SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

GABRIEL MOKOBODZKI

Ensembles à coupes dénombrables et capacités dominées par une mesure

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 12 (1978), p. 491-508

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1978__12__491_0>

UNIVERSITE DE STRASBOURG
SEMINAIRE DE PROBABILITES 1977/78

Ensembles à coupes dénombrables et capacités dominées par une mesure

par *Gabriel MOKOBODZKI*

Introduction et position du problème.

Soient X et Y deux espaces compacts métrisables, F un ensemble analytique de $X \times Y$, μ une mesure de Radon ≥ 0 sur Y. On désigne par P_X, P_Y respectivement les projections sur X et Y.

Si $\mu^{\star}$ désigne la mesure extérieure associée à μ, on définit une fonction d'ensemble $\mathscr{C} = \mathscr{C}_{\mu}$ sur X en posant

$$\mathscr{C}(A) = \mu^{\star}(P_Y(F \cap P_X^{-1}(A))$$

Pour tout $y \in Y$, on appelle coupe de F au-dessus de y parallèle à X, l'ensemble $C_y(F) = (\{y\} \times X) \cap F$. Les problèmes suivants ont été posés par Horowitz et m'ont été transmis par Dellacherie.

Problème 1. On suppose qu'il existe une mesure $\lambda \geq 0$ sur X telle que $\mathscr{C}$ soit dominée par λ, i.e. que, pour K compact de X, on ait $\mathscr{C}(K) = 0$ si $\lambda(K) = 0$. Peut-on affirmer que, pour μ-presque tout $y \in Y$, la coupe $C_y(F)$ est dénombrable ?

Problème 2. On suppose qu'il existe une mesure $\lambda \geq 0$ sur X telle que $\mathscr{C}$ soit absolument continue par rapport à λ, i.e. que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\alpha > 0$ tel que, pour K compact de X, on ait $\mathscr{C}(K) \leq \varepsilon$ si $\lambda(K) \leq \alpha$. Peut-on affirmer que, pour μ-presque tout $y \in Y$, la coupe $C_y(F)$ est finie ?

Le présent travail fournira une réponse positive à ces questions.
On trouvera, en appendice, des commentaires de Dellacherie sur l'histoire de ces problèmes, qui peuvent être lus dès maintenant.

Voici la forme sous laquelle nous allons attaquer ces problèmes. Désignons par $G(\mu,F)$ l'ensemble des mesures $\sigma \geqslant 0$ sur $X \times Y$, portées par F, dont la projection $P_Y(\sigma)$ sur Y est majorée par μ. Nous verrons bientôt que, pour tout compact A de X (et, plus généralement, pour toute partie analytique A de X), on a alors

$$\mathcal{C}(A) = \sup_{\sigma \in G(\mu,F)} \sigma(P_X^{-1}(A))$$

Par conséquent, $\mathcal{C}$ est dominée par λ si, pour tout $\sigma \in G(\mu,F)$, $P_X(\sigma)$ est absolument continue par rapport à λ, et $\mathcal{C}$ est absolument continue par rapport à λ ssi l'absolue continuité des $P_X(\sigma)$ est uniforme en σ.
On remarquera que, si F, analytique a toutes ses coupes parallèles à X dénombrables, alors, d'après un théorème de Lusin, il existe une suite (f_n) de fonctions boréliennes de Y dans X telle que F soit contenu dans la réunion des graphes des f_n. Dans ces conditions, il est facile de voir que, si on pose $\lambda = \sum 2^{-n} f_n(\mu)$, alor les $P_X(\sigma)$, pour $\sigma \in G(\mu,F)$, sont absolument continues par rapport à λ et que cette absolue continuité est uniforme si les coupes de F sont finies. On se propose donc, ici, d'étudier la réciproque.

Enfin, lorsque F est un <u>fermé</u> de $X \times Y$, la fonction d'ensemble $\mathcal{C}$ est une capacité de Choquet, alternée d'ordre infini, et la réponse positive au problème 1 permet de préciser le théorème de représentation des capacités alternées d'ordre infini (cf. [2]).

Ce travail est divisé en quatre parties. Après avoir rappelé ou montré des résultats de théorie de la mesure dans la première, nous résolvons un cas particulier du problème 1 dans la seconde et le cas général dans la troisième. Le problème 2 est résolu dans la dernière.

§ 1. Quelques résultats de la théorie de la mesure

Toutes les fonctions considérées sont réelles.

Soient X et Y des espaces compacts métrisables. On appelle bi-mesure sur $X \times Y$ une application bilinéaire b de $\mathcal{C}(X) \times \mathcal{C}(Y)$ qui est positive sur $\mathcal{C}^+(X) \times \mathcal{C}^+(Y)$.

Proposition 1.

Soit b *une bi-mesure sur* $X \times Y$. *Il existe une mesure de Radon* θ *et une seule sur* $X \times Y$ *telle que l'on ait* $\int h(x)\ f(y)\ d\theta(x,y) = b(h,f)$ *pour tout* $(h,g) \in \mathcal{C}(X) \times \mathcal{C}(Y)$.

