Séminaire de probabilités (Strasbourg)

M. Garcia
P. Maillard
Y. Peltraut

Une martingale de saut multiplicatif donné

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 12 (1978), p. 51-52
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1978__12__51_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1977/78

UNE MARTINGALE DE SAUT MULTIPLICATIF DONNE

M. GARCIA, P. MAILLARD, Y. PELTRAUT

Considérons un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{F},P)$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)$ satisfaisant aux conditions habituelles. Dans [1], Meyer construit une martingale ayant un saut donné en un temps T totalement inaccessible. On va utiliser ce résultat pour construire une martingale de << saut multiplicatif >> donné.

THEOREME. <u>Soit</u> T <u>un temps d'arrêt totalement inaccessible</u>, <u>et soit</u> K <u>une constante strictement positive</u>. <u>Il existe alors une martingale</u> (M_t), <u>strictement positive</u>, <u>égale à</u> 1 <u>pour</u> t=0, <u>et dont la seule discontinuité est un saut en</u> T (sur $\{T<\infty\}$) <u>vérifiant</u>

$$\frac{M_T}{M_{T-}} = K \quad \underline{\text{p.s. sur}} \ \{T<\infty\} \ .$$

DEMONSTRATION. Nous désignons par A_t le processus croissant $I_{\{t\geq T\}}$, par $\tilde{A}_t$ son compensateur prévisible, qui est continu du fait que T est totalement inaccessible. Le processus $Z_t=A_t-\tilde{A}_t$ est une martingale uniformément intégrable, dont les trajectoires sont des fonctions à variation bornée nulles en 0. De plus, le potentiel engendré par (A_t) étant borné par 1, on a pour tout entier $p\geq 1$ (cf [1], chap. VII, n°59)

$$(1) \qquad E[\tilde{A}_\infty^p] \leq p!$$

et par conséquent

$$(2) \qquad E[\exp(c\tilde{A}_\infty)] \leq \frac{1}{1-c} < \infty \quad \text{si } 0\leq c<1$$

Considérons maintenant la martingale locale exponentielle $M=\mathcal{E}(\lambda Z)$, avec $\lambda\in\mathbb{R}$. Comme Z n'a pas de partie martingale locale continue, nous avons

$$M_t = e^{\lambda Z_t} \prod_{s\leq t} (1+\lambda\Delta Z_s)e^{-\lambda\Delta Z_s} = e^{-\lambda\tilde{A}_t}(1+\lambda I_{\{t\geq T\}})$$

car A est nul avant T , et Z a un seul saut, qui a lieu à l'instant T (sur $\{T<\infty\}$) et qui est égal à 1. On a

$$M_T/M_{T-} = 1+\lambda \quad \text{sur } \{T<\infty\} \ .$$

Pour obtenir l'énoncé, nous posons donc $\lambda=K-1$. Nous avons alors $\lambda>-1$, et la martingale locale M est strictement positive. Il est évident que M est bornée si $\lambda\geq 0$, i.e. si $K\geq 1$; pour $-1<\lambda<0$, i.e. $0<K<1$, on peut écrire que M est dominée par $\exp(|\lambda|\tilde{A}_\infty)$, qui appartient à L^1 (et même à tout L^p , $1 \leq p < \infty$) d'après (2), et M est donc une vraie martingale uniformément intégrable. Le théorème est établi.

Mais on peut encore faire la remarque suivante. Supposons T p.s. fini, et prenons $\lambda=-1$. La martingale locale positive M vaut alors

$$\exp(\tilde{A}_t) \text{ pour } t<T \quad , \quad 0 \text{ pour } t \geq T$$

en particulier, $M_\infty=0$ identiquement, de sorte que M ne peut être uniformément intégrable, et que $\exp(\tilde{A}_\infty)$ ne peut appartenir à L^1. Les inégalités (2) ne peuvent donc être améliorées. Dans un exemple concret, celui où T est le premier saut d'un processus de Poisson de paramètre 1, on a $\tilde{A}_t=t \wedge T$, et on peut constater que M_t est une vraie martingale pour $0 \leq t < \infty$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P.A. Meyer. Probabilités et Potentiel, Hermann (1966)

M. Garcia,
P. Maillard,
Y. Peltraut

Département de Mathématiques (E.R.A. du C.N.R.S.)
Faculté des Sciences
F-25030 BESANÇON-CEDEX.