CLAUDE DELLACHERIE

Sur l'existence de certains ess.inf et ess.sup de familles de processus mesurables

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 12 (1978), p. 512-514

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1978__12__512_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1976/77

SUR L'EXISTENCE DE CERTAINS ESS.INF ET ESS.SUP DE FAMILLES DE PROCESSUS MESURABLES

par C. Dellacherie

On se place sous les conditions habituelles. Si X et Y sont des processus mesurables, nous dirons que X est essentiellement majoré (resp essentiellement minoré) par Y si $\{X > Y\}$ (resp $\{Y > X\}$) est évanescent. Si $(X^i)_{i\in I}$ est une famille quelconque (non vide) de processus mesurables, nous dirons qu'un processus mesurable X est égal à $\text{ess.inf}_{i\in I} X^i$ si chaque X^i majore essentiellement X et si X majore essentiellement tout processus mesurable majoré essentiellement par chacun des X^i. On définit de même la notion de $\text{ess.sup}_{i\in I} X^i$.

Il est clair, qu'en général, une famille non dénombrable de processus mesurables n'admet ni ess.sup ni ess.inf : c'est déjà "largement" le cas lorsque Ω est réduit à un point ! Nous allons cependant démontrer l'existence de ess.inf dans certains cas particuliers (qui, bien entendu équivaut à l'existence de certains ess.sup)

THEOREME 1.- Soit $(X^i)_{i\in I}$ une famille non vide de processus mesurables vérifiant la condition suivante : pour tout $i\in I$ et tout $\omega\in\Omega$, la trajectoire $t\to X^i_t(\omega)$ est une fonction s.c.s. pour la topologie droite ou la topologie gauche. Alors, il existe une partie dénombrable J de I telle que $\inf_{j\in J} X^j = \text{ess.inf}_{i\in I} X^i$.

D/ a) Traitons d'abord le cas particulier où chaque X^i est l'indicatrice d'un ensemble H^i. Nous démontrons d'abord l'existence d'une partie dénombrable J' de I telle que $\inf_{j\in J'} \overline{H}^j = \text{ess.inf}_{i\in I} \overline{H}^i$, où $\overline{H}^i = \{(t,\omega) : t\in\overline{H}^i(\omega)\}$.[1] Pour ce faire, définissons, pour tout $r\in\mathbb{Q}_+$ et tout $i\in I$, une v.a. T^i_r en posant $T^i_r(\omega) = \inf\{t\geq r : t\in H^i(\omega)\}$. Pour i fixé, $\overline{H}$ est alors l'adhérence (coupe par coupe) de la réunion des graphes des T^i_r. Choisissons alors une partie dénombrable J' de I telle que, pour chaque r, on ait $\sup_{j\in J'} T^j_r = \text{ess.sup}_{i\in I} T^i_r$, où ici ess.sup est un ess.sup "ordinaire", pris relativement à la mesure de probabilité P. Il est alors clair que $\inf_{j\in J'} \overline{H}^j = \text{ess.inf}_{i\in I} \overline{H}^i$.

-----

1) $\overline{H}^i$ est mesurable d'après IV-89 du livre rose (i.e. la nouvelle édition de "Probabilités et Potentiels")

Appelons K ce fermé aléatoire mesurable. Maintenant, pour chaque i, $(\overline{H}^i - H^i)(\omega)$ est, pour tout ω, contenu dans l'ensemble des points isolés à droite ou à gauche de $\overline{H}^i(\omega)$, et donc $K - H^i$ est, à un ensemble évanescent près, contenu dans l'ensemble aléatoire L des points de K isolés à droite ou à gauche. Or L est la réunion d'une suite de graphes de v.a. (L_n) (cf IV-89 et n[os] suivants du livre rose). Désignons par ε_{L_n} la mesure sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ valant $E[Z_{L_n} . 1_{\{L_n < \infty\}}]$ sur le processus mesurable positif (Z_t), et par m la mesure bornée $\sum 2^{-n} \varepsilon_{L_n}$, et soit J'' une partie dénombrable de I telle que $\inf_{j\varepsilon J''} H^j = \text{ess.inf}_{i\varepsilon I} H^i$ où ess.inf est entendu par rapport à m. Il est alors facile de vérifier que, si $J = J' \cup J''$, alors $\inf_{j\varepsilon J} H^j = \text{ess.inf}_{i\varepsilon I} H^i$, au sens voulu.

b) Passons au cas général. Pour tout $r \varepsilon \mathbb{Q}$, posons $H^{i,r} = \{X^i \geq r\}$: chaque $H^{i,r}$ est un ensemble aléatoire mesurable dont les coupes sont fermées pour la topologie droite ou gauche. Soit alors J une partie dénombrable de I telle que, pour tout r, $\inf_{j\varepsilon J} H^{j,r} = \text{ess.inf}_{i\varepsilon I} H^{i,r}$. Il est alors clair que l'on a aussi $\inf_{j\varepsilon J} X^j = \text{ess.inf}_{i\varepsilon I} X^i$.