Démonstration. L'unicité de θ résulte de la densité de $\mathcal{C}(X) \otimes \mathcal{C}(Y)$ dans $\mathcal{C}(X \times Y)$ muni de la convergence uniforme - cf. Bourbaki [4]. Considérons l'ensemble K des bi-mesures sur $X \times Y$ telles que $b(1,1) = 1$. En munissant K de la topologie de la convergence simple sur $\mathcal{C}(X) \times \mathcal{C}(Y)$, K devient un ensemble convexe compact.

On vérifie facilement que pour tout point extrémal b de K il existe un couple $(x,y) \in X \times Y$ et un seul tel que

$$b(h,f) = h(x)\ f(y) \qquad \text{pour tous} \quad (h,f) \in \mathcal{C}(X) \times \mathcal{C}(Y) .$$

Désignons par $\mathcal{E}(K)$ l'ensemble des points extrémaux de K. On a une application canonique $J : \mathcal{M}^1(X \times Y) \to K$ définie par

$$J(\mu)\ (h,f) = \int h(x)\ f(y)\ d\mu(x,y) .$$

L'application J est continue, affine et j est un homéomorphisme de $\mathcal{E}(\mathcal{M}^1(X \times Y))$ sur $\mathcal{E}(K)$.

D'après le théorème de représentation intégrale de Choquet [ ] tout point b de K est barycentre d'une mesure de probabilité μ_b portée par $\mathcal{E}(K)$, par suite J est une surjection de $\mathcal{M}^1(X \times Y)$ sur K, ce qui démontre le théorème. [l'idée de cette démonstration est due à Choquet]

Définition.

Soit θ *une mesure de Radon sur* $X \times Y$. *On appelle désintégration de* θ *relativement à la projection* P_Y *sur* Y, *une application* $\gamma : Y \to \mathcal{M}^1(X \times Y)$ *vérifiant les conditions suivantes :*

a) γ *est une application* ν*-mesurable de* Y *dans* $\mathcal{M}^1(X \times Y)$ *muni de la topologie vague, où* $\nu = P_Y(\theta)$

b) *pour toute* $f \in \mathcal{C}(X \times Y)$ *on a*

$$\int f\, d\theta = \int (f(x,y)\ d\theta_y(x))\, d\nu(y)$$

et si $f = g \circ P_Y$ *où* $g \in \mathcal{C}(Y)$, *on a*

$$g(y) = \int (g \circ P_Y(x,y) d\theta_y(x) \qquad \nu \textit{ presque partout sur } Y .$$

Comme $\mathcal{C}(Y)$ *est séparable, on en déduit que pour* μ*-presque tout* y, θ_y *est portée par* $\{y\} \times X$.

De même, si la mesure θ *est portée par un ensemble* E *analytique dans* $X \times Y$, *on a*

$$\int 1_{\complement E}\, d\theta = 0 = \int (\int 1_{\complement E}(x,y)\ d\theta_y(x))\, d\nu(y)$$

de sorte que pour ν*-presque tout* $y \in Y$, θ_y est portée par E.

(Pour toutes ces questions voir Bourbaki. Théorie de la mesure).

On se place maintenant sur X compact métrisable et $\mathcal{K}(X)$ désigne l'espace des compacts de X muni de la topologie de Haussdorf. La topologie de $\mathcal{K}(X)$ peut être définie de la façon suivante

Soit $f \in \mathcal{C}(X)$. Pour $K \in \mathcal{K}(X)$, on pose

$$\tilde{f}(K) = \sup_{x \in K} f(x) .$$

La topologie de Haussdorf sur $\mathcal{K}(X)$ est alors la moins fine rendant continue toutes les applications $\tilde{f}$, f parcourant $\mathscr{C}(X)$ ou f parcourant une partie dénombrable dense de $\mathscr{C}(X)$, puisque $\mathscr{C}(X)$ est séparable.

Soit Z un espace topologique. Une application $\varphi : Z \to \mathscr{K}(X)$ est <u>semi-continue inférieurement</u> (resp. supérieurement) si pour tout $f \in \mathscr{C}(X)$, $\tilde{f} \circ \varphi$ est semi-continue inférieurement (resp supérieurement). (Ces définitions coincident avec celles données habituellement pour les fonctions multivoques voir par exemple Berge [1]) .

<u>Lemme</u>

L'application $S : \alpha \to S\alpha$ *qui a une mesure* ≥ 0 *sur* X *fait correspondre son support , est semi-continue inférieurement de* $\mathcal{M}^1(X)$ *muni de la topologie vague dans* $\mathscr{K}(X)$ *muni de la topologie de Haussdorf.*

La démonstration est laissée au lecteur.

<u>Lemme</u>

Soit Z *un espace compact,* φ *une application semi-continue supérieurement de* Z *dans* $\mathscr{K}(X)$. *L'ensemble* $\bar{\varphi}(Z) = \bigcup_{z \in Z} \varphi(z)$ *est alors compact dans* **X** .

<u>Définition</u>.

Nous dirons qu'une mesure $\theta \in \mathcal{M}^+(X \times Y)$ *possède une désintégration régulière (relativement à* P_Y) *s'il existe une désintégration* $\gamma : y \longmapsto \theta_y$ *possédant les propriétés suivantes*

a) *Si* $Z = P_Y(S\,\theta)$ *alors* $\gamma_{|Z}$ *est continue de* Z *dans* $\mathcal{M}^1(X \times Y)$.

b) *pour tout* $y \in Z$, $S\,\theta_y$ *est portée par* $S\,\theta \cap (\{y\} \times X)$

c) *l'application* $y \longmapsto S\theta_y$ *est continue de* Z *dans* $\mathscr{K}(X \times Y)$ *et* $\gamma(Z) = \bigcup_{z \in Z} S\theta_y = S\theta$

Si θ *possède une désintégration régulière, celle-ci est définie de façon unique sur* $Z = P_Y(S\theta)$.

