GÉRARD HILLARD

Exemples de normes en théorie descriptive des ensembles

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 12 (1978), p. 524-563
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1978__12__524_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités

EXEMPLES DE NORMES EN THEORIE DESCRIPTIVE DES ENSEMBLES

par
Gérard HILLARD

Dans cet exposé on donne, aux chapitres I et III, deux exemples d'applications i définies sur un espace métrisable compact E et à valeurs dans le segment d'ordinaux $[0,\aleph_1]$, $\aleph_1$ désignant le premier ordinal non dénombrable, qui sont des <u>normes coanalytiques</u> i.e. les ensembles :

$$\{(x,x')\in E\times E \mid i(x)<\aleph_1 \quad \text{et} \quad i(x)\leq i(x')\}$$

et

$$\{(x,x')\in E\times E \mid i(x)<\aleph_1 \quad \text{et} \quad i(x)<i(x')\}$$

sont coanalytiques et, au chapitre II, deux exemples d'applications i définies sur un espace polonais E' et à valeurs dans $[0,\aleph_1]$ vérifiant le théorème de la borne suivant :

si A <u>est un ensemble analytique inclus dans l'ensemble</u> $\{x\in E' \mid i(x)<\aleph_1\}$ <u>alors</u> $\sup_{x\in A} i(x)<\aleph_1$.

et qui sont utilisées pour démontrer deux théorèmes connus.

La norme du chapitre I est associée à la dérivation classique de Cantor : K étant un compact d'un espace métrisable compact E, $i(K)$ est égal à $\aleph_1$ si K est non dénombrable, $i(K)$ est le plus petit ordinal dénombrable i tel que le dérivé d'ordre i de K soit vide.

On montre que i est une norme coanalytique sur l'espace $\mathcal{K}(E)$ des compacts de E muni de la topologie de Hausdorff et on en déduit que i vérifie le théorème de la borne cité plus haut.

La norme du chapitre III est associée aux oscillations des fonctions continues à droite de $[0,1]$ dans un espace métrique compact E qui constituent un espace fonctionnel important en théorie des processus stochastiques. On plonge cet espace sur une partie coanalytique de l'espace métrisable compact $E^{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$

et on montre que cette partie n'est pas borélienne et que la norme i associée est coanalytique. On en déduit que i vérifie le théorème de la borne.

L'exemple type pour lequel on a une norme coanalytique est celui des temps d'arrêt sur $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ détaillé dans [3] par C. Dellacherie et P.A. Meyer.

Dans le chapitre II, on utilise l'extension, brièvement rappelée à la fin du chapitre I, due à C. Dellacherie [2], de la validité du théorème de la borne à la norme associée à une <u>dérivation analytique générale</u>, norme qui n'est pas nécessairement coanalytique.

Simple dans sa démonstration (s'appuyant sur un théorème de logiciens ; cf. [2]), cette extension donne au moins deux belles applications qui constituent le chapitre II : on peut simplifier les démonstrations des théorèmes de Lusin sur les analytiques à coupes dénombrables et Saint-Raymond sur les boréliens (lusiniens) à coupes réunions dénombrables de compacts, suivant une même méthode.

CHAPITRE I

Dérivation de Cantor et norme coanalytique associée

I. DEFINITION ET PROPRIETES.

Soit X l'espace topologique métrisable compact $[0,1]^{\mathbb{N}}$, muni d'une distance d compatible avec sa topologie, $\mathcal{K}(X)$ l'espace topologique des compacts de X avec la topologie de Hausdorff (ou exponentielle), muni de l'ordre de l'inclusion.

On appelle dérivation de Cantor l'application δ de $\mathcal{K}(X)$ dans $\mathcal{K}(X)$ définie par :

$\delta(F)$ est l'ensemble des points non isolés de F, pour tout élément F de $\mathcal{K}(X)$. $\delta(F)$ est effectivement un élément de $\mathcal{K}(X)$ car c'est un fermé de F.

THEOREME 1. L'application δ est croissante et borélienne.

Démonstration : Le premier point est simple.

Pour montrer que δ est borélienne, il suffit de montrer que l'ensemble :

$$\mathcal{Q} = \{F \in \mathcal{K}(X) \mid \delta(F) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset\},$$

où $\mathcal{U}$ est un ouvert de X, est borélien.

La condition $\delta(F) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$ est équivalente à : $F \cap \mathcal{U}$ est infini, ou : $\overline{F \cap \mathcal{U}}$ est infini. L'ensemble des compacts infinis étant borélien dans $\mathcal{K}(X)$, il suffit de montrer que l'application $F \in \mathcal{K}(X) \to \overline{F \cap \mathcal{U}} \in \mathcal{K}(X)$ est borélienne, donc que l'ensemble $\{F \in \mathcal{K}(X) \mid \overline{F \cap \mathcal{U}} \cap \mathcal{U}' \neq \emptyset\}$, où $\mathcal{U}'$ est un ouvert de X, est borélien.

Or la condition $\overline{F \cap \mathcal{U}} \cap \mathcal{U}' \neq \emptyset$ est équivalente à $F \cap \mathcal{U} \cap \mathcal{U}' \neq \emptyset$ qui est borélienne en F ; le théorème est donc démontré. ∎

Un élément F de $\mathcal{K}(X)$ est dit parfait si $\delta(F) = F$.

THEOREME 2. Un élément F de $\mathcal{K}(X)$ contient un parfait non vide si et seulement si F n'est pas dénombrable.

Démonstration : Il résulte du théorème de Baire que tout parfait non vide est non dénombrable. La condition nécessaire du théorème est donc démontrée.

Supposons maintenant que tout parfait de F soit vide. L'ensemble N des points x de F tel que tout voisinage $\mathcal{V}$ de x coupe F suivant un ensemble non dénombrable (l'ensemble des points de condensation de F) étant un parfait, on a $N = \emptyset$. Tout point x de F admet donc un voisinage $\mathcal{V}'$ ouvert dans F tel que $\mathcal{V}'$ est dénombrable, et F est inclus dans une réunion finie de tels ouverts $\mathcal{V}'$ car compact. F est donc dénombrable et la condition suffisante du théorème est démontrée. ∎

Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble $\{F \in \mathcal{K}(X) \mid F$ n'est pas dénombrable$\}$.

THEOREME 3 (Hurewicz). $\mathcal{C}$ est analytique et n'est pas borélien.

Démonstration (Kuratowski et Szpilrajn) : Montrons d'abord que $\mathcal{C}$ est analytique.

D'après le théorème 2, on a :

$$F \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \exists\, F' \,,\ F' \neq \emptyset \ \text{ et } \ F' \subset F \ \text{ et } \ \delta(F') = F' .$$

Donc $\mathcal{C}$ est la projection en F de l'ensemble :

$$\{(F,F') \in \mathcal{K}(X) \times \mathcal{K}(X) \mid F' \neq \emptyset \ \text{ et } \ F' \subset F \ \text{ et } \ \delta(F') = F'\}$$

qui est borélien d'après le théorème 1. Donc $\mathcal{C}$ est analytique.

Montrons maintenant que $\mathcal{C}$ n'est pas borélien.

Soit A un ensemble analytique, non borélien de $[0,1]$. Soit f une application continue de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ sur A . On peut supposer que l'image réciproque de tout point de A par f est non dénombrable car il existe une application continue de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ telle que l'image réciproque de tout point de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ par cette application soit non dénombrable (par exemple, à la suite ω , on associe la suite ω' des termes de rang pair de ω).

Plongeons $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ dans $[0,1]$ en identifiant $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ à l'ensemble I_r des irrationnels de $[0,1]$. Le graphe H de f est alors un fermé de $I_r \times [0,1]$ et un sous-ensemble de $[0,1] \times [0,1]$.

Soit $\overline{H}$ l'adhérence de H dans $[0,1]\times[0,1]$ et $\overline{H}(x) = \overline{H}\cap[0,1]\times\{x\}$ pour tout x dans $[0,1]$.

On a $x\notin A \Leftrightarrow \overline{H}(x)$ est dénombrable ; en effet, on peut facilement voir que dans ce cas la première projection de $\overline{H}(x)$ sur $[0,1]$ est incluse dans les rationnels.

Raisonnons maintenant par l'absurde.

Supposons que $\mathcal{C}$ est borélien ; alors l'ensemble $\mathcal{C}'$ des compacts non dénombrables de $\overline{H}$ qui se projettent suivant la seconde projection en un point est aussi borélien. Or A est l'image réciproque de $\mathcal{C}'$ par l'application $x\in[0,1]\to\overline{H}(x)\in\mathcal{K}([0,1]\times[0,1])$, où $\mathcal{K}([0,1]\times[0,1])$ désigne l'espace des compacts de $[0,1]\times[0,1]$ muni de la topologie de Hausdorff, et cette application est borélienne d'après [1]. Donc A est borélien et on obtient une contradiction. ∎

II. DEFINITION D'UN INDICE SUR $\mathcal{K}(X)$.

Soit I le segment d'ordinaux $[0,\aleph_1]$ où $\aleph_1$ désigne le premier ordinal non dénombrable.

Définissons maintenant pour tout F dans $\mathcal{K}(X)$ et tout α dans I le "dérivé d'ordre α de F", élément de $\mathcal{K}(X)$, noté F^α, par induction transfinie de la façon suivante :

$$F^0 = F \;;\; F^{\alpha+1} = \delta(F^\alpha) \quad \text{et} \quad F^\gamma = \bigcap_{\alpha<\gamma} F^\alpha$$

si γ est un ordinal de seconde espèce.

Soit i la fonction de $\mathcal{K}(X)$ dans I définie de la façon suivante (i est une "fonction indice") :

$$\begin{cases} \text{si } F^{\aleph_1} \neq \emptyset \text{ alors } i(F) = \aleph_1 \\ \text{si } F^{\aleph_1} = \emptyset \text{ alors il existe un ordinal dénombrable } \alpha \text{ tel que} \\ \quad F^\alpha = \emptyset \text{ et alors :} \\ \qquad\qquad i(F) = \inf\{\alpha\in I \mid F^\alpha = \emptyset\} < \aleph_1 . \end{cases}$$

Soit j la fonction de $\mathcal{K}(X)\times X$ dans I définie de la façon suivante :

$$\begin{cases} \text{si } x\in F^{\aleph_1} \text{ alors } j(F,x)=\aleph_1 \\ \text{si } x\notin F^{\aleph_1} \text{ il existe un ordinal dénombrable } \alpha \text{ tel que} \\ \quad x\notin F^{\alpha} \text{ et alors :} \\ \qquad\qquad j(F,x)=\inf\{\alpha\in I \mid x\notin F^{\alpha}\}<\aleph_1 . \end{cases}$$

Si $0<i(F)<\aleph_1$, $i(F)$ n'est pas de seconde espèce car F^{α} est compact pour tout α ; donc $i(F)-1$ existe et $F^{i(F)-1}$ est fini car $\delta(F^{i(F)-1})=F^{i(F)}=\emptyset$. Soit $n(F)$ le nombre de points de $F^{i(F)-1}$ si $0<i(F)<\aleph_1$.

La topologie sur X étant à base dénombrable, toute suite transfinie décroissante de fermés de X est stationnaire à partir d'un ordinal dénombrable, par conséquent $F^{\aleph_1}$ est parfait. On a donc :

$$F^{\aleph_1}\neq\emptyset \Leftrightarrow F \text{ contient un parfait non vide.}$$

D'autre part, $i(F)=\aleph_1 \Leftrightarrow F^{\aleph_1}\neq\emptyset$; d'après le théorème 2, on a donc :

$$\underline{i(F)=\aleph_1 \Leftrightarrow F \text{ n'est pas dénombrable.}}$$

Si $i(F)<\aleph_1$, alors F est métrisable dénombrable et donc tout point de F admet un voisinage ouvert et fermé dans F .

