conditions for the continuity of stationary gaussian processes and applications to random series. Ann. Inst. Fourier, 24, 2, (1974), pp. 117-141.

[20] JAIN N.C. et MARCUS M.B. Central limit theorem for $C(S)$-valued random variables. J. of Functional Anal., 19, (1975), pp. 216-231.

[21] KRASNOSELSKY M.A. et RUTITSKY Y.B. Convex functions and Orlicz spaces. Dehli Publ. Hindustan Corp. (1962).

[22] LOÈVE M. Probability theory. Van Nostrand, 3ème ed., (1963).

[23] NEVEU J. Martingales à temps discret. Dunod (1972).

[24] PRESTON C. Banach spaces arising from some integral inequalities. Indiana Univ. Math. J., 20, (1971), pp. 997-1015.

[25] PRESTON C. Continuity properties of some gaussian processes. Ann. Math. Stat., 43, (1972), pp. 285-292.

[26] ZINN J. A note on the central limit theorem. (1976) à paraître.