Théorème 2.

Soit X , Y *des espaces compacts métrisables,* θ *une mesure* $\geqslant 0$ *sur* $X \times Y$. *La mesure* θ *est somme d'une suite* $(\theta_n) \subset \mathcal{M}^+(X \times Y)$, *chaque* θ_n *possédant une désintégration régulière par rapport à la projection sur* Y .

Démonstration. Soit $\gamma : y \mapsto \theta_y$ une désintégration de θ vérifiant la condition b) de la définition ci-dessus. En utilisant la propriété de mesurabilité au sens de Lusin pour les applications $\gamma : y \mapsto \theta_y$ et $y \mapsto S(\theta_y)$, on peut trouver une suite (H_n) de compacts deux à deux disjoints de $Z = S\nu$ où $\nu = P_Y(\theta)$ telle que sur chaque H_n les applications $y \mapsto \theta_y$ et $y \mapsto S(\theta_y)$ soient continues avec $\nu(\bigcup_n H_n) = \nu(Y)$

Les mesures $\theta_n = \int_{H_n} \theta_y \, d\nu(y)$ répondent aux conditions cherchées.

(utiliser les lemmes 2 et 3).

Les mesures possédant une désintégration régulière jouissent d'une importante propriété de densité.

Soient $\theta \in \mathcal{M}^+(X \times Y)$, $\mu = P_Y(\theta)$, $E = S_\theta$

On définit $G(\mu,E) = \{\sigma \in \mathcal{M}^+(E) \,|\, P_Y(\sigma) \leqslant \mu\}$.

$$B(\theta,\mu,E) = \{g.\theta \mid g \in L^1_+(\theta) \ , \ g.\theta \in G(\mu,E)\}$$

Proposition 3.

Si θ *possède une désintégration régulière par rapport à la projection sur* Y, *alors* $B(\theta,\mu,E)$ *est dense dans* $G(\mu,E)$ *pour la topologie vague.*

Démonstration. Soit σ un élément extrémal de $G(\mu,E)$. Il existe alors (voir [3]) une application mesurable f de $P_Y(S\sigma)$ dans E qui est une section de P_Y , et une mesure $\mu' \leqslant \mu$, $\mu' \geqslant 0$ telles que $\sigma = f(\mu')$. Là encore on peut se ramener au cas où l'application f est continue, c'est-à-dire quand σ possède une désintégration régulière. Posons $Z = P_Y(S_\sigma)$. Soit d une distance sur $X \times Y$ compatible avec la topologie de $X \times Y$. Pour tout $\varepsilon > 0$, considérons le "voisinage tubulaire" du graphe de f :

$$V_\varepsilon = \bigcup_{y \in Z} B_\varepsilon(f(y)) \cap C_Y \qquad \text{où} \qquad B_\varepsilon(\cdot)$$

désigne la boule fermée de rayon ε centrée en un point. On remarque que $\theta_Y(B_\varepsilon(f(y))$ est strictement positif pour tout $y \in Z$, puisque $f(y) \in S\theta_Y$.

Posons
$$\theta^\varepsilon_Y = \theta_Y(B_\varepsilon(f(y))^{-1}.\theta_{Y|B_\varepsilon(f(y))}$$

et
$$\theta^\varepsilon = \int \theta^\varepsilon_Y \, d\mu'(y)$$

La mesure θ^ε est évidemment portée par V_ε qui est fermé dans $Z \times X$, $P_Y(\theta^\varepsilon) = P_Y(\sigma) = \mu'$ et comme f est continue sur Z, $\sigma = f(\mu') = \lim \theta^\varepsilon$

L'ensemble des éléments extrémaux de $G(\mu,E)$ possédant une désintégration régulière est dense dans l'ensemble des points extrémaux de $G(\mu,E)$ par suite on a bien

$$G(\mu,E) = \overline{B(\theta,\mu,E)} \quad .$$

Soient maintenant σ une mesure $\geqslant 0$ sur $X \times Y$, $y \longmapsto \theta_Y$ une désintégration de σ par rapport à la projection sur Y, et $\nu = P_Y(\sigma)$.

<u>Définition.</u>

On dira que σ *est à coupes diffuses si pour* ν*-presque tout* y, *la mesure* θ_Y *est diffuse. Cette notion ne dépend pas de la désintégration* $y \longmapsto \theta_Y$ *considérée.*

Les propositions et corollaire suivants sont extraits de Probabilité et potentiel, Nouvelle édition, par P.A. Meyer et C. Dellacherie.

Proposition 4.

Soient μ *une mesure sur* Y , F *un ensemble analytique de* $X \times Y$ *dont la projection* $P_Y(F)$ *porte* μ . *Si l'ensemble* $B = \{y \in Y \mid C_y(F)$ *non dénombrable}* *n'est pas* μ*-négligeable, il existe une mesure non nulle* $\sigma \in G(\mu,F)$ *à coupes diffuses, telle que* $P_Y(\sigma) \leqslant \mu$

Démonstration. Il revient au même de dire qu'un ensemble analytique B de X est non dénombrable ou de dire qu'il porte une mesure diffuse non nulle.