Avant de démontrer le théorème principal de ce chapitre, montrons le lemme suivant :

LEMME 1. <u>Si</u> $i(F)<\aleph_1$, <u>alors pour tout</u> x <u>dans</u> F <u>et tout ouvert compact</u> $\mathcal{V}$ <u>de</u> F <u>contenant</u> x :

$$j(F,x)=j(\mathcal{V},x) .$$

<u>Si</u> $x\in F^{i(F)-1}$, <u>alors</u> $i(\mathcal{V})=j(F,x)=i(F)$.

<u>Démonstration</u> : δ étant croissante, on a $j(\mathcal{V},x)\leq j(F,x)$. Montrons donc $j(\mathcal{V},x)\geq j(F,x)$ i.e. pour tout ordinal α , $x\in F^{\alpha}\Rightarrow x\in\mathcal{V}^{\alpha}$, par induction transfinie sur α .

Si $\alpha = 0$, l'implication ci-dessus est vraie.

Supposons l'implication vraie pour tout $\alpha < \beta$, β étant un ordinal non nul et montrons la pour $\alpha = \beta$.

Si β est de première espèce et $x \in F^{\beta}$, il existe une suite injective $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de $F^{\beta-1}$ convergente vers x .

Pour n assez grand, $x_n \in \mathcal{V}$ et d'après l'hypothèse d'induction, $x_n \in \mathcal{V}^{\beta-1}$, donc $x \in \mathcal{V}^{\beta}$.

Si β est de seconde espèce l'implication est claire.

Si $x \in F^{i(F)-1}$ alors $j(F,x) \geq i(F)$. Comme $j(F,x) \leq i(F)$, on a $j(F,x) = i(F)$.

Or $j(F,x) = j(\mathcal{V},x)$ d'après ce qui précède, donc $j(\mathcal{V},x) = i(F)$. Comme $i(\mathcal{V}) \geq j(\mathcal{V},x)$, on a $i(\mathcal{V}) \geq i(F)$ donc $i(\mathcal{V}) = i(F)$ car δ est croissante. Le lemme est donc démontré. ∎

Soit $\mathcal{C}(X,X)$ l'espace topologique des applications continues de X dans X muni de la topologie de la convergence uniforme.

Le théorème suivant est une extension d'un théorème de Mazurkiewicz et Sierpinski (cf. [4]) sur la topologie des ensembles dénombrables.

THEOREME 4. $i(F) \leq i(G)$ et $[i(F) = i(G) < \aleph_1 \Rightarrow n(F) \leq n(G)]$ <u>si et seulement si</u> $\exists f$, $F \xrightarrow{\subset f} G$ <u>ou</u> $i(G) = \aleph_1$, <u>où</u> $F \xrightarrow{\subset f} G$ <u>signifie</u> $f \in \mathcal{C}(X,X)$ <u>et</u> f <u>est bijective de</u> F <u>sur une partie de</u> G .

<u>Démonstration</u> : Démontrons d'abord la condition suffisante. Si $i(G) = \aleph_1$, alors $i(F) \leq i(G)$.

Si f est un élément de $\mathcal{C}(X,X)$ et est bijective de F sur une partie de G , $f/_F$ est un homéomorphisme de F sur $f(F)$ car F est compact.

Donc les dérivées de même ordre de F et $f(F)$ sont homéomorphes et $i(F) = i(f(F)) \leq i(G)$.

Si $i(F) = i(G) < \aleph_1$, alors $i(f(F)) = i(G) < \aleph_1$ donc $G^{i(G)-1} = G^{i(f(F))-1} \supset f(F)^{i(f(F))-1}$ et le nombre de points de $G^{i(G)-1}$ majore celui de $f(F)^{i(f(F))-1}$ qui est celui de $F^{i(F)-1}$; donc $n(F) \leq n(G)$.

La condition suffisante est donc démontrée.

Démontrons maintenant la condition nécessaire par induction transfinie sur $(i(F),i(G))$.

Explicitons l'hypothèse d'induction transfinie :

si $(i(F'),i(G'))$ est strictement inférieur à $(i(F),i(G))$ suivant l'ordre lexicographique sur $I \times I$, alors $[i(F') \leq i(G')$ et $[i(F') = i(G') < \aleph_1 \Rightarrow n(F') \leq n(G')]] \Rightarrow \exists\, f$, $F' \xrightarrow{f} G'$ ou $i(G') = \aleph_1$.

Le cas $i(F) = i(G) = 1$ est simple car F et G sont finis dans ce cas.

Avant d'utiliser l'hypothèse d'induction, on simplifie la condition :

(1) $$i(F) \leq i(G) \text{ et } [i(F) = i(G) < \aleph_1 \Rightarrow n(F) \leq n(G)]$$

en se ramenant à des cas plus simples que le cas général.

On peut supposer $i(G) < \aleph_1$ (i.e. F et G sont dénombrables).

Montrons qu'on peut supposer aussi :

$$n(F) = n(G) = 1 \text{ et } i(F) = i(G) .$$

Tout point de F a un système fondamental de voisinages ouverts et fermés dans F car F est métrisable dénombrable ; il existe donc une partition de F en $n(F)$ ouverts compacts de F contenant chacun un point de $F^{i(F)-1}$ et un seul.

Soit $\{\mathcal{U}_p\}_{1 \leq p \leq n(F)}$ la suite finie de ces fermés.

Pour p fixé, si x_p est l'unique point de $\mathcal{U}_p \cap F^{i(F)-1}$ on a, d'après le lemme 1 :

$$j(\mathcal{U}_p, x_p) = j(F, x_p) = i(F) = i(\mathcal{U}_p) .$$

Comme $j(\mathcal{U}_p, x_p) = i(\mathcal{U}_p)$, on a $x_p \in \mathcal{U}_p^{i(\mathcal{U}_p)-1}$ et donc $\{x_p\} = \mathcal{U}_p^{i(\mathcal{U}_p)-1}$ car $i(\mathcal{U}_p) = i(F)$.

D'où $i(\mathcal{U}_p) = i(F)$ et $n(\mathcal{U}_p) = 1$.

D'autre part, d'après (1) : $i(F) \leq i(G)$, donc $G^{i(F)-1} \neq \emptyset$.

Donc $G^{i(F)-1} - G^{i(F)}$ a $n(G)$ points si $i(F) = i(G)$ et dans ce cas $n(F) \leq n(G)$ d'après (1), et une infinité de points si $i(F) < i(G)$.

Donc $G^{i(F)-1} - G^{i(F)}$ a toujours au moins $n(F)$ points.

Soit $\{y_p\}_{1 \le p \le n(F)}$ une suite de points distincts de $G^{i(F)-1} - G^{i(F)}$.

Pour p fixé, il existe un ouvert compact $\mathcal{V}_p$ de G tel que :

$$y_p \in \mathcal{V}_p \quad \text{et} \quad \mathcal{V}_p \cap G^{i(F)} = \emptyset ,$$

car $y_p \notin G^{i(F)}$ et G est normal et métrisable dénombrable.

$\mathcal{V}_p$ ne contient que des points isolés de $G^{i(F)-1}$ car $\mathcal{V}_p \cap G^{i(F)} = \emptyset$; on peut donc supposer que y_p est le seul point commun à $\mathcal{V}_p$ et $G^{i(F)-1}$ et que les $\mathcal{V}_p$ sont disjoints.

Montrons alors $i(\mathcal{V}_p) = i(F)$ et $n(\mathcal{V}_p) = 1$. On a :

$$j(\mathcal{V}_p, y_p) = j(G, y_p)$$

d'après le lemme 1 et :

$$j(G, y_p) = i(F) \quad \text{car} \quad y_p \in G^{i(F)-1} - G^{i(F)} .$$

Donc $j(\mathcal{V}_p, y_p) = i(F)$ et comme $i(\mathcal{V}_p) \ge j(\mathcal{V}_p, y_p)$ on a $i(\mathcal{V}_p) \ge i(F)$. Mais $\mathcal{V}_p \cap G^{i(F)} = \emptyset$, donc $i(\mathcal{V}_p) \le i(F)$. On a donc $i(\mathcal{V}_p) = i(F)$.

Puisque $i(\mathcal{V}_p) = j(\mathcal{V}_p, y_p)$, on a $y_p \in \mathcal{V}_p^{i(\mathcal{V}_p)-1}$ et donc $\{y_p\} = \mathcal{V}_p^{i(\mathcal{V}_p)-1}$ car $i(\mathcal{V}_p) = i(F)$.

On a donc $n(\mathcal{V}_p) = 1$.

On obtient finalement :

$$i(\mathcal{U}_p) = i(F) = i(\mathcal{V}_p) \quad \text{et} \quad n(\mathcal{U}_p) = 1 = n(\mathcal{V}_p) .$$

Donc si on suppose démontrée la condition nécessaire $(1) \Rightarrow \exists\, f ,\ F \xhookrightarrow{f} G$ dans le cas $i(F) = i(G) < \aleph_1$ et $n(F) = n(G) = 1$, on a :

$$\exists\, f_p : \mathcal{U}_p \xhookrightarrow{f_p} \mathcal{V}_p .$$

Soit f la fonction définie sur F par $f/\mathcal{U}_p = f_p/\mathcal{U}_p$. Les $\mathcal{U}_p$ formant une partition d'ouverts de F, f est continue sur F et bijective de F sur une partie de G.

Soit $\bar{f}$ un élément de $\mathcal{C}(X,X)$ qui prolonge f sur X (Théorème de Tietze) ; alors :

$$F \overset{\bar{f}}{\hookrightarrow} G .$$

On peut donc supposer $\underline{i(F) = i(G) < \aleph_1}$ et $\underline{n(F) = n(G) = 1}$.

Soit $F^{i(F)-1} = \{x\}$ et $G^{i(G)-1} = \{y\}$.

On va écrire (comme dans [4]) $F - \{x\}$ comme réunion d'une suite $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ d'ouverts compacts disjoints de F et $G - \{y\}$ comme réunion d'une suite $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ d'ouverts compacts disjoints de G telles que, pour tout n :

$$i(F_n) < i(F) \text{ , } i(G_n) < i(G) \text{ et } i(F_n) \leq i(G_n)$$

et $d_o(F_n)_{n \to \infty} \to 0$, $d_o(G_n)_{n \to \infty} \to 0$, où d_o est l'application diamètre sur $\mathcal{K}(X)$, et appliquer l'hypothèse d'induction transfinie.

Distinguons deux cas :

<u>Premier cas</u> :

<u>$i(F) - 1$ est de seconde espèce.</u>

Soit $\{\mathcal{U}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de voisinages ouverts et compacts de x dans F telle que $d_o(\mathcal{U}_n) < \frac{1}{n}$ si $n \neq 0$ et $\mathcal{U}_o = F$.

Pour tout n, il existe un ordinal α_n tel que $\alpha_n < i(F) - 1$ et $\mathcal{U}_n \supset F^{\alpha_n}$ car $\mathcal{U}_n$ contient $\{x\} = \bigcap_{\alpha < i(F)-1} F^{\alpha}$ et F est compact.

Puisque $i(F) - 1$ est de seconde espèce, on peut supposer la suite $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ strictement croissante et $\alpha_o = 0$.

Pour n fixé, soit x_n tel que :

$$j(F, x_n) = \alpha_n + 1 \quad \text{i.e. } x_n \in F^{\alpha_n} - F^{\alpha_n + 1} .$$

Comme $x_n \notin F^{\alpha_n+1}$, il existe un ouvert compact $\mathcal{U}'_n$ de F tel que :

$$F^{\alpha_n+1} \subset \mathcal{U}'_n \text{ et } x_n \notin \mathcal{U}'_n .$$

On peut supposer $\mathcal{U}'_n \subset \mathcal{U}_n$ puisque $F^{\alpha_n+1} \subset \mathcal{U}_n$ et les $\mathcal{U}'_n$ décroissants car les F^{α_n+1} sont décroissants.

