SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CLAUDE DELLACHERIE
GABRIEL MOKOBODZKI

Deux propriétés des ensembles minces (abstraits)

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 12 (1978), p. 564-566
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1978__12__564_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1976/77

DEUX PROPRIETES DES ENSEMBLES MINCES (ABSTRAITS)

par C. Dellacherie et G. Mokobodzki

Il ne s'agit pas, à proprement parler, d'un article écrit en commun, mais de deux courtes notes écrites séparément sur le même sujet, et accolées. En particulier, le dactylographe (qui est aussi le premier auteur) a scrupuleusement respecté le manuscrit du second auteur, d'où des redondances possibles.

I.- UN THEOREME GENERAL D'EXISTENCE DE "ESS SUP" et "ESS INF".

Soit $(\Omega,\underline{\underline{F}})$ un espace mesurable et soit $\underline{\underline{H}}$ un sous-pavage de $\underline{\underline{F}}$ (i.e. $\underline{\underline{H}}$ est une partie de $\underline{\underline{F}}$ telle que $\emptyset\in\underline{\underline{H}}$). Nous dirons qu'une partie A de Ω est <u>$\underline{\underline{H}}$-mince</u> si, pour toute famille $(B_i)_{i\in I}$ d'éléments disjoints de $\underline{\underline{F}}$ contenus dans A , on a $B_i\in\underline{\underline{H}}$ sauf pour au plus une infinité dénombrable d'indices.

On a, dans ce contexte très général (noter qu'on ne requiert aucune stabilité pour $\underline{\underline{H}}$), le théorème suivant d'existence d'un "ess sup" :

THEOREME.- <u>Soit</u> M <u>une partie</u> $\underline{\underline{H}}$-<u>mince de</u> Ω <u>et soit</u> $(B_i)_{i\in I}$ <u>une famille d'éléments de</u> $\underline{\underline{F}}$ <u>contenus dans</u> M . <u>Il existe alors une partie dénombrable</u> J <u>de l'ensemble d'indices</u> I <u>telle que</u>, <u>pour tout</u> $i\in I$, <u>l'ensemble</u>

$$B_i - (\bigcup_{j\in J} B_j)$$

<u>appartienne à</u> $\underline{\underline{H}}$.

<u>D/</u> Nous allons tout simplement (et tout bêtement, car on n'y comprend rien !) recopier la démonstration du théorème II.10 de "Capacités et Processus stochastiques" (où $\underline{\underline{H}}$ était la horde des ensembles négligeables pour une bonne capacité). Supposons qu'il existe une famille $(B_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\underline{\underline{F}}$ contenus dans M telle que, pour toute partie dénombrable J de I , il existe un indice i_J tel que $B_{i_J} - (\bigcup_{j\in J} B_j)$ n'appartienne pas à $\underline{\underline{H}}$. Désignons alors par Φ l'ensemble des familles $(F_t)_{t\in T}$ d'éléments disjoints de $\underline{\underline{F}}$ contenus dans M , vérifiant la condition suivante : T est un ensemble d'indices ; pour tout $t\in T$, F_t n'appartient pas à $\underline{\underline{H}}$ et est de la forme $B_{i_t} - (\bigcup_{j\in J_t} B_j)$, où $i_t\in I$ et J_t est

une partie dénombrable de I. L'ensemble Φ n'est pas vide, et est inductif pour la relation d'inclusion. Soit $(F_s)_{s\varepsilon S}$ un élément maximal : nous allons montrer que S n'est pas dénombrable, si bien que M ne sera pas $\underline{\underline{H}}$-mince, contrairement à notre hypothèse. Nous raisonnons par l'absurde : si S est dénombrable, il existe $i\varepsilon I$ tel que $B_i - (\bigcup_{s\varepsilon S} B_{i_s})$ n'appartienne pas à $\underline{\underline{H}}$; comme il est disjoint de tous les F_s, il peut être adjoint à la famille (F_s), laquelle est maximale.... C'est fini.

REMARQUES.- 1) Si, de plus, M appartient à $\underline{\underline{F}}$, on a l'existence d'un "ess inf" par passage au complémentaire relativement à M.

