ÉRIK LENGLART

Sur la localisation des intégrales stochastiques

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 12 (1978), p. 53-56
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1978__12__53_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1976/77

SUR LA LOCALISATION DES INTEGRALES STOCHASTIQUES

par E. Lenglart

Dans le volume X de ce séminaire, p. 307-309 , P.A. Meyer démontre que l'intégrale stochastique possède diverses propriétés locales, comme si elle pouvait se calculer "trajectoire par trajectoire". Le but de cette note est de donner une nouvelle démonstration, beaucoup plus simple, de ces résultats. Nous utiliserons le théorème de Girsanov généralisé (voir [1]). Cette méthode nous permet de plus d'établir une nouvelle propriété locale, relative à la partie martingale continue d'une semimartingale.

1. Rappelons d'abord en quoi consiste le théorème de Girsanov généralisé. Soit $(\Omega,\underline{\underline{F}},P,(\underline{\underline{F}}_t))$ un espace probabilisé filtré satisfaisant aux conditions habituelles, et soit Q une seconde loi de probabilité, absolument continue par rapport à P, mais non nécessairement équivalente à P comme dans le théorème de Girsanov usuel. La famille $(\underline{\underline{F}}_t)$ ne satisfait pas aux conditions habituelles relativement à Q : nous désignons par $\overline{\underline{\underline{F}}}_t$ la tribu engendrée par $\underline{\underline{F}}_t$ et tous les sous-ensembles d'ensembles Q-négligeables . Lorsque nous disons qu'un processus est une Q-semimartingale, par exemple, il est sous-entendu que c'est par rapport à la famille $(\overline{\underline{\underline{F}}}_t)$. Le théorème de Girsanov généralisé comprend les affirmations suivantes :

a) <u>Tout processus</u> X, <u>qui est une</u> P-<u>semimartingale</u>, <u>est aussi une</u> Q-<u>semimartingale</u>.

b) <u>Si</u> H <u>est un processus prévisible localement borné pour</u> $(P,(\underline{\underline{F}}_t))$, <u>il possède la même propriété pour</u> $(Q,(\overline{\underline{\underline{F}}}_t))$, <u>et l'intégrale stochastique</u> $H\cdot X$ <u>calculée pour</u> P <u>est un représentant de l'intégrale stochastique</u> $H\cdot X$ <u>calculée pour</u> Q.

Il faut se rappeler ici qu'une intégrale stochastique pour $(P,(\underline{\underline{F}}_t))$ est en réalité une classe de processus P-indistinguables. La classe $H\cdot X$ pour Q contient donc des processus qui ne sont pas des intégrales stochastiques $H\cdot X$ pour P, mais en sont seulement Q-indistinguables.

Dans certains cas, on peut écrire explicitement une décomposition de la semimartingale X relativement à Q, à partir d'une décomposition $X=M+A$ de X relativement à P (M martingale locale, A processus à variation finie). Introduisons en effet la densité $N_\infty = \frac{dQ}{dP}$ et la martingale $N_t = E_P[N_\infty \,|\underline{\underline{F}}_t]$. Supposons que le processus $[M,N]$ soit à variation localement intégrable pour P (en fait ce sera toujours le cas dans la suite, car N y sera bornée) ; nous pouvons alors définir son compensateur prévisible $<M,N>$, et nous avons

c) $M_t - \int_{0+}^{t} \frac{d<M,N>_s}{N_{s-}}$ <u>est une</u> Q-<u>martingale locale</u> .

Il faut noter, dans cette expression, que l'intégrale n'a peut être pas de sens pour les ω tels que la fonction $N_{\bullet}(\omega)$ ne soit pas localement bornée inférieurement ; mais ces ω <u>forment toujours un ensemble</u> Q-<u>négligeable</u> (mais non nécessairement P-négligeable) de sorte que le processus c) est bien défini hors d'un ensemble Q-évanescent.

Désignons par X^c la partie martingale continue de la semimartingale X relativement à P , et cherchons à calculer la partie martingale continue de X relativement à Q . Nous notons d'abord la propriété très simple :

d) <u>Si</u> X <u>et</u> Z <u>sont deux</u> P-<u>semimartingales</u>, <u>le crochet</u> [X,Z] <u>calculé pour</u> P <u>est un représentant du crochet</u> [X,Z] <u>calculé pour</u> Q.

Si X est sans partie martingale continue pour P, on a $[X,X]_t = \sum_{s\leq t} \Delta X_s^2$ P-p.s., donc aussi Q-p.s., et X est sans partie martingale continue relativement à Q. Il nous faut donc simplement trouver la partie martingale continue de X^c relativement à Q . Or X^c admet la décomposition

$$X^c = (X_t^c - \int_{0+}^{t} \frac{1}{N_{s-}} d<X^c,N>_s) + \int_{0+}^{t} \frac{1}{N_{s-}} d<X^c,N>_s$$

où la parenthèse est une martingale continue, et le second terme est à variation finie. La parenthèse est donc l'expression cherchée. Nous la transformons en remarquant que

$$<X^c,N> = <X^c,N^c> = [X^c,N^c] = [X,N^c]$$

et on peut encore, pour simplifier, remplacer N_{s-} par N_s . Ainsi :

e) <u>La partie martingale continue de</u> X <u>relativement à</u> Q <u>est</u>

$$X_t^c - \int_{0}^{t} \frac{1}{N_s} d[X,N^c]_s \ , \text{ où } N^c \text{ est la partie martingale continue de } N .$$

<u>2.</u> Nous passons aux résultats de localisation. Nous désignons par A une partie de Ω de mesure $P(A)>0$ (si $P(A)=0$ il n'y a rien à dire) et par Q la loi de probabilité $I_A P/P(A)$, par N_t la martingale $\frac{1}{P(A)}P[A|\underline{\underline{F}}_t]$. Nous disons que deux processus X et Y sont P-<u>indistinguables sur</u> A si les processus $I_A X$ et $I_A Y$ sont P-indistinguables, autrement dit si X et Y sont Q-indistinguables.