Posons $\mathcal{V}_o = \mathcal{U}'^{c}_o \cap F$ et $\mathcal{V}_{n+1} = \mathcal{U}'_n - \mathcal{U}'_{n+1}$.

Montrons que $i(\mathcal{V}_n) = \alpha_n+1$.

Pour cela, montrons d'abord $x_n \in \mathcal{V}_n$. On a $x_{n+1} \in F^{\alpha_n+1} \subset \mathcal{U}'_n$ donc $x_{n+1} \in \mathcal{U}'_n$ et $x_{n+1} \notin \mathcal{U}'_{n+1}$, donc $x_{n+1} \in \mathcal{V}_{n+1}$ et enfin $x_o \notin \mathcal{U}'_o$ donc $x_o \in \mathcal{V}_o$. On a donc $x_n \in \mathcal{V}_n$.

Montrons maintenant $i(\mathcal{V}_n) = \alpha_n + 1$.

Comme $x_n \in \mathcal{V}_n$, on a :

$$j(\mathcal{V}_n, x_n) = j(F, x_n) = \alpha_n+1 ,$$

d'après le lemme 1 ($\mathcal{V}_n$ est ouvert fermé de F).

Donc $i(\mathcal{V}_n) \geq j(\mathcal{V}_n, x_n) = \alpha_n+1$. D'autre part $\mathcal{V}_n \cap \mathcal{U}'_n = \emptyset$; comme $F^{\alpha_n+1} \subset \mathcal{U}'_n$, on a $\mathcal{V}_n \cap F^{\alpha_n+1} = \emptyset$.

Donc $\mathcal{V}_n^{\alpha_n+1} \subset \mathcal{V}_n \cap F^{\alpha_n+1} = \emptyset$, et $i(\mathcal{V}_n) \leq \alpha_n+1$.

On obtient donc l'égalité $i(\mathcal{V}_n) = \alpha_n+1$. On a alors :

$$\begin{cases} F - \{x\} = \bigcup_n \mathcal{V}_n \quad (\text{car } \{x\} = \bigcap_n \mathcal{U}'_n) \\ \mathcal{V}_n \cap \mathcal{V}_m = \emptyset \text{ si } n \neq m \text{ et :} \\ i(\mathcal{V}_n) = \alpha_n+1 < i(F)-1 . \end{cases}$$

De même, on trouve une suite $\{\mathcal{V}'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ d'ouverts compacts de G telle que :

$$\begin{cases} G - \{y\} = \bigcup_n \mathcal{V}'_n \\ \mathcal{V}'_n \cap \mathcal{V}'_m = \emptyset \text{ si } n \neq m \text{ et :} \\ \alpha_n+2 \leq i(\mathcal{V}'_n) < i(G)-1 . \end{cases}$$

Utilisant maintenant l'hypothèse d'induction transfinie, on en déduit :

$$\exists\, f_n ,\ \mathcal{V}_n \xhookrightarrow{f_n} \mathcal{V}'_n .$$

Soit f la fonction définie sur F par :

$$f/\mathcal{V}_n = f_n/\mathcal{V}_n \quad \text{et} \quad f(x) = y .$$

Alors f est bijective de F sur $f(F) \subset G$ et continue sur chaque $\mathcal{V}_n$ donc continue sur $F - \{x\}$ car $\mathcal{V}_n$ est ouvert dans F.

Voyons si f est continue en x.

Considérons une suite injective $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de F convergente vers x. Si une sous-suite de la suite $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergeait vers un point autre que y, ce point serait dans un $\mathcal{V}'_n$ et donc tous les points de la sous-suite à partir d'un rang m aussi ; il en serait donc de même de la suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ et de l'ouvert $\mathcal{V}_n$ et ceci est impossible.

Donc la suite $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $y = f(x)$ et f est continue en x.

Soit $\bar{f}$ un élément de $C(X,X)$ prolongeant f sur X ; on a

$$F \xhookrightarrow{\bar{f}} G$$

Donc $\exists f$, $F \xhookrightarrow{f} G$.

<u>Deuxième cas</u> :

<u>$i(F) - 1$ est de première espèce.</u>

On peut supposer aussi $i(F) \neq 1$ car sinon on est dans le cas simple où F n'a qu'un nombre fini de points.

Alors $F^{i(F)-2}$ est constitué des points d'une suite injective $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergente vers x.

Soit $\{\mathcal{U}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de voisinages ouverts et compacts de x dans F telle que $d_o(\mathcal{U}_n) < \frac{1}{n}$ si $n \neq 0$.

Pour n fixé, les ouverts de F : $\mathcal{U}_n - \mathcal{U}_{n+1}$ et $\mathcal{U}_o^c \cap F$ ne contiennent pas plus d'un nombre fini de points de la suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Il existe donc une suite décroissante $\{\mathcal{U}'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ d'ouverts compacts dans F contenant x telle que $\mathcal{U}'^c_o \cap F$ et $\mathcal{U}'_n - \mathcal{U}'_{n+1}$ contiennent un point de la suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ et un seul, et

$d_o(\mathcal{U}'_n) < \varepsilon_n$, où $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de réels tendant vers 0.

Soit $\mathcal{V}_{n+1} = \mathcal{U}'_n - \mathcal{U}'_{n+1}$ et $\mathcal{V}_o = \mathcal{U}'^c_o \cap F$.

Montrons que $i(\mathcal{V}_n) = i(F)-1$.

Soit x'_n l'unique point de $\mathcal{V}_n \cap F^{i(F)-2}$. On a :

$$j(F,x'_n) = i(F)-1 \quad \text{car} \quad x'_n \in F^{i(F)-2} - F^{i(F)-1}$$

et $i(\mathcal{V}_n) \geq j(\mathcal{V}_n, x'_n) = j(F,x'_n)$ (lemme 1).

Donc $i(\mathcal{V}_n) \geq i(F)-1$ et d'autre part $i(\mathcal{V}_n) < i(F)$ car si on avait $i(\mathcal{V}_n) = i(F)$, $\mathcal{V}_n$ contiendrait une infinité de points de $F^{i(F)-2}$ et donc x, ce qui est exclus.

On a alors $i(\mathcal{V}_n) = i(F)-1$, et :

$$\begin{cases} F - \{x\} = \bigcup\limits_n \mathcal{V}_n \\ \mathcal{V}_n \cap \mathcal{V}_m = \emptyset \quad \text{si} \quad n \neq m \\ i(\mathcal{V}_n) = i(F)-1 . \end{cases}$$

On obtient en outre $n(\mathcal{V}_n) = 1$ comme dans le premier cas en montrant $\{x'_n\} = \mathcal{V}_n^{i(\mathcal{V}_n)-1}$. On obtient de même l'existence d'une suite $\{\mathcal{V}'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'ouverts compacts de G telle que :

$$\begin{cases} G - \{y\} = \bigcup\limits_n \mathcal{V}'_n \\ \mathcal{V}'_n \cap \mathcal{V}'_m = \emptyset \quad \text{si} \quad n \neq m \\ i(\mathcal{V}'_n) = i(G)-1 \\ n(\mathcal{V}'_n) = 1 . \end{cases}$$

Utilisant l'hypothèse d'induction transfinie, on obtient :

$$\exists\, f_n\,, \ \mathcal{V}_n \xhookrightarrow{f_n} \mathcal{V}'_n$$

et on peut alors visiblement conclure comme dans le premier cas :

$$\exists\, f : F \xrightarrow{\subset f} G .$$

Le théorème est donc démontré. ■

III. ANALYCITE DE L'INDICE i .

Montrons maintenant le lemme suivant :

LEMME 2. L'ensemble $\mathcal{G} = \{(F,G) \in \mathcal{K}(X) \times \mathcal{K}(X) \mid \exists f ,\ F \xrightarrow{\subset f} G\}$ est souslinien pour la topologie produit sur $\mathcal{K}(X) \times \mathcal{K}(X)$.

Démonstration : Si $f/_F$ est un homéomorphisme de F sur $f(F)$ alors $(f/_F)^{-1}$ existe et est prolongeable en une application g , élément de $\mathcal{C}(X,X)$. Donc si I est l'application identité de X :

$$\exists\, f ,\ F \xrightarrow{\subset f} G \Leftrightarrow \exists\, f ,\ \exists\, g ,\ f(F) \subset G \ \text{ et } \ g \circ f/_F = I/_F .$$

Pour h dans $\mathcal{C}(X,X)$, soit $I_h = \{x \in X \mid h(x) = x\}$.

Alors $\exists\, f ,\ F \xrightarrow{\subset f} G \Leftrightarrow \exists\, f ,\ \exists\, g ,\ f(F) \subset G$ et $F \subset I_{g \circ f}$. $\mathcal{G}$ est la projection en f et g de :

$$\mathcal{B} = \{(F,G,f,g) \in \mathcal{K}(X) \times \mathcal{K}(X) \times \mathcal{C}(X,X) \times \mathcal{C}(X,X) \mid f(F) \subset G \ \text{ et } \ F \subset I_{g \circ f}\} .$$

X étant complet, $\mathcal{C}(X,X)$ est complet. X étant compact, $\mathcal{C}(X,X)$ est séparable, donc polonais.

Il suffit donc de montrer que $\mathcal{B}$ est souslinien.

Montrons que $\mathcal{B}$ est borélien. L'ensemble $\{(F,F') \in \mathcal{K}(X) \times \mathcal{K}(X) \mid F \subset F'\}$ étant compact, il suffit de montrer que les applications :

$$(f,F) \in \mathcal{C}(X,X) \times \mathcal{K}(X) \to f(F) \in \mathcal{K}(X)$$

et $(f,g) \in \mathcal{C}(X,X) \times \mathcal{C}(X,X) \to I_{g \circ f} \in \mathcal{K}(X)$ sont boréliennes.

Les applications :

$$f \in \mathcal{C}(X,X) \to f(F) \in \mathcal{K}(X) \qquad (\ F \ \text{ fixé})$$

et

$$F \in \mathcal{K}(X) \to f(F) \in \mathcal{K}(X) \qquad (\ f \ \text{ fixé})$$

sont continues.

Donc l'application :

$$(f,F) \in \mathcal{C}(X,X) \times \mathcal{K}(X) \to f(F) \in \mathcal{K}(X)$$

est borélienne. De même, l'application

$$(f,g) \in \mathcal{C}(X,X) \times \mathcal{C}(X,X) \to g \circ f \in \mathcal{C}(X,X)$$

est borélienne car ses applications partielles sont continues.

Montrons que l'application :

$$h \in \mathcal{C}(X,X) \to I_h \in \mathcal{K}(X)$$

est borélienne.

L'application :

$$h \in \mathcal{C}(X,X) \to \bar{h} \in \mathcal{C}(X,X^2)$$

où $\bar{h} = (h,I)$ et $\mathcal{C}(X,X^2)$ est l'espace topologique des applications continues de X dans X^2, est continue, et $I_h = \bar{h}^{-1}(\Delta)$ où Δ est la diagonale de $X \times X$.

Pour montrer le lemme, il suffit donc de montrer que l'ensemble :

$$\mathcal{B} = \{\ell \in \mathcal{C}(X,X^2) \mid \ell^{-1}(\Delta) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset\} ,$$

où $\mathcal{U}$ est un ouvert de X, est borélien.