Soit Z un compact métrisable.

L'ensemble $D^1(Z) \subset \mathcal{M}^1(Z)$ des mesures diffuses sur Z est borélien dans $\mathcal{M}^1(Z)$ muni de la topologie vague

Dans $Y \times \mathcal{M}^1(X)$ considérons l'ensemble $D(F)$ des couples (y,α) tels que α est diffuse et α est portée par $C_y(F)$. On vérifie sans peine que $D(F)$ est analytique dans $Y \times \mathcal{M}^1(Y)$; l'hypothèse faite dans la proposition signifie que l'ensemble analytique $P_Y(D(F))$ n'est pas μ-négligeable.

Sur $Y \times \mathcal{M}^1(X)$, considérons la capacité U définie par $U(A) = \mu^*(P_Y(A))$. L'ensemble $D(F)$ est capacitable, il existe donc une suite (K_n) de compacts de $D(F)$ telle que $P_Y(\bigcup_n K_n)$ soit de μ-mesure positive.

Posons $H = \bigcup_n P_Y(K_n)$. Il existe alors une section borélienne γ de P_Y définie sur H et à valeurs dans $\bigcup_n K_n$.

En résumé, il existe un borélien $H \subset Y$, avec $\mu(H) > 0$, une application borélienne $\gamma : y \to \alpha_y$ de Y dans $\mathcal{M}^1(X)$ telle que pour tout $y \in H$, α_y est une mesure diffuse portée par $C_y(F)$.

La mesure $\sigma = \int_H \varepsilon_y \otimes \alpha_y \, d\mu(y)$ répond aux conditions cherchées.

Corollaire 5.

Soit F *un ensemble analytique dans* $X \times Y$.

a) L'ensemble $B(F) = \{y \in Y \mid C_Y(F)$ *est non dénombrable}* *est analytique*

b) pour que $B(F)$ *soit* μ*-négligeable, il faut et il suffit que pour tout compact* $K \subset F$, $B(K)$ *soit* μ*-négligeable.*

Démonstration. Pour la partie a) se rapporter à la démonstration précédente.

Démontrons b) Supposons que $\mu(B(F)) > 0$. Il existe alors une mesure non nulle σ à coupes diffuses, $\sigma \in G(\mu,F)$. Soit K un compact de F tel que $\sigma(K) > 0$. La mesure $\sigma_{|K}$ est encore à coupes diffuses, par suite $\mu(B(K)) > 0$.

Nous terminons cette première partie en fixant notre cadre pour toute la suite. X et Y sont des espaces compacts métrisables, F une partie analytique de $X \times Y$, et μ une mesure $\geqslant 0$ sur Y telle que $\mu(1) = 1$ (pour fixer les idées). Si ν est une mesure $\geqslant 0$ sur Y , et si E est une partie analytique de $X \times Y$, nous désignerons par $G(\nu,E)$ l'ensemble des mesures $\sigma \geqslant 0$ sur $X \times Y$, portées par E , dont la projection $P_Y(\sigma)$ est majorée par ν . On définit enfin une fonction d'ensemble $\mathcal{C}$ sur X en posant, pour toute partie A de $X \times Y$,

$$\mathcal{C}(A) = \mu^{\star}(P_Y(F \cap P_X^{-1}(A)))$$

Proposition 6.

Pour toute partie analytique A *de* X , *on a*

$$\mathcal{C}(A) = \sup_{\sigma \in G(\mu,F)} \sigma(P_X^{-1}(A))$$

Démonstration. Soient $\sigma \in G(\mu,F)$ et θ une désintégration de σ par rapport à P_Y. On a alors, pour A analytique dans X,

$$\sigma(P_X^{-1}(A)) \leqslant \int_{F \cap P_X^{-1}(A)} d\theta_y(x)\ d\mu(x) \leqslant \mathscr{C}(A)$$

Soient d'autre part A analytique dans X et g une application μ-mesurable de Y dans X telle que, pour tout $y \in P_Y(F \cap P_X^{-1}(A))$, on ait $(g(y),y) \in F \cap P_X^{-1}(A)$ (cf. [3]). Si σ est la restriction à $F \cap P_X^{-1}(A)$ de l'image de μ par l'application $y \mapsto (g(y),y)$, on a alors $\sigma \in G(\mu,F)$ et $\mathscr{C}(A) = \sigma(P_X^{-1}(A))$.

Finalemant, on suppose que $\mathscr{C}$ est dominée par une mesure, i.e. que : Il existe une mesure $\lambda \geqslant 0$ sur X telle que pour toute $\sigma \in G(\mu,F)$, $P_X(\sigma)$ soit absolument continue par rapport à λ.

§ 2. Solution du problème dans un cas particulier

On fait dans ce paragraphe, l'hypothèse plus forte suivante

(H_1) Il existe une mesure $\lambda \geqslant 0$ sur X telle que pour toute

$$\sigma \in G(\mu,F) \quad , \quad P_X(\sigma) \leqslant \lambda$$

On supposera de plus que F est un ensemble fermé.

Théorème 7.

Il existe une mesure θ sur $X \times Y$ qui majore toutes les mesures $\sigma \in G(\mu,F)$.