2) Il est clair que l'énoncé fournit en fait une propriété caractéristique des parties $\underline{\underline{H}}$-minces.

3) Si $\underline{\underline{H}}$ est la classe des ensembles négligeables pour une probabilité sur $\underline{\underline{F}}$, on retombe sur les notions classiques de "ess sup" et "ess inf", et on constate que, finalement, elles ont peu de choses à voir avec la théorie de la mesure.

4) Plus généralement, le théorème, écrit dans le langage abstrait des σ-algèbres de Boole (ce qui est évidemment possible), entraine que toute σ-algèbre de Boole, dont toute antichaine est dénombrable, est une algèbre de Boole complète (résultat bien connu, par exemple, des logiciens).

II.- INTERSECTION DE HORDES ET ENSEMBLES MINCES

Dans un article paru au Séminaire de Probabilités n°III de Strasbourg, Dellacherie a montré qu'à tout ensemble mince A était associée une mesure bornée m_A ne chargeant pas les polaires et telle que

$$(B\subset A \text{ et } m_A(B)=0) \Rightarrow B \text{ polaire}$$

La démonstration de Dellacherie est de portée très générale et utilise assez peu de théorie du potentiel, en fait uniquement la propriété : un ensemble B est polaire si et seulement s'il est de mesure nulle pour les mesures ne chargeant pas les ensembles polaires. On propose ici une formulation abstraite du résultat de Dellacherie qui parait bien adaptée au problème.

<u>Notations</u>, <u>définitions</u> : Soit $(X,\underline{\underline{B}})$ un espace mesurable ; une partie $\underline{\underline{H}}$ de $\underline{\underline{B}}$ est dite une <u>horde</u> si elle vérifie les propriétés suivantes

a) $\underline{\underline{H}}$ est stable par réunion dénombrable

b) $\underline{\underline{H}}$ est héréditaire : si $B, A\varepsilon\underline{\underline{B}}$ et $A\varepsilon\underline{\underline{H}}$, alors $(B\subset A) \Rightarrow (B\varepsilon\underline{\underline{H}})$.

L'intersection d'une famille quelconque de hordes est une horde. Un ensemble A est <u>mince par rapport à une horde</u> $\underline{\underline{H}}$ si, pour toute famille $(B_i)_{i\varepsilon I}$ d'ensembles mesurables disjoints contenus dans A, on a $B_i\varepsilon\underline{\underline{H}}$ sauf au plus pour une infinité dénombrable d'indices.

Voici la nouvelle version du théorème de Dellacherie

THEOREME.- *Soit* $(\underline{\underline{H}}_r)_{r\varepsilon I}$ *une famille de hordes sur* $(X,\underline{\underline{B}})$ *stable par intersection dénombrable. On pose* $\underline{\underline{H}} = \bigcap_{r\varepsilon I} \underline{\underline{H}}_r$. *Si* $A\varepsilon\underline{\underline{B}}$ *est mince par rapport à la horde* $\underline{\underline{H}}$, *il existe* $r\varepsilon I$ *tel que, sur* A, *les hordes* $\underline{\underline{H}}$ *et* $\underline{\underline{H}}_r$ *coincident*.

Nous aurons besoin du lemme suivant, où $\underline{\underline{H}}_{|E}$ désigne, pour une horde $\underline{\underline{H}}$, la famille $\underline{\underline{H}}\cap\underline{\underline{P}}(E)$. Tous les ensembles considérés sont mesurables.

LEMME.- *Soient* $\underline{\underline{H}}_1$ *et* $\underline{\underline{H}}_2$ *deux hordes sur* $(X,\underline{\underline{B}})$. *Si* A *est mince pour* $\underline{\underline{H}}_1$, *il existe* $B\subset A$ *tel que* $(A-B)\,\varepsilon\,\underline{\underline{H}}_2$ *et que* $\underline{\underline{H}}_{2|B}\subset\underline{\underline{H}}_{1|B}$. *En particulier, si* $\underline{\underline{H}}_1\subset\underline{\underline{H}}_2$ *et si* $A\not\varepsilon\,\underline{\underline{H}}_2$, *il existe* $B\not\varepsilon\,\underline{\underline{H}}_2$, $B\subset A$, *tel que* $\underline{\underline{H}}_{2|B} = \underline{\underline{H}}_{1|B}$.

