MARIE ANNE MAINGUENEAU

Temps d'arrêt optimaux et théorie générale

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 12 (1978), p. 457-467
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1978__12__457_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1976/77

TEMPS D'ARRET OPTIMAUX ET THEORIE GENERALE

par M.A. Maingueneau

Introduction

L'objet de cet exposé est l'étude des temps d'arrêt optimaux dans le cadre de la théorie générale des processus. Le problème est classique. Il se formule de la manière suivante : on définit sur un espace de probabilité $(\Omega,\underline{\underline{F}},(\underline{\underline{F}}_t)_{t\in\mathbb{R}_+},P)$ satisfaisant aux conditions habituelles un processus de gain $(Y_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ optionnel. On cherche à maximiser $E[Y_T]$ lorsque T décrit la classe $\underline{\underline{T}}$ de tous les temps d'arrêt. Un temps d'arrêt T^* vérifiant $E[Y_{T^*}] = \sup_{T\in\underline{\underline{T}}} E[Y_T]$ est dit <u>optimal</u>.

L'outil essentiel est l'<u>enveloppe de Snell</u> $(Z_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ de Y définie par Mertens [4], c'est à dire la plus petite surmartingale forte qui majore Y. La théorie de Mertens est brièvement rappelée au début de l'exposé.

Dans ce cadre, Bismut et Skalli [2] ont montré que si $E[Y_{T_n}]$ tend vers $E[Y_T]$ pour toute suite monotone de temps d'arrêt T_n tendant vers un temps d'arrêt T, l'ensemble des temps d'arrêt optimaux admet un plus petit élément, qui est le début de l'ensemble $\{Y=Z\}$. Nous retrouvons ce résultat par une méthode qui s'applique à des processus plus généraux : on suppose simplement que Y est limité à droite et à gauche et raisonnablement intégrable, et l'on applique à l'enveloppe de Snell des méthodes analogues à celles employées pour les réduites en théorie du potentiel. On obtient ainsi un théorème d'existence et un encadrement des temps d'arrêt optimaux. De plus, on obtient une expression explicite de l'enveloppe de Snell.

Par ailleurs, dans un travail à paraître, J.M. Bismut considère un certain ensemble $\underline{\underline{M}}$ de formes linéaires continues positives sur l'espace des processus limités à droite et à gauche convenablement intégrables. Ayant démontré que $\underline{\underline{M}}$ est faiblement compact, il en déduit l'existence d'une forme optimale. Nous étendons aux formes optimales les encadrements établis plus haut pour les temps d'arrêt optimaux.

Enfin, un dernier paragraphe étudie le cas des processus de Markov.

A. Hypothèses et notations.

On désigne par Y un processus optionnel positif, défini pour $0\leq t\leq\infty$, admettant des limites à droite et à gauche (y compris une limite à gauche à l'infini), et appartenant à la classe (D) : les variables aléatoires Y_T ($T\in\underline{\underline{T}}$) sont uniformément intégrables. On notera Y^+ (resp. Y^-) le processus des limites à droite (resp. à gauche) de Y. Il est commode de poser pour $t<0$ $\underline{\underline{F}}_t=\underline{\underline{F}}_0$, $Y_t=Y_0$ (et donc $Y_0^-=Y_0$), afin que 0 ne joue pas de rôle particulier, et de convenir aussi que $Y^+_\infty=Y_\infty$.

Lorsqu'on travaille, en théorie générale des processus, sur l'ensemble de temps $[0,\infty]$, il est d'usage d'introduire un "deuxième infini" permettant aux temps d'arrêt de s'évanouir. Cela revient dans notre problème d'optimisation à remplacer

$$\sup E[Y_T] \ (T\in\underline{\underline{T}}) \quad \text{par} \quad \sup E[Y_T 1_A] \ (T\in\underline{\underline{T}} \ , \ A\in\underline{\underline{F}}_T)$$

Il est inutile de le faire ici, car Y est un processus positif, et ces deux quantités sont donc égales.

Nous éviterons des difficultés mineures en supposant que le processus Y est strictement positif : cela ne restreint pas la généralité, car on ne change pas le problème d'arrêt optimal en remplaçant Y par $Y+\varepsilon$ ($\varepsilon>0$).