$\mathcal{U}$ est réunion dénombrable de compacts :

$$\mathcal{U} = \bigcup_n K_n ,$$

où K_n est compact pour tout n. Comme :

$$\ell^{-1}(\Delta) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists\, n ,\ \ell^{-1}(\Delta) \cap K_n \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists\, n ,\ \Delta \cap \ell(K_n) \neq \emptyset$$

et que l'application $\ell \in \mathcal{C}(X,X^2) \to \ell(K_n) \in \mathcal{K}(X \times X)$ est continue, $\mathcal{B}$ est borélien car l'ensemble $\{F \in \mathcal{K}(X \times X) \mid F \cap \Delta \neq \emptyset\}$ est compact.

Donc $\mathcal{B}$ est borélien et le lemme est démontré. ■

Montrons maintenant le théorème suivant :

THEOREME 5. <u>L'ensemble</u> $\mathcal{E} = \{(F,G) \in \mathcal{K}(X) \times \mathcal{K}(X) \mid i(F) \leq i(G)\}$ <u>est souslinien.</u>

<u>Démonstration</u> : On sait que l'ensemble $C = \{G \in \mathcal{K}(X) \mid i(G) = \aleph_1\}$ est souslinien d'après le théorème 3.

Donc l'ensemble $\{(F,G) \in \mathcal{K}(X) \times \mathcal{K}(X) \mid \exists\, f\ ,\ F \xhookrightarrow{f} G \text{ où } i(G) = \aleph_1\}$ est souslinien d'après le lemme 2.

D'après le théorème 4, l'ensemble :

$$\mathcal{G}' = \{(F,G) \in \mathcal{K}(X) \times \mathcal{K}(X) \mid i(F) \leq i(G) \text{ et } [i(F) = i(G) < \aleph_1 \Rightarrow n(F) \leq n(G)]\}$$

est souslinien.

On a vu que si $i(G) < \aleph_1$, alors il existe une partition de F en $n(F)$ ouverts fermés F_p de F $(1 \leq p \leq n(F))$ telle que $i(F_p) = i(F)$ et $n(F_p) = 1$.

Donc $i(F) \leq i(G) \Rightarrow (F_p,G) \in \mathcal{G}'$ pour tout p, si $i(G) < \aleph_1$. Donc aussi :

$$i(F) \leq i(G) \Rightarrow \exists\, n\ ,\ \exists\, F_1,\dots,\exists\, F_n\ ,\ F = \bigcup_{1 \leq p \leq n} F_p \text{ et } (F_p,G) \in \mathcal{G}'$$

pour tout p et $F_p \cap F_q = \emptyset$ si $p \neq q$.

Montrons l'implication réciproque de l'implication ci-dessus.

Si $F = \bigcup_{1 \leq p \leq n} F_p$ et $F_p \cap F_q = \emptyset$ si $p \neq q$, on a $i(F) = \sup_{1 \leq p \leq n} i(F_p)$ car les F_p sont ouverts dans F ; donc $i(F) \leq i(G)$ si $(F_p,G) \in \mathcal{G}'$ pour tout p.

On a donc :

$$i(F) \leq i(G) \Leftrightarrow \exists\, n\ ,\ \exists\, F_1,\dots,\exists\, F_n\ ,\ F = \bigcup_{1 \leq p \leq n} F_p \text{ et } (F_p,G) \in \mathcal{G}'$$

pour tout p et $F_p \cap F_q = \emptyset$ si $p \neq q$.

Comme les opérations intersection et réunion dans $\mathcal{K}(X)$ sont boréliennes, on voit que $\mathcal{E}$ est souslinien comme réunion dénombrable de projections d'ensembles sousliniens et le théorème est démontré. ■

COROLLAIRE. *Soit* $\mathcal{S}$ *un sous-ensemble de* $\mathcal{K}(X)$ *dont tous les éléments sont des compacts dénombrables. Si* $\mathcal{S}$ *est souslinien, alors il existe un ordinal dnéombrable* α *tel que* $\forall F$, $F \in \mathcal{S} \Rightarrow i(F) \leq \alpha$ ($\mathcal{S}$ *est dit borné pour* i *s'il vérifie cette condition*).

Démonstration : Raisonnons par l'absurde.

Supposons $\mathcal{S}$ non borné pour i. On a alors $F \in \mathcal{C}^c \Leftrightarrow \exists G$, $G \in \mathcal{S}$ et $i(F) \leq i(G)$ où $\mathcal{C}$ est l'ensemble des compacts non dénombrables.

D'après le théorème 5, $\mathcal{C}^c$ est souslinien tandis que d'après le théorème 3, $\mathcal{C}^c$ n'est pas souslinien.

D'où une contradiction. ∎

Démontrons maintenant que i est une norme coanalytique.

THEOREME 6. i *est une norme coanalytique i.e. les relations sur* $\mathcal{K}(X)$:

$$\begin{cases} F \in \mathcal{C}^c \ \underline{\text{et}} \ i(F) \leq i(G) & (1) \\ F \in \mathcal{C}^c \ \underline{\text{et}} \ i(F) < i(G) & (2) \end{cases}$$

sont coanalytiques.

Démonstration : Montrons d'abord que la relation (2) est coanalytique, c'est-à-dire que la relation de préordre sur $\mathcal{K}(X)$:

$$i(F) \leq i(G) ,$$

est analytique.

L'ensemble $\{(F,G) \in \mathcal{K}(X) \times \mathcal{K}(X) \mid i(F) \leq i(G)\}$ est souslinien d'après le théorème 5. Donc la relation (2) est coanalytique.

Montrons maintenant que la relation (1) est coanalytique, c'est-à-dire que la relation sur $\mathcal{K}(X)$:

$$i(F) < i(G) \quad \text{ou} \quad G \in \mathcal{C} ,$$

est analytique.

Or $i(F) < i(G)$ ou $G \in C \Leftrightarrow i(F)+1 \leq i(G) < \aleph_1$ ou $G \in C$.

Comme la relation (2) est coanalytique, il suffit de construire une application borélienne φ de $\mathcal{K}(X)$ dans $\mathcal{K}(X)$ telle que :

$$i(\varphi(F)) = i(F)+1 \quad \text{si} \quad i(F) < \aleph_1 \ .$$

Soit x un point quelconque de X et, pour tout n , $\mathcal{U}_n$ la boule ouverte de centre x et de rayon $\frac{1}{n}$.

Pour n fixé, soit $\mathcal{V}_n = \mathcal{U}_n - \mathcal{U}_{n+1}$.

Soit f_n un homéomorphisme de X sur une partie de $\mathring{\mathcal{V}}_n$; d'après le théorème 4, on a $i(f_n(F)) = i(F)$.

Montrons que l'ensemble $\varphi(F) = (\bigcup_n f_n(F)) \cup \{x\}$ est fermé.

Soit $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite injective de points de cet ensemble convergente vers un point y . Si une infinité de points y_n se trouve dans un $f_n(F)$ alors $y \in f_n(F) \subset \mathring{\mathcal{V}}_n$. On peut donc supposer $y_n \in f_n(F)$; mais dans ce cas $d(y_n,x) < \frac{1}{n}$, donc $x = y$.

Montrons que φ est borélienne. L'ensemble $\{F \in \mathcal{K}(X) \mid (\bigcup_n f_n(F)) \cup \{x\} \cap \mathcal{U} \neq \emptyset\}$ où $\mathcal{U}$ est un ouvert de X est égal à l'ensemble $\{F \in \mathcal{K}(X) \mid \exists\, n\, ,\, f_n(F) \cap \mathcal{U} \neq 0\}$. Il suffit donc de montrer que l'ensemble :

$$\{F \in \mathcal{K}(X) \mid f_n(F) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset\}$$

est borélien, pour n fixé ; l'application $F \in \mathcal{K}(X) \to f_n(F) \in \mathcal{K}(X)$ étant continue, cet ensemble est borélien, donc φ est borélienne.

On voit enfin de façon simple que :

$$\text{si} \quad i(F) < \aleph_1 \quad \text{alors} \quad \varphi(F)^{i(F)} = \{x\} \quad \text{et donc} \quad i(\varphi(F)) = i(F)+1 \ .$$

Le théorème est donc démontré. ∎

<u>Remarque</u> : Il est possible d'établir les théorèmes 4 et 5 et le corollaire dans le cas où F est un fermé de l'espace métrisable compact de Cantor $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et G un fermé d'un espace polonais, mais il n'est pas possible, par contre, de les établir dans le cas où F et G sont des fermés d'un même espace polonais.

Pour terminer ce chapitre, on va donner la notion de dérivation définie par C. Dellacherie dans [2] et qui généralise celle de Cantor (nous l'utiliserons au Chapitre II).

Soit E un espace polonais (ou souslinien) muni d'une relation d'ordre analytique $\leq$ telle qu'il existe un plus petit élément noté $\emptyset$ et que toute suite décroissante ait une borne inférieure. Une application δ de E dans E est une dérivation si :

$$\delta(x) \leq x \quad \text{pour tout} \quad x \text{ , et} \quad x \leq y \Rightarrow \delta(x) \leq \delta(y) \quad \text{pour tout} \quad x \quad \text{et} \quad y \text{ .}$$

Une dérivation δ est analytique si :
la relation d'ordre R définie par :

$$xRy \Leftrightarrow y \neq \emptyset \quad \text{et} \quad y \leq \delta(x) \text{ ,}$$

est analytique.

On définit alors pour tout x la suite transfinie $(x^i)_{i \in I}$ des dérivés de x de la façon suivante :

$$x^o = x \quad \text{et} \quad x^j = \inf_{i<j} (\delta(x^i)) \text{ .}$$

On définit aussi l'indice $j(x)$ de x de la façon suivante :

$$j(x) = \begin{cases} \inf\{i \in I \,|\, x^i = \emptyset\} & \text{si} \quad \{i \in I \,|\, x^i = \emptyset\} \neq \emptyset \\ \aleph_1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

pour tout x .

On a alors le théorème suivant (cf. [2]) :

THEOREME. _Si_ A _est un ensemble analytique inclus dans l'ensemble_ $\{x \in E \,|\, j(x) < \aleph_1\}$ _alors_ $\sup_{x \in A} j(x) < \aleph_1$.

CHAPITRE II

Les théorèmes de Lusin et Saint-Raymond

Le corollaire du théorème 5 du Chapitre I, une fois établi dans le cas des espaces polonais, permet de démontrer le théorème de Lusin sur les lusiniens à coupes dénombrables ; le théorème de la borne permet en plus d'établir les deux théorèmes de Lusin et Saint-Raymond déjà cités. C'est ce que nous allons montrer.

I. THEOREME DE LUSIN.

Notations :

Soit E et F deux espaces métrisables compacts et H un sous-ensemble de $E \times F$.

Soit π_1 la projection de $E \times F$ sur E et π_2 la projection de $E \times F$ sur F. On appellera coupe de H suivant un élément y de F l'ensemble $\pi_1(H \cap E \times \{y\})$ et section de H par y l'ensemble $H \cap E \times \{y\}$.

Rappelons le théorème suivant de Novikov que nous utiliserons plusieurs fois :

THEOREME (Novikov). Soit $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de sous-ensembles analytiques de E telle que $\bigcap_n A_n = \emptyset$. Alors il existe une suite $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de sous-ensembles boréliens de E telle que $\bigcap_n B_n = \emptyset$ et $A_n \subset B_n$ pour tout n.

Enonçons et montrons le théorème de Lusin.

THEOREME. Si H est analytique à coupes dénombrables, alors H est réunion dénombrable de graphes analytiques (analytiques dont les coupes non vides sont réduites à un point).

Démonstration : Il existe un espace métrisable compact G et un espace polonais H' de $E \times F \times G$ tel que H soit l'image de H' par la projection π de $E \times F \times G$

sur $E \times F$.