PROPOSITION 1. <u>Soient</u> X <u>et</u> Y <u>deux semimartingales</u> P-<u>indistinguables sur</u> A, H <u>et</u> K <u>deux processus prévisibles localement bornés</u> P-<u>indistinguables</u>

sur A. *Alors* $H\cdot X$ *et* $K\cdot Y$ *sont* P-*indistinguables sur* A.

DEMONSTRATION. Notons $\underset{P}{\cdot}$ et $\underset{Q}{\cdot}$ les opérateurs d'intégrale stochastique pour P et Q respectivement. Comme H et K sont Q-indistinguables, X et Y Q-indistinguables, $H\underset{Q}{\cdot}X$ et $K\underset{Q}{\cdot}Y$. D'après b), $H\underset{P}{\cdot}X$ et $K\underset{P}{\cdot}Y$ sont Q-indistinguables, et cela signifie qu'elles sont P-indistinguables sur A.

PROPOSITION 2. *Soient* X *une semimartingale,* H *un processus prévisible localement borné. Supposons que pour* $\omega\in A$ *la trajectoire* $X_{\cdot}(\omega)$ *soit une fonction à variation finie. Soit* Y *le processus* (*non adapté à* $(\underline{\underline{F}}_t)$) *obtenu en remplaçant* X *par* 0 *sur* A^c. *Alors l'intégrale stochastique* $H\cdot X$ *est* P-*indistinguable sur* A *de l'intégrale de Stieltjes* $(\int_0^t H_s dY_s)$.

DEMONSTRATION. A appartient à $\underline{\underline{F}}_0$ puisque $Q(A)=1$, donc Y est une Q-semimartingale à variation finie, et $H\underset{Q}{\cdot}Y$ est Q-indistinguable de l'intégrale de Stieltjes $\int_0^t H_s dY_s$ (sém. X, p.299, th. 18 c)). D'autre part, X et Y sont Q-indistinguables, donc $H\underset{Q}{\cdot}X$ et $H\underset{Q}{\cdot}Y$ le sont aussi. Finalement, $H\underset{P}{\cdot}X$ est un représentant de $H\underset{Q}{\cdot}X$ d'après b). Donc $H\underset{P}{\cdot}X$ et $\int_0^t H_s dY_s$ sont Q-indistinguables.

PROPOSITION 3. *Soient* X *et* Y *deux semimartingales indistinguables sur* A. *Alors leurs crochets* $[X,X]$ *et* $[Y,Y]$, *leurs parties martingales continues* X^c *et* Y^c, *sont indistinguables sur* A.

DEMONSTRATION. L'affirmation relative aux crochets est une conséquence immédiate de d) plus haut, et du fait que X et Y sont deux Q-semimartingales Q-indistinguables. Leux parties martingales continues pour Q étant alors Q-indistinguables, le calcul e) plus haut nous dit que les processus

$$X_t^c - \int_0^t \frac{1}{N_s} d[X,N^c]_s \quad , \quad Y_t^c - \int_0^t \frac{1}{N_s} d[Y,N^c]_s$$

sont Q-indistinguables. Les crochets $[X,N^c]$ et $[Y,N^c]$ étant P-indistinguables sur A, on a le même résultat pour X^c et Y^c.

On remarquera que la démonstration précédente prouve davantage : le crochet $[X-Y,N^c]$ est nul sur A dès que X-Y est à variation finie sur A. Par conséquent :

Si X-Y *est sur* A *un processus à variation finie,* X^c *et* Y^c *sont indistinguables sur* A.

Le résultat de la proposition 3 ressemble à ceux des propositions 1 et 2. Cependant, contrairement aux crochets et aux intégrales stochastiques, les parties martingales continues X^c dépendent de la loi P, et le "caractère local" indiqué ne signifie donc pas qu'il existe un procédé explicite permettant de calculer la trajectoire $X^c_{\cdot}(\omega)$ connaissant $X_{\cdot}(\omega)$.

REMARQUE. La propriété d'être une semimartingale est elle même localisable. En effet, disons qu'un processus càdlàg. X est une <u>semimartingale sur</u> $A\subset\Omega$ si X est une semimartingale pour la loi $Q=I_A P/P(A)$. Un théorème de J. Jacod, étendu par P.A.Meyer au cas dénombrable (Séminaire de Probabilités XI, bas de la page 484) nous permet d'affirmer que

<u>Si</u> X <u>est une semimartingale sur tout ensemble d'une suite</u> (A_n), X <u>est aussi une semimartingale sur</u> $\cup_n A_n$.

Il existe alors un plus grand ensemble (aux ensembles P-négligeables près) sur lequel X est une semimartingale : la réunion essentielle de tous les ensembles sur lesquels X est une semimartingale.

<u>3.</u> Enfin, une autre application du théorème de Girsanov concerne la théorie des équations différentielles stochastiques, développée récemment par C. Doléans-Dade. Comme il s'agit d'un sujet un peu différent, nous lui consacrerons une note indépendante de celle-ci.

[1]. E. Lenglart. Transformation des martingales locales par changement absolument continu de probabilités. Z. für W-theorie, 39, 1977, p.65-70.

E. Lenglart
Département de Mathématiques
Université de Rouen
F-76130 Mont Saint Aignan