Démonstration. On définit un opérateur de $\mathscr{C}^+(Y)$ dans $\mathcal{M}^+(X)$ en posant $T(f) = \sup\{P_X(\sigma) \mid \sigma \in G(f.\mu,F)\}$

Cet opérateur est positivement homogène et vérifie

$$T(f_1 + f_2) \leqslant T(f_1) + T(f_2) \quad \text{pour tous } f_1 , f_2 \in \mathscr{C}^+(Y) .$$

Montrons que T est en fait additif.

Soient $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p \in G(f_1.\mu, F)$, $\eta_1, \ldots, \eta_q \in G(f_2.\mu, F)$.

Posons $\alpha_i = P_X(\sigma_i)$, $\beta_j = P_X(\eta_j)$. Comme dans tout espace vectoriel réticulé, on a l'identité,

$\sup_i(\alpha_i) + \sup_\gamma(\beta_\gamma) = \sup_{i,\gamma} (\alpha_i + \beta_\gamma)$, ce qui montre que

$$T(f_1) + T(f_2) \leqslant T(f_1+f_2)$$

On prolonge alors l'opérateur T par linéarité à $\mathcal{C}(Y)$ tout entier.

A l'aide de T , on définit naturellement une bi-mesure b sur $\mathcal{C}(Y) \times \mathcal{C}(X)$ en posant pour $f \in \mathcal{C}(Y)$, $g \in \mathcal{C}(X)$

$$b(f,g) = < T(f), g > .$$

On sait qu'il existe alors une mesure $\theta \geqslant 0$ sur $X \times Y$ et une seule telle que

$$b(f,g) = \int f(y) g(x) \, d\theta(x,y) \quad \text{pour} \quad (f,g) \in \mathcal{C}(X) \times \mathcal{C}(Y) .$$

On a toujours $T(1) \leqslant \lambda$ et si $\nu = P_Y(\theta)$, ν est absolument continue par rapport à μ .

<u>Corollaire</u>.8.

Soit f *une densité de* $\nu = P_Y(\theta)$ *par rapport à* μ *et soit* n *un entier majorant* $\lambda(1)$. *Alors pour* μ-*presque tout* $y \in Y$,
card $(C_y(F)) \leqslant n.f(y)$.

<u>Démonstration</u>. Considérons une désintégration de θ par rapport à la projection sur Y $\theta = \int \theta_y \, d\nu(y)$ telle que pour tout $y \in P_Y(F)$, θ_y soit portée par $C_y(F)$.

Pour tout $p \in N$, l'ensemble E_p des compacts de X ayant au plus p points est une partie fermée de l'espace $\mathcal{K}(X)$ des compacts de X .

L'application $y \longmapsto P_X[C_y(F)]$ est borélienne de Y dans $\mathcal{K}(X)$. Il en résulte que pour tout $p \in N$,

$$Y_p = \{y \mid \text{card}\, C_y(F) \geqslant p+1\} \text{ est analytique dans } Y .$$

Plaçons-nous dans un compact $K \subset Y$ tel que $nf(y) \leqslant p$ pour tout $y \in K$, avec $\mu(K) > 0$.

On a alors

$$\theta' = \theta_{|P_Y^{-1}(K)} \in p.\ G(\mu,F)$$

Supposons que $\mu(Y_p \cap K) > 0$. On peut alors trouver un ensemble borélien $Z \subset K$, portant $\mu_{|Y_p \cap K}$ et $(p+1)$ applications boréliennes $f_1, \dots, f_{p+1}$ de Z dans F qui soient des sections de P_Y qui donnent des images de Z deux à deux disjointes dans F.

Par hypothèse $\theta_y(1) = 1$, pour tout $y \in Z$, il existe au moins un indice $k \leqslant p+1$ tel que $\theta_y(\{f_k(y)\}) \leqslant \frac{1}{p+1}$. Les applications $\gamma_k : y \longmapsto \theta_y(\{f_k(y)\})$ sont μ-mesurables, il en résulte, si $\mu(Y_p \cap K) > 0$, que l'un au moins des ensembles $A_k = \{\gamma_k \leqslant \frac{1}{p+1}\}$ est de μ-mesure positive. Supposons que $\mu(A_1) > 0$ et posons $\sigma = f_1(\mu_{|A_1})$. Par construction $\sigma \in G(\mu,F)$, on doit donc avoir $\sigma \leqslant \theta$. Considérons la mesure $\theta' = \int \theta_y \; d\mu(y)$. Comme on a $n.f \leqslant p$ sur K, on a $\theta_{|P_Y^{-1}(K)} \leqslant p\theta'$, d'où l'on tire $\sigma \leqslant p.\theta'$.

La relation $\sigma \leqslant p\theta'$ équivaut alors à

$$\varepsilon_{f_1(y)} \leqslant p\ \theta_y \qquad \mu \text{ presque partout sur } A_1 ,$$

c'est-à-dire $\theta_y(\{f_1(y)\}) \geqslant \frac{1}{p}$ μ.p.p sur A_1 en contradiction avec l'hypothèse faite sur A_1. On doit donc supposer que $\mu(Y_p \cap K) = 0$, autrement dit $\mathrm{card}(C_y(F)) \leqslant p$ μ.p.p sur K. En faisant varier p et K on obtient la démonstration du théorème.