REMARQUES.- a) Le théorème est encore vrai si on suppose seulement les trajectoires des X^i s.c.s. pour la topologie de condensation simultanée à droite et à gauche (pour cette topologie, un point x est adhérent à une partie A de $\mathbb{R}$ si tout voisinage droit et tout voisinage gauche de x coupe A suivant un ensemble non dénombrable). Il suffit de remplacer, dans la démonstration, les temps d'entrée T_r^i par les temps de pénétration correspondant (cf IV-112 du livre rose).

b) Ce théorème entraine l'existence des enveloppes de Snell. Plus généralement, comme toute surmartingale forte est s.c.s. pour la topologie droite, il entraine l'existence de l'ess.inf de toute famille de surmartingales fortes, lequel est encore une surmartingale forte puisque l'ess.inf est atteint sur une partie dénombrable d'indices.

THEOREME 2.- <u>Soit</u> $(X^i)_{i\varepsilon I}$ <u>une famille non vide de processus mesurables vérifiant les conditions suivantes</u>

a) <u>pour tout</u> $i\varepsilon I$ <u>et tout</u> $\omega\varepsilon\Omega$, <u>la trajectoire</u> $t \to X_t^i(\omega)$ <u>est une fonction s.c.i. pour la topologie droite ou gauche</u>,

b) <u>pour toute partie dénombrable</u> J <u>de</u> I, <u>il existe</u> $i\varepsilon I$ <u>tel que</u> X^i <u>soit essentiellement majoré par</u> $\inf_{j\varepsilon J} X^j$.

<u>Alors il existe</u> $i_o \varepsilon I$ <u>tel que</u> $X^{i_o} = \text{ess.inf}_{i\varepsilon I} X^i$.

<u>D</u>/ Nous ne traiterons que le cas où chaque X^i est l'indicatrice d'un ensemble H^i, le cas général s'y ramenant facilement comme plus haut. On démontre d'abord l'existence d'un indice i'_o tel que $\overset{o}{H}{}^{i'_o} = \text{ess.inf}\ \overset{o}{H}{}^i$,

où $\overset{\circ}{H}{}^i = \{(t,\omega) : t\epsilon\overset{\circ}{H}{}^i(\omega)\}$. Pour cela, on définit, pour tout $r\epsilon\mathbb{Q}_+$ et tout $i\epsilon I$, une v.a. T_r^i en posant $T_r^i(\omega) = \inf\{t > r : t\not\in \overset{\circ}{H}{}^i\}$. Pour i fixé, $\overset{\circ}{H}{}^i$ est égal à la réunion des intervalles $]\!]r,T_r^i[\![$ (par convention, $\overset{\circ}{H}{}^i$ est contenu dans $]0,\infty[\times\Omega$). Si J' est alors une partie dénombrable de I telle que, pour tout r, on ait $\inf_{j\epsilon J'} T_r^i = \text{ess.inf}_{i\epsilon I} T_r^i$, il est clair qu'on peut prendre pour i' un indice i tel que l'ensemble H^i soit essentiellement contenu dans $\inf_{j\epsilon J'} H^j$. Ecrivons maintenant l'ouvert aléatoire mesurable $\overset{\circ}{H}{}^{i'}$ comme réunion de ses composantes connexes $]\!]U_n,V_n[\![$ (les U_n,V_n sont bien des v.a. ; il n'y a malheureusement pas de bonnes références pour çà, le livre rose, aux alentours de IV-89, ayant évité tout calcul de ce genre. Mais, çà fait partie du folklore, et c'est un bon exercice pour ceux qui ne seraient pas persuadés). Et désignons par m la mesure bornée $\sum 2^{-n}(\varepsilon_{U_n} + \varepsilon_{V_n})$ sur $\mathbb{R}_+\times\Omega$. Soit alors J" une partie dénombrable de I telle que $\inf_{j\epsilon J''} H^j = \text{ess.inf}_{i\epsilon I} H^i$ où l'ess.inf est pris par rapport à m , et soit i" un indice i tel que H^i soit essentiellement contenu dans $\inf_{j\epsilon J''} H^j$. Il est alors facile de vérifier que, si i_o est un indice i tel que H^i soit contenu essentiellement dans $H^{i'}$ et dans $H^{i''}$, alors $H^{i_o} = \text{ess.inf}_{i\epsilon I} H^i$.