Démonstration : Soit $(A_i)_{i\varepsilon J}$ une famille maximale d'éléments disjoints de $\underline{\underline{H}}_{2|A}$ telle que, pour tout $i\varepsilon J$, $A_i\not\varepsilon\,\underline{\underline{H}}_1$. La famille (A_i) est au plus dénombrable. Posons $B = (\bigcup_i A_i)^c$. Pour tout $C\,\varepsilon\,\underline{\underline{H}}_{2|B}$, on doit avoir $C\,\varepsilon\,\underline{\underline{H}}_1$, par maximalité, autrement dit $\underline{\underline{H}}_{2|B}\subset\underline{\underline{H}}_{1|B}$.

Démonstration du théorème :

Considérons une nouvelle famille $\overline{\underline{\underline{H}}}$ sur $(X,\underline{\underline{B}})$:

$$\overline{\underline{\underline{H}}} = \{B\varepsilon\underline{\underline{B}} \;:\; \exists r\varepsilon I \text{ tel que } \underline{\underline{H}}_{|B} = \underline{\underline{H}}_{r|B}\}$$

La famille $(\underline{\underline{H}}_r)$ étant stable par intersection dénombrable, la famille $\overline{\underline{\underline{H}}}$ est encore une horde, et $\underline{\underline{H}}\subset\overline{\underline{\underline{H}}}$. Si A est mince pour $\underline{\underline{H}}$, il existe $B\subset A$ tel que $(A-B)\,\varepsilon\,\overline{\underline{\underline{H}}}$ et que $\overline{\underline{\underline{H}}}_{|B} = \underline{\underline{H}}_{|B}$. Montrons que l'on a nécessairement $B\,\varepsilon\,\underline{\underline{H}}$. Sinon, il existerait $\underline{\underline{H}}_r$ tel que $B\not\varepsilon\,\underline{\underline{H}}_r$ et, comme B est mince pour $\underline{\underline{H}}$, il existerait $C\subset B$ tel que $(B-C)\,\varepsilon\,\underline{\underline{H}}_r$, $C\not\varepsilon\,\underline{\underline{H}}_r$ et $\underline{\underline{H}}_{r|C} = \underline{\underline{H}}_{|C}$. Mais ceci implique $C\,\varepsilon\,\overline{\underline{\underline{H}}}$, par définition, et comme $\overline{\underline{\underline{H}}}_{|B} = \underline{\underline{H}}_{|B}$, ceci entraine que $C\,\varepsilon\,\underline{\underline{H}}\subset\underline{\underline{H}}_r$, ce qui est contradictoire. Par suite, on a $B\,\varepsilon\,\underline{\underline{H}}$ et donc $A = (A-B)\cup B$ est dans $\underline{\underline{H}}$, ce qui démontre le théorème.

Incidemment, nous avons montré que la famille des ensembles minces pour la horde $\underline{\underline{H}}$ est une horde, mais ceci est vrai de façon générale et se démontre de façon élémentaire. Soit $\underline{\underline{H}}$ une horde sur $(X,\underline{\underline{B}})$ et soit $\underline{\underline{P}}\subset\underline{\underline{B}}$ une famille d'ensembles disjoints. Si $\underline{\underline{P}} = (A_i)_{i\varepsilon I}$, on définit une horde $\underline{\underline{H}}_P$ en posant

$$\underline{\underline{H}}_P = \{A\varepsilon\overline{\underline{\underline{B}}} \;:\; A\cap A_i\,\varepsilon\,\underline{\underline{H}} \text{ sauf pour un ensemble dénombrable d'indices}\}$$

La horde $\overline{\underline{\underline{H}}}$ des ensembles minces est alors l'intersection des hordes $\underline{\underline{H}}_P$, $\underline{\underline{P}}$ parcourant l'ensemble des familles d'ensembles disjoints.