Chaque section de H' suivant un y dans F (l'ensemble $H' \cap E \times \{y\} \times G$) est un fermé de H' donc un espace polonais. La section de H suivant y en est l'image par π et, si elle n'est pas vide, est réunion des points d'une suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Soit π_y la restriction de π à $H' \cap E \times \{y\} \times G \neq \emptyset$. On a $H' \cap E \times \{y\} \times G = \bigcup_n \pi_y^{-1}(x_n)$; comme $H' \cap E \times \{y\} \times G$ est un espace de Baire, un des fermés $\pi_y^{-1}(x_n)$ est d'intérieur non vide et donc il existe un ouvert $\mathcal{U}$ non vide de $H' \cap E \times \{y\} \times G$ tel que $\pi(\mathcal{U})$ soit réduit à un point.

A partir de ce fait, nous allons définir une dérivation δ sur les fermés de H' . On aura :

$$\delta(P) = P - \Big(\bigcup_{\overline{\pi(\mathcal{U})} \in \mathcal{H}_1} \mathcal{U}\Big)$$

si P est un fermé de H' , où $\mathcal{H}_1$ désigne l'ensemble des compacts de $E \times F$ réduits à un point et $\mathcal{U}$ un ouvert de P (l'écriture $\overline{\pi(\mathcal{U})}$ plutôt que $\pi(\mathcal{U})$ est pour la commodité de la démonstration).

Soit $\mathfrak{F}(H')$ l'espace des fermés de H' muni de la topologie d'Effros adaptée convenable. $\mathfrak{F}(H')$ est polonais.

Montrons que l'ensemble :

$$\mathcal{G} = \{(P,P') \in \mathfrak{F}(H') \times \mathfrak{F}(H') \mid P' \subset \delta(P)\}$$

est souslinien.

Soit $\{\mathcal{U}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une base d'ouverts pour la topologie de $E \times F \times G$. On a l'équivalence :

$$z \in P - \delta(P) \Leftrightarrow z \in P \text{ et } \exists\, n,\ z \in \mathcal{U}_n \text{ et } \overline{\pi(\mathcal{U}_n \cap P)} \in \mathcal{H}_1 .$$

On a donc :

$$\delta(P) = \{z \in E \times F \times G \mid z \in P \text{ et } \forall\, n,\ z \in \mathcal{U}_n \Rightarrow \overline{\pi(\mathcal{U}_n \cap P)} \notin \mathcal{H}_1\} .$$

La relation $P' \subset \delta(P)$ est équivalente à :

$$\forall\, n\ [\mathcal{U}_n \cap P' \neq \emptyset \Rightarrow \mathcal{U}_n \cap \delta(P) \neq \emptyset]$$

donc à :

$$\forall n\ [\mathcal{U}_n \cap P' \neq \emptyset \Rightarrow \{\exists z\ ,\ z \in \mathcal{U}_n \ \text{ et } \ z \in P \ \text{ et } \ \forall m\ [z \in \mathcal{U}_m \Rightarrow \overline{\pi(\mathcal{U}_m \cap P)} \notin \mathcal{H}_1]\}]\ .$$

L'ensemble :

$$\{P' \in \mathfrak{F}(H') \mid P' \cap \mathcal{U}_n \neq \emptyset\} = \{P' \in \mathfrak{F}(H') \mid \bar{P}' \cap \mathcal{U}_n \neq \emptyset\}$$

est ouvert pour n fixé ($\bar{P}'$ désigne ici l'adhérence de P' dans $E \times F \times G$).

L'ensemble :

$$\{(z,P) \in (E \times F \times G) \times \mathfrak{F}(H') \mid z \in P\} = \{(z,P) \in (E \times F \times G) \times \mathfrak{F}(H') \mid z \in H' \ \text{ et } \ z \in \bar{P}\}$$

est borélien. On a $\overline{\pi(\mathcal{U}_m \cap P)} = \pi(\overline{\mathcal{U}_m \cap P})$ par compacité, pour tout m.

L'application :

$$P \in \mathfrak{F}(H') \rightarrow \overline{P \cap \mathcal{U}_m} \in \mathcal{K}(E \times F \times G)$$

est borélienne pour m fixé, car :

$$\overline{P \cap \mathcal{U}_m} \cap \mathcal{U} \neq \emptyset \Leftrightarrow \bar{P} \cap \mathcal{U}_m \cap \mathcal{U} \neq \emptyset\ .$$

Enfin $\mathcal{H}_1$ est un fermé de $\mathcal{K}(E \times F)$ et l'application $K \in \mathcal{K}(E \times F \times G) \rightarrow \pi(K) \in \mathcal{K}(E \times F)$ est continue.

On voit donc que $\mathcal{G}$ est souslinien, c'est-à-dire : δ est une dérivation analytique.

L'ensemble des sections de H' est un sous-ensemble de l'ensemble $\mathcal{S}$ des fermés de H' qui se projettent sur F en un point ; $\mathcal{S} = \{P \in \mathfrak{F}(H') \mid \overline{\pi_2(\pi(P))}$ est réduit à un point$\}$.

On vérifie aisément que $\mathcal{S}$ est borélien ; d'autre part, tout élément P de $\mathcal{S}$ est tel que $i(P) < \aleph_1$ si i est l'indice attaché à la dérivation δ (défini à la fin du chapitre I), puisque $P \in \mathcal{S} \Rightarrow P$ est inclus dans une section de H' et $i(H' \cap E \times \{y\} \times G) < \aleph_1$ pour tout y , car $H \cap E \times \{y\}$ est dénombrable pour tout y .

Utilisant le théorème de la borne, on en déduit :

$$\sup_{P \in \mathcal{S}} i(P) < \aleph_1\ .$$

Donc $\sup_y i(H' \cap E \times \{y\} \times G) < \aleph_1$.

Si L est un sous-ensemble de H' à sections fermées dans H' , désignons par $\delta'(L)$ le sous-ensemble de L défini par :

la section de $\delta'(L)$ suivant tout y dans F est le dérivé de la section de L suivant y , i.e. :

$$\delta'(L) \cap E \times \{y\} \times G = \delta(L \cap E \times \{y\} \times G)$$

pour tout y . Pour tout ordinal α on définit un ensemble H'^{α} par induction transfinie de la façon suivante :

$$H'^{0} = H' \; ; \; H'^{\alpha+1} = \delta'(H'^{\alpha}) \quad \text{et} \quad H'^{\gamma} = \bigcap_{\alpha<\gamma} H'^{\alpha}$$

si γ est un ordinal de seconde espèce.

D'après ce qui précède, on a :

$$\begin{cases} H'^{\alpha_0} = \emptyset \quad \text{si} \quad \alpha_0 = \sup_y i(H' \cap E \times \{y\} \times G) \\ \text{et} \quad \alpha_0 \quad \text{est dénombrable.} \end{cases}$$

On définit aussi pour tout α un ensemble $\mathcal{S}^{\alpha}$ par induction transfinie de la façon suivante :

$$\mathcal{S}^{0} = \mathcal{S} \; ; \; \mathcal{S}^{\alpha+1} = \{P' \in \mathcal{F}(H') \,|\, \exists\, P \,,\, P \in \mathcal{S}^{\alpha} \quad \text{et} \quad P' \subset \delta(P)\}$$

et $\mathcal{S}^{\gamma} = \bigcap_{\alpha<\gamma} \mathcal{S}^{\alpha}$ si γ est un ordinal de seconde espèce.

On vérifie facilement que pour α fixé, $\mathcal{S}^{\alpha}$ est l'ensemble des fermés de H' inclus dans une section de H'^{α} .

On vérifie aussi que $\mathcal{S}^{\alpha}$ est souslinien, car δ est analytique.

Enfin H'^{α} est souslinien, car on a l'équivalence suivante :

$$(x,y,z) \in H'^{\alpha} \Leftrightarrow \exists\, F \,,\, F \in \mathcal{S}^{\alpha} \quad \text{et} \quad (x,y,z) \in F \,.$$

La fin de la démonstration s'inspire de J. Saint-Raymond [5].

Pour α fixé, on a :

$$H'^{\alpha} - H'^{\alpha+1} = \{(x,y,z) \in E \times F \times G \mid (x,y,z) \in H'^{\alpha}$$

$$\text{et } \exists\, n,\ (x,y,z) \in \mathcal{U}_n \text{ et } \pi(\overline{\mathcal{U}_n \cap H'^{\alpha} \cap E \times \{y\} \times G}) \in \mathcal{H}_1\} .$$

Posons, pour n fixé :

$$C_{\alpha}^{n} = \{(x,y,z) \in E \times F \times G \mid (x,y,z) \in \mathcal{U}_n \cap H' \text{ et } \pi(\overline{\mathcal{U}_n \cap H'^{\alpha} \cap E \times \{y\} \times G}) \in \mathcal{H}_1\} .$$

C_{α}^{n} est coanalytique car :

$$\pi(\overline{\mathcal{U}_n \cap H'^{\alpha} \cap E \times \{y\} \times G}) \notin \mathcal{H}_1$$

$$\Leftrightarrow \exists\, P,\ P \in \mathcal{S}^{\alpha} \text{ et } \pi(\overline{P \cap \mathcal{U}_n}) \notin \mathcal{H}_1 \text{ et } \pi_2(\pi(\bar{P})) = \{y\} .$$

D'autre part, on a :

$$H'^{\alpha} - H'^{\alpha+1} \subset \bigcup_n C_{\alpha}^{n} \subset H' \text{ et } \pi(C_{\alpha}^{n} \cap H'^{\alpha}) \text{ est un graphe.}$$

Montrons alors le résultat suivant : si B est un borélien contenant $H'^{\alpha+1}$, alors $\pi(H'^{\alpha} \setminus B)$ est réunion dénombrable de graphes analytiques.

Posons $A_{\alpha} = H'^{\alpha} \setminus B$. On a alors :

$$A_{\alpha} \subset H'^{\alpha} - H'^{\alpha+1}$$

car $H'^{\alpha+1} \subset B$ et donc $A_{\alpha} \subset \bigcup_n C_{\alpha}^{n}$.

D'après le théorème de Novikov, on peut facilement voir qu'il existe un borélien B_{α} et des boréliens B_{α}^{n} tels que :

$$A_{\alpha} \subset B_{\alpha},\ B_{\alpha}^{n} \subset C_{\alpha}^{n} \text{ pour tout } n \text{ et } B_{\alpha} \subset \bigcup_n B_{\alpha}^{n} .$$

Comme $A_{\alpha} \subset H'^{\alpha}$, on a $A_{\alpha} \subset \bigcup_n (B_{\alpha}^{n} \cap H'^{\alpha})$. $\pi(A_{\alpha})$ est un ensemble analytique inclus dans l'ensemble $\bigcup_n \pi(B_{\alpha}^{n} \cap H'^{\alpha})$. Pour tout n, $\pi(B_{\alpha}^{n} \cap H'^{\alpha})$ est un graphe, car $\pi(C_{\alpha}^{n} \cap H'^{\alpha})$ est un graphe.

Donc $\pi(A_{\alpha}) = \pi(H'^{\alpha} \setminus B)$ est réunion dénombrable de graphes analytiques.

Montrons maintenant le dernier résultat dont nous aurons besoin et qui est le suivant : si B est un borélien de H' contenant H'^{α} alors $\pi(H'-B)$ est réunion dénombrable de graphes analytiques, pour tout α.

Montrons le par induction transfinie sur α. Le résultat est vrai si $\alpha = 0$. Supposons le vrai pour α, et montrons le pour $\alpha+1$.

Si $B \supset H'^{\alpha+1}$ alors, d'après le résultat précédent, $\pi(H'^{\alpha}\setminus B)$ est réunion dénombrable de graphes analytiques. Un graphe analytique étant contenu dans un graphe borélien, $\pi(H'^{\alpha}\setminus B)$ est contenu dans une réunion dénombrable B_1 de graphes boréliens.