§ 3. Solution du problème dans le cas général.

On suppose que $F \subset X \times Y$ est fermé et que $\mathcal{C}$ est dominée par λ. On ne fait plus l'hypothèse (H_1), mais on va montrer que toute mesure $\sigma \in G(\mu,F)$ est portée par la réunion d'une suite (K_n) de compacts de F

telle que pour chaque K_n , le système (X,Y,μ,K_n) vérifie l'hypothèse (H_1). Il s'ensuit que $G(\mu,F)$ ne contient aucune mesure à coupes diffuses et en vertu du théorème de section n° 4 , § 1 , ceci implique que μ-presque toute coupe $Cy(F)$ est dénombrable.

Pour une mesure de Radon $\theta \in \mathcal{M}^+(X \times Y)$ on a défini un ensemble de mesures $B(\theta,\nu,E)$ où $\nu = P_Y(\theta)$ $E = S_\theta$ en posant

$$B(\theta,\nu,E) = \{g.\theta \mid g \in L^1(\theta),\ g.\theta \in G(\nu,E)\}$$

Pour une mesure $\theta \in \mathcal{M}^+(X \times Y)$, nous définissons une nouvelle condition

(H_2) Il existe une mesure $\alpha \geqslant 0$ sur X tel que pour toute $\sigma \in B(\theta,\nu,E)$, $P_X(\sigma) \leqslant \alpha$.

<u>Théorème</u> 9.

Soit $\sigma \in G(\mu,F)$, $\sigma \neq 0$. *La mesure* σ *est alors somme d'une suite de mesure* σ_n *vérifiant la condition* (H_2).

<u>Démonstration</u>. Il revient au même de démontrer que pour toute $\sigma \in G(\mu,F)$, $\sigma \neq 0$, il existe $\sigma' \neq 0$ vérifiant (H_2) avec $0 \leqslant \sigma' \leqslant \sigma$. Un artifice classique permet alors de démontrer le théorème.

Supposons pour simplifier que $P_Y(\sigma) = \mu$ et que $\mu(1) = 1$. Fixons un entier $p \in N$. Soit $\sigma' \leqslant \sigma$, $\sigma' \neq 0$. Si σ' ne vérifie pas (H_2) , il existe un compact $K \subset X$, avec $\lambda(K) > 0$ et une mesure $\sigma'' \in B(\sigma',P_Y(\sigma') , S\sigma')$ telle que $P_X(\sigma'') \geqslant p.\lambda_{|K}$. La mesure $P_X(\sigma'')$ étant absolument continue par rapport à λ ceci implique d'ailleurs $\lambda(K) \neq 0$.

Notons plus simplement $B(\sigma')$ au lieu de $B(\sigma',P_Y(\sigma') , S\sigma')$. Faisons provisoirement l'hypothèse qu'aucune mesure $\sigma' \neq 0$, $\sigma' \in B(\sigma)$, ne vérifie (H_2).

Considérons alors des familles $= ((\sigma_i,K_i))_{i \in I}$ où $\sigma_i \in B(\sigma)$ $\sigma_i \neq 0$, K_i est un compact de X portant $P_X(\sigma_i)$ et

a) $K_i \cap K_j = \emptyset$ si $i \neq j$.

b) $P_X(\sigma_i) \geqslant p.\lambda_{|K_i}$

c) $\sum P_Y(\sigma_i) \leqslant \mu$.

L'ensemble $\mathcal{C}$ de ces familles n'est pas vide. Ordonnons $\mathcal{C}$ de la façon suivante :

si $\mathcal{P} = ((\sigma_i, K_i))_{i \in I}$, $\mathcal{P}' = ((\sigma'_j , K'_j))_{j \in J}$ sont des éléments de $\mathcal{C}$, on dira que $\mathcal{P}$ est plus grand que $\mathcal{P}'$ s'il existe une application injective φ de J dans I telle que $K_{\varphi(j)} = K'_j$ et $\sigma_{\varphi(j)} \geqslant \sigma'_j$

L'ensemble $\mathcal{C}$ ainsi ordonné est inductif. Pour tout élément de $\mathcal{C}$, et en particulier tout élément maximal $\mathcal{P} = (\sigma_n, K_n))_{n \in I}$ de $\mathcal{C}$, l'ensemble d'indices I est au plus dénombrable.

Montrons que $\mu = \sum P_Y(\sigma_n)$. Posons $\nu = \mu - \sum P_Y(\sigma_n)$

La mesure ν s'écrit $\nu = g.\mu$ avec $0 \leqslant g \leqslant 1$. Posons $\theta = (g \circ P_Y).\sigma$.

La famille $\mathcal{P}$ étant maximale $P_X(\theta)$ est portée par $A = \bigcup_n K_n$. Soit θ_n la restriction de θ à $K_n \times Y$ et posons $\sigma'_n = \sigma_n + \theta_n$.

La famille $\mathcal{P}' = ((\sigma'_n , K_n))_{n \in I}$ majore $\mathcal{P}$, donc lui est égale, par suite $\theta = 0$ et $\mu = \sum P_Y(\sigma_n)$.

Montrons alors que $\lambda(\bigcup_n K_n) \leqslant \frac{1}{p}$.