Donc $\pi^{-1}(B_1) \cap H'$ est un borélien B' contenant $H'^{\alpha}\setminus B$; utilisant l'hypothèse d'induction transfinie, on en déduit :

$\pi(H'-(B \cup B'))$ est réunion dénombrable de graphes analytiques puisque $B \cup B'$ contient H'^{α}.

Donc $\pi(H'-B)$ est réunion dénombrable de graphes analytiques car $\pi(H'-B) \subset \pi(H'-(B \cup B')) \cup B_1$.

Supposons maintenant le résultat vrai pour tout $\alpha < \gamma$, γ étant un ordinal de seconde espèce et montrons le pour γ.

Si $B \supset H'^{\gamma}$ alors $\bigcap_{\alpha<\gamma} (H'^{\alpha}\setminus B) = \emptyset$. Il existe alors, d'après le théorème de Novikov, des boréliens B_α $(\alpha<\gamma)$ tels que :

$$\bigcap_{\alpha<\gamma} B_\alpha = \emptyset \quad \text{et} \quad H'^{\alpha}\setminus B \subset B_\alpha \quad \text{pour} \quad \alpha<\gamma .$$

On a donc $H'^{\alpha} \subset B \cup B_\alpha$, pour $\alpha<\gamma$ et d'après l'hypothèse d'induction transfinie $\pi(H'-(B \cup B_\alpha))$ est réunion dénombrable de graphes analytiques, pour $\alpha<\gamma$.

Enfin, on a $\pi(H'-B) = \bigcup_{\alpha<\gamma} \pi(H'-(B \cup B_\alpha))$ puisque $\bigcap_{\alpha<\gamma} B_\alpha = \emptyset$.
Le résultat est donc démontré.

On peut maintenant conclure en utilisant ce dernier résultat et le théorème de la borne.

D'après le théorème de Novikov, il existe des boréliens D_α de H' tels que $\bigcap_{\alpha \le \alpha_0} D_\alpha = \emptyset$ et $H'^{\alpha} \subset D_\alpha$ pour $\alpha \le \alpha_0$ car $\bigcap_{\alpha \le \alpha_0} H'^{\alpha} = \emptyset$.

On a donc $\pi(H') = \bigcup_{\alpha \le \alpha_0} \pi(H' - D_\alpha)$ et $\pi(H' - D_\alpha)$ est réunion dénombrable de graphes analytiques pour $\alpha \le \alpha_0$, d'après le dernier résultat. Le théorème est donc démontré. ∎

II. THEOREME DE SAINT-RAYMOND.

Prenons les mêmes notations que pour le théorème de Lusin.

Enonçons et montrons le théorème de Saint-Raymond.

THEOREME. Si H est un borélien dont les coupes sont réunions dénombrables de compacts, alors H est réunion dénombrable de boréliens à coupes compactes.

Démonstration : On utilise à nouveau le théorème de Baire pour la définition d'une dérivation : pour tout y dans F la section de H' suivant y est un espace polonais donc de Baire et la section de H suivant y en est l'image par π et est réunion dénombrable de compacts. Il existe donc un ouvert $\mathcal{U}$ non vide de $H' \cap E \times \{y\} \times G$ si $H \cap E \times \{y\} \neq \emptyset$ tel que $\overline{\pi(\mathcal{U})} \subset H \cap E \times \{y\}$.

La dérivation δ est définie dans ce cas par $\delta(P) = P - (\bigcup_{\overline{\pi(\mathcal{U})} \subset H} \mathcal{U})$, où $\mathcal{U}$ est un ouvert de P .

Montrons que δ est une dérivation analytique. En comparant à la démonstration du théorème de Lusin, on voit que la condition $\overline{\pi(\mathcal{U}_m \cap P)} \not\in \mathcal{H}_1$ est remplacée par la condition $\overline{\pi(\mathcal{U}_m \cap P)} \not\subset H$. Or, cette dernière condition est souslinienne car équivalente à :

$$\exists\ (x,y,z)\ ,\ (x,y,z) \in \overline{\mathcal{U}_m \cap P} \quad \text{et} \quad (x,y) \notin H\ ,$$

puisque $\overline{\pi(\mathcal{U}_m \cap P)} = \pi(\overline{\mathcal{U}_m \cap P})$ par compacité (ici intervient en particulier le fait que H est borélien).

Soit encore i l'indice associé à δ ; on a $i(H' \cap E \times \{y\} \times G) < \aleph_1$ pour tout y .

Donc d'après le théorème de la borne de C. Dellacherie $\sup_{P \in \mathcal{S}} i(P) < \aleph_1$ et aussi $\sup_y i(H' \cap E \times \{y\} \times G) < \aleph_1$.

De façon similaire à la démonstration du théorème de Lusin, on pose :

$$C^n_\alpha = \{(x,y,z) \in E \times F \times G \mid (x,y,z) \in \mathcal{U}_n \cap H' \text{ et } \overline{\pi(\mathcal{U}_n \cap H'^\alpha \cap E \times \{y\} \times G)} \subset H\} .$$

On a encore :

$$H'^\alpha - H'^{\alpha+1} \subset \bigcup_n C^n_\alpha \subset H' ,$$

C^n_α est coanalytique.

Etablissons les deux résultats suivants :

si B est un borélien contenant $H'^{\alpha+1}$ alors $\pi(H'^\alpha \setminus B)$ est inclus dans une réunion dénombrable de boréliens de H à coupes compactes,

si B est un borélien de H' contenant H'^α alors $\pi(H'-B)$ est contenu dans une réunion dénombrable de boréliens de H à coupes compactes.

Le deuxième résultat se démontre, une fois le premier démontré comme le résultat semblable énoncé dans la démonstration du théorème de Lusin. Il suffit donc de démontrer le premier résultat pour terminer la démonstration du théorème.

Or $\pi(C^n_\alpha \cap H'^\alpha)$ est un ensemble dont chaque section a son adhérence dans H ; on a donc :

si B est un borélien contenant $H'^{\alpha+1}$ alors $\pi(H'^\alpha \setminus B)$ est un analytique inclus dans une réunion dénombrable d'analytiques dont les sections ont leurs adhérences dans H (comme dans la démonstration du théorème de Lusin).

On voit donc qu'il suffit de montrer le résultat suivant (établi dans la démonstration de Saint-Raymond) :

si A est un ensemble analytique dont chaque section a son adhérence dans H , alors A est contenu dans un borélien de H à coupes compactes.

Soit A' l'ensemble défini par : chaque section de A' est l'adhérence d'une section de A .

Soit, pour k fixé, $\{\mathcal{U}^k_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une base dénombrable d'ouverts de E , de diamètre inférieur à $\frac{1}{k}$.

L'ensemble $A^k = \bigcup_n (\mathcal{U}^k_n \times \pi_2[(\mathcal{U}^k_n \times F) \cap A])$ est analytique. Or $A' = \bigcap_k A^k$; donc A' est analytique.

A' est analytique à coupes compactes ; si $\{\mathcal{U}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une base dénombrable d'ouverts de E , posons :

$$C_n = \{y | A'^c(y) \supset \mathcal{U}_n\}$$

où $A'^c(y)$ est la coupe de A'^c suivant y , pour n fixé.

On a $A'^c = \bigcup_n \mathcal{U}_n \times C_n$, donc $A' = \bigcap_n ((\mathcal{U}_n^c \times F) \cup (E \times C_n^c))$.
Or $C_n^c = \pi_2(A' \cap (\mathcal{U}_n \times F))$, donc A' s'écrit :

$$A' = \bigcap_n A_n$$

où A_n est réunion finie d'ensembles de la forme $K \times A''$, K étant compact dans E et A'' analytique dans F .

On a donc $\bigcap_n A_n \subset H$; d'après le théorème de Novikov, on en déduit qu'il existe des boréliens B_n tels que $\bigcap_n B_n \subset H$ et $A_n \subset B_n$, pour tout n .

Pour n fixé, A_n est réunion finie de rectangles de la forme $K \times A''$; donc chacun de ces rectangles est inclus dans B_n .

Montrons qu'un tel rectangle est contenu dans un borélien de B_n à coupes compactes ; le résultat en découlera, puisqu'alors A_n sera inclus dans un borélien de B_n à coupes compactes et donc $A' = \bigcap_n A_n$ sera inclus dans un borélien de H à coupes compactes et A aussi.

On a $K \times A'' \subset B_n$, donc $A'' \subset \{y | K \times \{y\} \subset B_n\}$. On vérifie que l'ensemble $\{y | K \times \{y\} \subset B_n\}$ est coanalytique ; A'' étant analytique, on a, d'après une forme du théorème de Novikov :

il existe un borélien B tel que $A'' \subset B \subset \{y | K \times \{y\} \subset B_n\}$ donc tel que $K \times A'' \subset K \times B \subset B_n$.

Le théorème est donc démontré. ■

CHAPITRE III

Oscillations des applications continues à droite sur $[0,1]$
à valeurs dans un espace métrique compact
et norme coanalytique associée

I. DEFINITIONS ET NOTATIONS.

Soit E un espace métrique compact muni d'une distance d majorée par 1, ayant au moins deux points et Ω l'ensemble des applications continues à droite de $[0,1]$ dans E.

Pour tout réel t de $[0,1]$, si X_t est l'application coordonnée d'indice t sur $E^{[0,1]}$, on notera de même sa restriction à Ω.

Soit $\mathcal{F}^o$ la tribu sur Ω engendrée par les applications coordonnées.

Grâce à la continuité à droite, on peut identifier tout élément ω de Ω à sa restriction à $\mathbb{Q}\cap[0,1]$.

On peut donc identifier Ω à un sous-espace de $E^{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ qui est un espace métrisable compact, et on sait que $\mathcal{F}^o$ est la trace de la tribu borélienne de $E^{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ sur Ω.

Soit encore I le segment d'ordinaux $[0,\aleph_1]$.

Pour tout réel ε strictement positif et tout ordinal α de I, définissons une application T^ε_α de Ω dans $[0,1]$ par induction transfinie de la façon suivante :

$$T^\varepsilon_o = 0 \;;\; T^\varepsilon_{\alpha+1}(\omega) = \begin{cases} \text{la borne inférieure, si elle existe,} \\ \text{de l'ensemble :} \\ \{t\in[0,1] \mid t > T^\varepsilon_\alpha(\omega) \text{ et } d(X_{T^\varepsilon_\alpha(\omega)}(\omega), X_t(\omega)) > \varepsilon\} \\ 1 \quad \text{sinon} \end{cases}$$

pour tout ω dans Ω et $T^\varepsilon_\gamma = \sup\limits_{\alpha<\gamma} T^\varepsilon_\alpha$ si γ est un ordinal de I de seconde espèce.

Grâce à la continuité à droite, on a :

$$T^{\varepsilon}_{\alpha+1}(\omega) > T^{\varepsilon}_{\alpha}(\omega)$$

pour tout ε et tout α , si $T^{\varepsilon}_{\alpha}(\omega) < 1$.

Il existe donc pour tout ω dans Ω et tout ε un ordinal dénombrable $j^{\varepsilon}(\omega)$ tel que $T^{\varepsilon}_{j^{\varepsilon}(\omega)}(\omega) = 1$.

II. EXISTENCE D'UNE NORME COANALYTIQUE.

Montrons maintenant le lemme suivant.

LEMME 1. Ω n'est pas souslinien.

Démonstration : Raisonnons par l'absurde.

Soit a et b deux points distincts de E , si E a au moins deux points.

Si Ω est souslinien, alors :

$$\Omega' = \{\omega \in \Omega \mid \forall\ t\ ,\ t \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \Rightarrow X_t(\omega) = a \text{ ou } X_t(\omega) = b\}$$

est souslinien.

On peut donc supposer $E = \{0,1\}$ et $d(0,1) = 1$. Si $\omega \in \Omega$, alors $\bigcup_{\alpha < \aleph_1} T^{\frac{1}{2}}_{\alpha}(\omega)$ est un compact de $[0,1]$.

Soit F l'application définie sur Ω à valeurs dans l'espace topologique $\mathcal{K}([0,1])$ des compacts de $[0,1]$ muni de la topologie exponentielle, par :

$$F(\omega) = \bigcup_{\alpha < \aleph_1} T^{\frac{1}{2}}_{\alpha}(\omega) ,$$

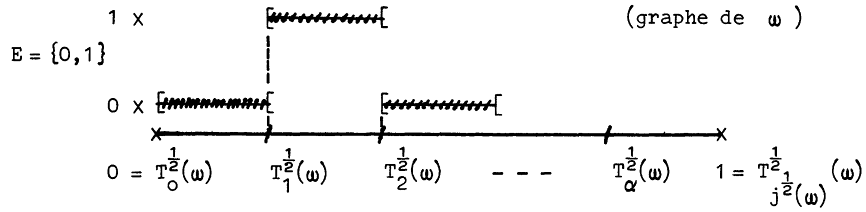
pour tout ω dans Ω .

Pour tout ω dans Ω , $F(\omega)$ est un compact K de $[0,1]$, contenant 0 et 1 , tel que pour tout point x différent de 1 de K , il existe un réel a de $[0,1]$ tel que :

$$x < a \quad \text{et} \quad]x,a[\cap K = \emptyset \ ;$$

soit $\mathfrak{G}$ l'ensemble des compacts de $[0,1]$ qui sont de cette forme.

Tout élément K de $\mathfrak{G}$ est image par F d'un élément ω de Ω.



Donc F est surjective de Ω sur $\mathfrak{G}$.

Montrons que F est borélienne. On a :

$$F(\omega) \cap]a,b[\cap [0,1] \neq \emptyset \Leftrightarrow \exists\, t\,,\ \exists\, t'\,,\ t \in \mathbb{Q} \cap [0,1]\ ,\ t' \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$$

$a < t < b$, $a < t' < b$ et $X_t(\omega) \neq X_{t'}(\omega)$ (a et b sont réels), car ω est continue à droite.

On voit donc que F est borélienne car les applications coordonnées X_t sont continues.

Donc $\mathfrak{G}$ est souslinien et donc $\mathfrak{G}$ est borné pour l'indice i défini dans le chapitre I, d'après le corollaire du théorème 5 (ou le théorème de la borne) ; mais $\mathfrak{G}$ contient évidemment des éléments d'indice, relativement à i , arbitrairement grands.

D'où une contradiction et le lemme est démontré. ∎

Pour tout réel ε strictement positif, étendons la définition de j^{ε} à $E^{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$ en posant $j^{\varepsilon}(\omega) = \aleph_1$ si $\omega \notin \Omega$.

Posons aussi :

$$j(\omega) = \inf\{i \in I \mid j^{\varepsilon}(\omega) < i \quad \text{pour tout} \quad \varepsilon\}\ ,$$

pour tout ω.

Montrons le lemme suivant :

LEMME 2. Si $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$ alors $T_\alpha^{\frac{1}{n}} \leq T_\alpha^\varepsilon$ pour tout α et $j(\omega) = \sup\limits_{n>0} (j^{\frac{1}{n}}(\omega)+1)$, pour tout ω .

Démonstration : Montrons l'inégalité par induction transfinie sur α .

Pour $\alpha = 0$, on a $T_\alpha^{\frac{1}{n}} \leq T_\alpha^\varepsilon$. Soit β un ordinal non nul tel que $T_\alpha^{\frac{1}{n}} \leq T_\alpha^\varepsilon$ pour tout $\alpha < \beta$.

Si β est de seconde espèce, on voit que $T_\beta^{\frac{1}{n}} \leq T_\beta^\varepsilon$. Il suffit donc de montrer que si $T_\alpha^{\frac{1}{n}} \leq T_\alpha^\varepsilon$, alors $T_{\alpha+1}^{\frac{1}{n}} \leq T_{\alpha+1}^\varepsilon$.

Raisonnons par l'absurde et supposons :

$$T_\alpha^{\frac{1}{n}}(\omega) \leq T_\alpha^\varepsilon(\omega) < T_{\alpha+1}^\varepsilon(\omega) < T_{\alpha+1}^{\frac{1}{n}}(\omega)$$

pour un ω dans Ω (car si $T_\alpha^\varepsilon(\omega) = T_{\alpha+1}^\varepsilon(\omega)$ alors $T_\alpha^\varepsilon(\omega) = 1$).

On a donc :

$$\begin{cases} d(\omega(T_\alpha^{\frac{1}{n}}(\omega)),\omega(T_\alpha^\varepsilon(\omega))) \leq \frac{1}{n} \quad \text{et} \\ d(\omega(T_\alpha^{\frac{1}{n}}(\omega)),\omega(T_{\alpha+1}^\varepsilon(\omega))) \leq \frac{1}{n} \, . \end{cases}$$

Utilisant l'inégalité du triangle, on obtient :

$$d(\omega(T_\alpha^\varepsilon(\omega)),\omega(T_{\alpha+1}^\varepsilon(\omega))) \leq \frac{2}{n} < \varepsilon \, .$$

Mais ceci est impossible car $d(\omega(T_\alpha^\varepsilon(\omega)),\omega(T_{\alpha+1}^\varepsilon(\omega))) \geq \varepsilon$.

Donc l'inégalité est démontrée.

On en déduit aussitôt $j(\omega) = \sup\limits_{n>0} (j^{\frac{1}{n}}(\omega)+1)$ pour tout ω . $\square$

Soit F^ε la fonction de Ω dans $\mathcal{G}$ définie, pour tout ε strictement positif, par $F^\varepsilon(\omega) = \bigcup\limits_{\alpha<\aleph_1} T_\alpha^\varepsilon(\omega)$, pour tout ω . Soit j' la fonction de $\mathcal{G}$ dans I , définie de la façon suivante :

tout élément K de $\mathcal{G}$ est isomorphe (pour les structures d'ordre) à un segment $[0,\alpha]$ d'ordinaux de I ; on pose alors $j'(K) = \alpha$.

Montrons maintenant le théorème suivant.

THEOREME 1. <u>L'ensemble</u> $\{(\omega,\omega') \in E^{\mathbb{Q}\cap[0,1]} \times E^{\mathbb{Q}\cap[0,1]} \mid j(\omega) \leq j(\omega')\}$ <u>est analytique.</u>

<u>Démonstration</u> : D'après le lemme 2, on a :

$$j(\omega) \leq j(\omega') \Leftrightarrow \forall\, n,\ \exists\, \varepsilon,\ \varepsilon > 0 \quad \text{et} \quad j^{\frac{1}{n}}(\omega) \leq j^{\varepsilon}(\omega') .$$

Soit $\mathcal{C}([0,1],[0,1])$ l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $[0,1]$ muni de la topologie de la convergence uniforme et f un élément de $\mathcal{C}([0,1],[0,1])$.

Montrons l'équivalence suivante :

(1) $$\forall\, n,\ \exists\, \varepsilon,\ \varepsilon > 0 \quad \text{et} \quad \omega' \in \Omega \quad \text{et} \quad j^{\frac{1}{n}}(\omega) \leq j^{\varepsilon}(\omega')$$

$$\Leftrightarrow \forall\, n,\ \exists\, \varepsilon,\ \exists\, f,\ \varepsilon > 0 \quad \text{et} \quad \omega' \in \Omega$$

et f est croissante telle que :

$$[\exists\, t_1,\ \exists\, t_2,\ t_1 < t_2 \quad \text{et} \quad t_1 \in \mathbb{Q}\cap[0,1] \quad \text{et} \quad t_2 \in \mathbb{Q}\cap[0,1]$$

$$\text{et} \quad d(\omega(t_1),\omega(t_2)) > \tfrac{1}{n}] \Rightarrow \exists\, t_1',\ \exists\, t_2',\ t_1' \in \mathbb{Q}\cap[0,1] \quad \text{et} \quad t_2' \in \mathbb{Q}\cap[0,1]$$

$$\text{et} \quad t_1 < f(t_1') < f(t_2') < t_2 \quad \text{et} \quad d(\omega'(t_1'),\omega'(t_2')) > \varepsilon .$$

Démontrons d'abord la condition nécessaire de (1). Fixons n et ε tels que :

$$j^{\frac{1}{4n}}(\omega) \leq j^{\varepsilon}(\omega') ,$$

et définissons une fonction f continue sur $[0,1]$ de la façon suivante :

$$f(T_{\alpha}^{\varepsilon}(\omega')) = T_{\alpha}^{\frac{1}{4n}}(\omega)$$

pour $\alpha \leq j^{\frac{1}{4n}}(\omega)$ et f est linéaire croissante sur les intervalles $[T_{\alpha}^{\varepsilon}(\omega'),T_{\alpha+1}^{\varepsilon}(\omega')]$ pour $\alpha < j^{\frac{1}{4n}}(\omega)$, et constante à partir de $T^{\varepsilon}_{j^{\frac{1}{4n}}(\omega)}(\omega')$.

Ceci est possible car :

$$j^{\frac{1}{4n}}(\omega) \leq j^{\varepsilon}(\omega') \Rightarrow T^{\varepsilon}_{\alpha}(\omega') < T^{\varepsilon}_{\alpha+1}(\omega')$$

pour $\alpha < j^{\frac{1}{4n}}(\omega)$.

Montrons que s'il existe deux rationnels t_1 et t_2 de $[0,1]$ tels que :

$$t_1 < t_2 \quad \text{et} \quad d(\omega(t_1),\omega(t_2)) > \frac{1}{n} ,$$

alors il existe nécessairement un ordinal α tel que :

$$\alpha \leq j^{\frac{1}{4n}}(\omega) \quad \text{et} \quad t_1 < T^{\frac{1}{4n}}_{\alpha}(\omega) < t_2 .$$

Soit $T^{\frac{1}{4n}}_{\beta}(\omega)$ le plus grand élément de $F^{\frac{1}{4n}}(\omega)$ inférieur ou égal à t_1 .

Alors $t_1 < T^{\frac{1}{4n}}_{\beta+1}(\omega) < t_2$, sinon on aurait $t_1 < t_2 \leq T^{\frac{1}{4n}}_{\beta+1}(\omega)$ et donc :

$$\begin{cases} d(\omega(T^{\frac{1}{4n}}_{\beta}(\omega)),\omega(t_1)) \leq \frac{1}{4n} & \text{et} \\ d(\omega(T^{\frac{1}{4n}}_{\beta}(\omega)),\omega(t_2)) \leq \frac{1}{4n} \end{cases}$$

ce qui est impossible d'après l'inégalité du triangle car $d(\omega(t_1),\omega(t_2)) > \frac{1}{n}$.

D'autre part $\beta+1 \leq j^{\frac{1}{4n}}(\omega)$ car $T^{\frac{1}{4n}}_{\beta}(\omega) < T^{\frac{1}{4n}}_{\beta+1}(\omega)$.

Il existe donc un ordinal α tel que :

$$\alpha \leq j^{\frac{1}{4n}}(\omega) \quad \text{et} \quad t_1 < T^{\frac{1}{4n}}_{\alpha}(\omega) < t_2 .$$

On voit alors, comme précédemment, qu'il existe un ordinal β tel que :

$$\alpha \neq \beta \ , \ \beta \leq j^{\frac{1}{4n}}(\omega) \quad \text{et} \quad t_1 < T^{\frac{1}{4n}}_{\beta}(\omega) < t_2 ,$$

car :

$$\begin{cases} d(\omega(t_1),\omega(T^{\frac{1}{4n}}_{\alpha}(\omega))) > \frac{1}{2n} & \text{ou} \\ d(\omega(t_2),\omega(T^{\frac{1}{4n}}_{\alpha}(\omega))) > \frac{1}{2n} \end{cases}$$

d'après l'inégalité du triangle.