En effet soit $\sigma' = \sum \sigma_n$; par hypothèse $P_X(\sigma_n) \geqslant p.\lambda_{|K_n}$ pour tout n , par suite pour $A = \bigcup_n K_n$, $P_X(\sigma') \geqslant p.\lambda_{|A}$ et comme $\sigma'(1) = \mu(1) = 1$ on a bien $\lambda(A) \leqslant \frac{1}{p}$. Pour q assez grand , $\sum_{n \leqslant q} \sigma_n(1) \geqslant \sigma(1) - \frac{1}{p}$.

Nous avons ainsi démontré le lemme suivant :

<u>Lemme</u> 10. *Soit* $\sigma \in G(\mu,F)$, $\sigma \neq 0$. *Si toute* $\sigma' \in B(\sigma)$, $\sigma' \neq 0$ *ne vérifie pas* (H_2) *alors il existe un compact* $K \subset X$, *il existe* $\sigma' \in B(\sigma)$ *tels que* $\sigma'(1) \geqslant \sigma(1) - \frac{1}{p}$, σ' *est portée par* $K \times Y$ *et* $\lambda(K) \leqslant \frac{1}{p}$.

Sous les hypothèses du lemme ci-dessus, nous pourrions alors construire par récurrence une suite $((\sigma_n,K_n))$ telle que

a) $\sigma_n \in B(\sigma)$, K_n est un compact de X portant $P_X(\sigma_n)$

b) $\sigma_n(1) > \frac{1}{2}$ et $\lambda(K_n) \leqslant 4^{-n}$

c) $K_{n+1} \subset K_n$ pour tout n .

Rappelons que pour la capacité $\mathscr{C}$ associée au schéma (X,Y,F,μ), on a pour un compact K de X

$$\mathscr{C}(K) = \sup_{\sigma \in G(\mu,F)} \sigma(P_X^{-1}(K))$$

En particulier, on a $\mathscr{C}(K_n) \geqslant \frac{1}{2}$ pour tout n . Prenons alors $K = \bigcap_n K_n$; on aurait $\lambda(K) = 0$ et $\mathscr{C}(K) \geqslant \frac{1}{2}$ ce qui est en contradiction avec les hypothèses faites. On doit donc en conclure que pour toute $\sigma \in G(\mu,F)$, $\sigma \neq 0$, il existe $\sigma' \neq 0$, $0 \leqslant \sigma' \leqslant \sigma$, vérifiant (H_2) ce qui démontre le théorème.

<u>Proposition</u> 11.

Soient $\sigma \in \mathcal{M}^+(X \times Y)$, $\nu = P_Y(\sigma)$, $E = S\sigma$. *Si la mesure* σ *vérifie la condition* (H_2) *et si* σ *possède une désintégration régulière alors le système* (X,Y,E,ν) *vérifie l'hypothèse* (H_1).

<u>Démonstration</u>. Lorsque σ possède une désintégration régulière, l'ensemble $B(\sigma,\mu,E) = \{g.\sigma | g \in L^1 + (\sigma) \ , \ g.\sigma \in G(\nu,E)\}$ est dense dans $G(\nu,E)$.

Sous l'hypothèse (H_2) , il existe une mesure $\alpha \geqslant 0$ sur X qui majore toutes les projections sur X d'éléments de $B(\sigma,\mu,E)$, par suite α majore $P_X(G(\nu,E))$.

En rapprochant les théorèmes 2 , § 1 , le corollaire 8 , § 2 , le théorème 9 et la proposition 11 , ci-dessus, on peut énoncer le

Théorème 12. *Soit* $\sigma \in G(\mu,F)$. *Il existe une suite* (F_n) *de compacts de* F *, dont la réunion porte* σ *, et telle que pour tout* n *,* $\sup\limits_{y \in Y} \operatorname{card} C_y(F_n)$ *est fini.*

En tenant compte de la proposition 4 et du corollaire 5 , § 1 , on en déduit le corollaire suivant :

Corollaire 13. *Soit* F *un ensemble analytique dans* $X \times Y$ *telle que la fonction d'ensemble* $\mathscr{C}$ *sur* X *associée au système* (X,Y,F,μ) *par la relation* $\mathscr{C}(A) = \mu^\star(P_Y(P_X^{-1}(A) \cap F))$ *soit dominée par une mesure* λ *sur* X. *Alors pour* μ*-presque tout* $y \in Y$ *, la coupe* $C_y(F)$ *est dénombrable.*

§ 4. Solution du $2^{\text{ème}}$ problème d'Horowitz.

Soit F une partie analytique de $X \times Y$; on suppose maintenant que le système (X,Y,F,μ,λ) vérifie la condition

(H_3) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que , pour A compact de X , $(\lambda(A) < \alpha) \Rightarrow (\mathscr{C}(A) < \varepsilon)$.

Proposition 14.