Finalement, il existe deux ordinaux α et β tels que :

$$t_1 < T_\alpha^{\frac{1}{4n}}(\omega) < T_\beta^{\frac{1}{4n}}(\omega) < t_2 \quad \text{et} \quad \alpha < \beta \leq j^{\frac{1}{4n}}(\omega)$$

qu'on peut supposer consécutifs.

Il existe alors d'après la construction de f deux réels t'_1 et t'_2 tels que :

$$t_1 < f(t'_1) < f(t'_2) < t_2 \quad \text{et} \quad d(\omega'(t'_1), \omega'(t'_2)) \geq \varepsilon \ .$$

On voit donc qu'il existe deux rationnels t''_1 et t''_2 tels que, par exemple :

$$t_1 < f(t''_1) < f(t''_2) < t_2 \quad \text{et} \quad d(\omega'(t''_1), \omega'(t''_2)) > \frac{\varepsilon}{2} \ ,$$

car f et ω' sont continues à droite.

La condition nécessaire est donc démontrée.

Démontrons maintenant la condition suffisante de (1). Prenons pour hypothèse le membre de droite de (1).

Montrons d'abord $\omega \in \Omega$, en raisonnant par l'absurde.

Si $\omega \notin \Omega$, ω n'est pas prolongeable en une application continue à droite sur $[0,1]$. Il existe alors un réel t , deux suites $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{t'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de rationnels convergentes vers t et un entier n tels que :

$$\begin{cases} d(\omega(t_m), \omega(t'_m)) > \frac{1}{n} \quad \text{et} \\ t_{m+1} < t'_{m+1} < t_m < t'_m \ , \end{cases}$$

pour tout m .

Pour m fixé, d'après l'hypothèse faite, il existe deux rationnels s_m et s'_m tels que :

$$\begin{cases} t_m < f(s_m) < f(s'_m) < t'_m \quad \text{et} \\ d(\omega'(s_m), \omega'(s'_m)) > \varepsilon \ . \end{cases}$$

Il existe alors, comme précédemment, un ordinal α tel que :

$$\alpha \leq j^{\frac{\varepsilon}{2}}(\omega') \quad \text{et} \quad s_m < T_\alpha^{\frac{\varepsilon}{2}}(\omega') < s'_m .$$

Donc il existe un réel u_m tel que :

$$s_m < u_m < s'_m \quad \text{et} \quad u_m \in F^{\frac{\varepsilon}{2}}(\omega') .$$

On a donc $t_m < f(u_m) < t'_m$ car f est croissante.

La suite $\{f(u_m)\}_{m \in \mathbb{N}}$ est alors strictement décroissante et la suite $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ aussi. Mais ceci est impossible car $F^{\frac{\varepsilon}{2}}(\omega')$ ne peut contenir une suite strictement décroissante (ω' est dans Ω).

Donc $\omega \in \Omega$ et pour tout n : $j^{\frac{1}{n}}(\omega) = j'(F^{\frac{1}{n}}(\omega))$.

Puisque $\omega \in \Omega$, on peut construire assez facilement un compact K de $[0,1]$ tel que pour n fixé :

$K \in \mathcal{G}$, tout point isolé de K est rationnel, entre (au sens large) deux points consécutifs de $F^{\frac{1}{n}}(\omega)$ se trouve un point de K et pour deux points consécutifs t et t' de K , on a $d(\omega(t),\omega(t')) > \frac{1}{n}$ (l'intérêt de la construction de K est dans le fait que tout point isolé de K est rationnel).

Comme entre deux points de $F^{\frac{1}{n}}(\omega)$ se trouve un point de K , on a :

$$j'(K) \geq j'(F^{\frac{1}{n}}(\omega)) = j^{\frac{1}{n}}(\omega) .$$

Soient t et t' deux points consécutifs de K $(t < t')$. On a :

$$d(\omega(t),\omega(t')) > \frac{1}{n}$$

et t' est rationnel car isolé dans K . Il existe un rationnel t'' tel que :

$$t \leq t'' < t' \quad \text{et} \quad d(\omega(t''),\omega(t')) > \frac{1}{n}$$

car ω est continue à droite.

D'après l'hypothèse, il existe un réel ε strictement positif et deux points s et s' tels que :

$$t'' < f(s) < f(s') < t' \quad \text{et} \quad d(\omega'(s),\omega'(s')) > \varepsilon \ .$$

On en déduit, comme précédemment, qu'il existe un réel u tel que :

$$t < f(u) < t' \quad \text{et} \quad u \in F^{\frac{\varepsilon}{2}}(\omega') \ .$$

Donc entre deux points consécutifs de K, il existe un point du compact $f(F^{\frac{\varepsilon}{2}}(\omega'))$ qui est dans G.

On a donc $j'(f(F^{\frac{\varepsilon}{2}}(\omega')) \geq j'(K)$ et donc $j'(f(F^{\frac{\varepsilon}{2}}(\omega'))) \geq j^{\frac{1}{n}}(\omega)$, d'après ce qui précède.

Comme f est croissante, on a :

$$j'(f(F^{\frac{\varepsilon}{2}}(\omega'))) \leq j'(F^{\frac{\varepsilon}{2}}(\omega')) = j^{\frac{\varepsilon}{2}}(\omega') \ ,$$

donc :

$$j^{\frac{1}{n}}(\omega) \leq j^{\frac{\varepsilon}{2}}(\omega') \ .$$

La condition suffisante de (1) est donc démontrée.

D'après (1), on a :

$$j(\omega) \leq j(\omega') \Leftrightarrow \omega' \notin \Omega$$

ou $\forall\, n, \exists\, \varepsilon, \exists\, f, \varepsilon > 0$ et f est croissante telle que :

$$[\exists\, t_1, \exists\, t_2, t_1 < t_2 \quad \text{et} \quad t_1 \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \quad \text{et} \quad t_2 \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$$

$$\text{et} \quad d(\omega(t_1),\omega(t_2)) > \tfrac{1}{n}] \Rightarrow \exists\, t'_1, \exists\, t'_2, t'_1 \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \quad \text{et} \quad t'_2 \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$$

$$\text{et} \quad t_1 < f(t'_1) < f(t'_2) < t_2 \quad \text{et} \quad d(\omega'(t'_1),\omega'(t'_2)) > \varepsilon \ .$$

Le membre de droite de l'équivalence ci-dessus représente visiblement une condition souslinienne, l'application X_t étant continue pour tout t, et donc aussi le membre de gauche. Le théorème est donc démontré. ∎

COROLLAIRE. Soit $\mathcal{S}$ un sous-ensemble de Ω. Si $\mathcal{S}$ est souslinien, alors il existe un ordinal dénombrable α tel que $\forall\ \omega,\ \omega \in \mathcal{S} \Rightarrow j(\omega) \leq \alpha$ ($\mathcal{S}$ est dit borné pour j s'il vérifie cette condition).

Démonstration : Raisonnons par l'absurde.

Supposons $\mathcal{S}$ non borné pour j. On a alors :

$$\omega \in \Omega \Leftrightarrow \exists\ \omega',\ \omega' \in \mathcal{S} \quad \text{et} \quad j(\omega) \leq j(\omega') .$$

D'après le théorème 1, Ω est souslinien tandis que d'après le lemme 1, Ω n'est pas souslinien.

D'où une contradiction. ■

Montrons maintenant que j est une norme coanalytique.

THEOREME 2. j est une norme coanalytique, c'est-à-dire : les ensembles $\{(\omega,\omega') \in E^{\mathbb{Q}\cap[0,1]} \times E^{\mathbb{Q}\cap[0,1]} \mid j(\omega) \leq j(\omega')\}$ et $\{(\omega,\omega') \in E^{\mathbb{Q}\cap[0,1]} \times E^{\mathbb{Q}\cap[0,1]} \mid j(\omega) < j(\omega')$ ou $\omega' \notin \Omega\}$ sont analytiques.

Démonstration : L'ensemble $\{(\omega,\omega') \in E^{\mathbb{Q}\cap[0,1]} \times E^{\mathbb{Q}\cap[0,1]} \mid j(\omega) \leq j(\omega')\}$ est analytique d'après le théorème 1.

La condition $\omega' \notin \Omega$ ou $j(\omega) < j(\omega')$ est équivalente à :

$$\omega' \notin \Omega \quad \text{ou} \quad \exists\ n,\ \forall\ m,\ j^{\frac{1}{m}}(\omega) < j^{\frac{1}{n}}(\omega') . \tag{1}$$

Soit $E' = E \cup \{\infty\}$ l'espace obtenu à partir de E en ajoutant à E un point isolé ∞ tel que $d'(\infty,x) = 2$ pour tout x dans E, où d' est la distance obtenue à partir de d.

Soit φ l'application définie sur $E^{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ et à valeurs dans $E'^{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ par :

$$\varphi(\omega)(t) = \omega(2t) \quad \text{si} \quad t \in [0,\tfrac{1}{2}[$$

$$\varphi(\omega)(t) = \infty \quad \text{si} \quad t \in [\tfrac{1}{2},1] .$$

Il est clair que φ est continue.

Soit, pour tout ε strictement positif, j'^{ε} l'indice sur $E'^{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ défini de façon analogue à j^{ε}. On a alors :

$$j'^{\frac{1}{m}}(\varphi(\omega)) = j^{\frac{1}{m}}(\omega)+1 \quad \text{si} \quad \omega\in\Omega ,$$

pour tout m.

(1) est donc équivalent à :

$$\omega'\notin\Omega \quad \text{ou} \quad \exists\, n ,\ \forall\, m ,\ j'^{\frac{1}{m}}(\varphi(\omega)) \leq j^{\frac{1}{n}}(\omega') .$$

Si on considère $\omega'\in E'^{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$, alors (1) devient :

$$\omega'\notin\Omega \quad \text{ou} \quad \exists\, n ,\ \forall\, m ,\ j'^{\frac{1}{m}}(\varphi(\omega)) \leq j'^{\frac{1}{n}}(\omega') \quad \text{et} \quad \omega'\in E^{\mathbb{Q}\cap[0,1]} .$$

Il suffit donc de montrer que la condition :

$$\omega'\notin\Omega \quad \text{ou} \quad \exists\, n ,\ \forall\, m ,\ j'^{\frac{1}{m}}(\omega) \leq j'^{\frac{1}{n}}(\omega') ,$$

où ω et ω' sont dans $E'^{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$, est analytique, ce qui peut être fait en reprenant la démonstration du théorème 1.

Donc j est une norme coanalytique. ■

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. DELLACHERIE — Ensembles analytiques : théorèmes de séparation et applications. Séminaire de Probabilités IX, Université de Strasbourg, Lecture Notes in Math., Springer, vol. 465 (1973/74), p. 336-372.

[2] C. DELLACHERIE — Les dérivations en théorie descriptive des ensembles et le théorème de la borne. Séminaire de Probabilités XI, Université de Strasbourg, Lecture Notes in Math., Springer, vol. 581 (1976/77), p. 34-46.

[3] C. DELLACHERIE, P.A. MEYER — Ensembles analytiques et temps d'arrêt. Séminaire de Probabilités IX, Université de Strasbourg, Lecture Notes in Math., Springer, vol. 465, (1973/74), p. 373-389.

[4] S. MAZURKIEWICZ, W. SIERPINSKI — Contribution à la topologie des ensembles dénombrables. Fund. Math., t. 1-3 (1920/22), p. 17-27.

[5] J. SAINT-RAYMOND — Boréliens à coupes K_σ. Bulletin Société Mathématique de France, tome 104, Année 1976, Fasicule 4, p. 389-406.