Lorsque la condition (H_3) *est vérifiée, alors pour* μ*-presque tout* $y \in Y$ *, la coupe* $C_y(F)$ *est finie.*

Démonstration. La méthode consiste à utiliser le théorème 7 , § 2 . Pour cela, on va montrer que ma mesure μ est somme d'une suite (μ_n), chaque μ_n vérifiant l'hypothèse (H_1) : Il existe une mesure $\lambda_n \geq 0$ sur X telle que pour tout $\sigma \in G(\mu_n,F)$, on ait $P_X(\sigma) \leq \lambda_n$.
On reprend la méthode utilisée dans la démonstration du théorème 9, § 3 .
On suppose que $\mu(1) = 1$ et l'on se donne $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < 1$, et un entier p

tel que pour A compact de X ,

$$(\lambda(A) \leqslant \frac{1}{p}) \Rightarrow (\mathscr{C}(A) \leqslant \varepsilon)$$

Considérons les familles $\mathscr{P} = (\sigma_i, K_i)_{i \in I}$ où $\sigma_i \in G(\mu,F)$. K_i est un compact de X portant $P_X(\sigma_i)$ et

a) les K_i sont disjoints

b) $P_X(\sigma_i) \geqslant p.\lambda|_{K_i}$ et $\sigma_i \neq 0$

c) $\sum_{i \in I} P_Y(\sigma_i) \leqslant \mu$

Pour une telle famille $\mathscr{P}$, l'ensemble d'indices I est dénombrable. Deux cas peuvent se présenter. Ou bien l'ensemble $\mathscr{E}$ des familles $\mathscr{P}$ vérifiant les conditions ci-dessus est vide et alors le système (μ,F) vérifie (H_1) ou bien $\mathscr{E}$ n'est pas vide. Dans ce dernier cas, on ordonne $\mathscr{E}$ de la façon suivante :

si $\mathscr{P} = (\sigma_i, K_i)_{i \in I}$ et $\mathscr{R} = (\sigma'_j, K'_j)_{j \in J}$ sont des éléments de $\mathscr{E}$ on dira que $\mathscr{P}$ est plus grande que $\mathscr{R}$ s'il existe une application injective φ de J dans I telle que

$$K_{\varphi(j)} = K'_j \quad \text{et} \quad \sigma_{\varphi(j)} \geqslant \sigma'_j$$

L'ensemble $\mathscr{E}$ ainsi ordonné est inductif. Soit $\mathscr{P} = (\sigma_n, K_n)_{n \in N}$ un élément maximal de $\mathscr{E}$. Posons $\mu' = \sum_n P_Y(\sigma_n)$; on vérifie facilement que $\inf(\mu-\mu',\mu') = 0$.

Posons $\mu'' = \mu - \mu'$; pour tout $\sigma \in G(\mu'',F)$ on a $P_X(\sigma) \leqslant 2p.\lambda$ puisque $\mathscr{P}$ est maximal. Montrons que l'on a toujours $\mu'' \neq 0$.

Posons $A_n = \bigcup_{r \leqslant n} K_r$. On a les inégalités

$$\lambda(A_n) \leqslant \sum_r \lambda(K_r) \leqslant \frac{1}{p} \sum_r \sigma_r(1) = \frac{1}{p} \mu'(1) \leqslant \frac{1}{p}$$

Ceci entraîne que $\mathscr{C}(A_n) < \varepsilon$ pour tout n . D'autre part on a toujours

$\sum_{r \leqslant n} \sigma_r(1) \leqslant \mathscr{C}(A_n) \leqslant \varepsilon$ et par suite $\mu'(1) \leqslant \varepsilon$, $\mu''(1) \geqslant 1-\varepsilon$.

En résumé, on a démontré le lemme suivant :

<u>Lemme</u>. *Soit* $\mu \in \mathcal{M}^+(Y)$, $\mu \neq 0$, *tel que* (μ,F,λ) *vérifie l'hypothèse* (H_3). *Il existe alors* $\mu' \neq 0$, $0 \leqslant \mu' \leqslant \mu$ *tel que* (μ',F) *vérifie* (H_1).

Il résulte classiquement de ce lemme que $\mu = \sum \mu_n$, avec pour tout n , (μ_n,F) vérifiant (H_1).

Il nous faut maintenant adapter le corollaire 8 , § 2 au cas où F est analytique pour pouvoir terminer la démonstration. Il suffit pour cela de montrer que pour tout p , l'ensemble

$Y_p = \{y \in Y \mid \text{card}.C_y(F) \geqslant p\}$ est analytique dans Y .

Posons $Z = X \times Y$; l'ensemble F^p est analytique dans Z^p . Considérons dans Z^p l'ensemble G_p de p-uplets $z = (z_1, \dots, z_p)$ tels que $z_i \neq z_j$ si $i \neq j$. L'ensemble G_p est ouvert dans Z^p .

Désignons par φ l'application $\prod_{i=1}^{p} P_Y : Z^p \to Y^p$ et soient Δ la diagonale de Y^p , et J l'injection canonique de Δ dans Y .

On a alors $Y_p = J(\varphi(G_p \cap F^p) \cap \Delta)$ ce qui montre bien que Y_p est analytique.

<u>Bibliographie.</u>

[1] <u>BERGE C.</u> *Espaces topologiques* (*Dunod, Paris*).

[2] <u>CHOQUET G.</u> *Theory of capacities* (*Ann. Inst. Fourier Grenoble 5, 1955*).

[3] <u>DELLACHERIE C.</u> *Ensembles analytiques.Capacités.Mesures de Haussdorf. Lectures Notes in Maths n°295 Springer-Verlag.*

[4] <u>BOURBAKI</u> *Intégration.*

E.R.A. au C.N.R.S. n°294
Université P. et M.Curie
4 Place Jussieu
75005 - PARIS