B. Enveloppe de Snell.

Nous rappelons d'abord certains résultats dus à Mertens [4]. Introduisons le « gain optimal conditionnel à l'instant T »

$$(1) \qquad Z(T) = \operatorname*{sup\,ess}_{S\in\underline{\underline{T}},\, S\geq T} E[Y_S|\underline{\underline{F}}_T]$$

Nous remarquons que l'ensemble des variables aléatoires au second membre est filtrant croissant. En effet, si S_1 et S_2 sont deux temps d'arrêt $\geq T$ on a

$$E[Y_{S_1}|\underline{\underline{F}}_T]\vee E[Y_{S_2}|\underline{\underline{F}}_T] = E[Y_R|\underline{\underline{F}}_T] \quad \text{où } R=\begin{cases} S_1 & \text{si } E[Y_{S_1}|\underline{\underline{F}}_T]\geq E[Y_{S_2}|\underline{\underline{F}}_T] \\ S_2 & \text{dans le cas contraire}\end{cases}$$

On a par conséquent, pour tout $A\in\underline{\underline{F}}_T$

$$(2) \qquad \int_A Z(T)dP = \sup_{S\geq T} \int_A Y_S dP$$

On en déduit en particulier, comme Y appartient à la classe (D), que les variables aléatoires $Z(T)$ ($T\in\underline{\underline{T}}$) sont uniformément intégrables.

Il est très facile de vérifier que, si $S\leq T$

$$(3) \qquad Z(S) \geq E[Z(T)|\underline{\underline{F}}(S)] \quad \text{p.s. .}$$

Posons aussi

$$(4) \qquad X(T) = \operatorname*{sup\,ess}_{S\in\underline{\underline{T}},\ S>T} E[Y_S|\underline{\underline{F}}_T]$$

où "$S>T$" signifie "$S\geqq T$ et $S>T$ sur $\{T<\infty\}$" . On a pour tout temps d'arrêt $S\geqq T$

$$E[Y_S|\underline{\underline{F}}_T] \leq Y_T \vee E[Y_R|\underline{\underline{F}}_T] \quad \text{où } R=S_{\{S>T\}}$$

et par conséquent $Z(T)=Y_T\vee X(T)$ p.s.. Si l'on désigne par (X_t) une version continue à droite de la surmartingale $X(t)$ $(t\in\mathbb{R}_+)$, il est facile de voir que $X(T)=X_T$ p.s. pour tout $T\in\underline{\underline{T}}$. Par conséquent, si l'on pose $Z=Y\vee X$, on a $Z(T)=Z_T$ p.s. pour tout T. Le processus Z est optionnel. D'après (3) c'est une <u>surmartingale forte</u>, qui majore Y par construction. On vérifie aussitôt sur (1) que Z est (aux ensembles évanescents près) la plus petite surmartingale forte majorant Y. On appelle Z l'<u>enveloppe de Snell</u> de Y.

On sait que les surmartingales fortes ont des trajectoires pourvues de limites à droite et à gauche (dans le cas qui nous intéresse, c'est d'ailleurs évident sur l'expression $Z=Y\vee X$), d'où l'existence des processus Z^+,Z^- . On a d'autre part $Z^+=X$, de sorte que la définition de Z nous donne

(5) $$Z = Y\vee Z^+$$

Enfin, rappelons la <u>décomposition de Mertens</u> d'une surmartingale forte de la classe (D) (ce qui est le cas pour Z), reprise par Meyer dans [ ]. On peut écrire de manière unique

(6) $$Z = M - B - A^-$$

où : M est une martingale continue à droite uniformément intégrable,
B est un processus croissant prévisible c.à.d. purement discontinu,
A est un processus croissant c.à.d. adapté

A et B étant nuls en 0 tous deux. On peut écrire explicitement les sauts de A et B :

$$\Delta A = Z - Z^+ \quad , \quad \Delta B = Z^- - Z^p$$

où Z^p est la projection prévisible de Z.

Nous pouvons établir la propriété supplémentaire suivante :

(7) $$Z^- = Y^-\vee Z^- = Y^-\vee Z^p$$

<u>Démonstration</u>. La première égalité est une conséquence immédiate de (5), en prenant des limites à gauche ; comme $Z^-\geqq Z^p$, elle entraîne $Z^-\geqq Y^-\vee Z^p$. Pour établir l'égalité de droite, il suffit de vérifier l'égalité p.s. en tout temps prévisible T, puisque les deux côtés sont des processus prévisibles. Il suffit encore de vérifier que $E[Z_T^-]\leqq E[Y_T^-\vee Z^p]$.

Soit (T_n) une suite annonçant T. Pour tout n , choisissons un temps d'arrêt $S_n\geqq T_n$ tel que $E[Y_{S_n}] \geqq E[Z_{T_n}]-\varepsilon$, et écrivons

$$E[Y_{S_n}] = E[Y_{S_n}1_{\{S_n<T\}}+Y_{S_n}1_{\{S_n\geqq T\}}] \leqq E[Y_{S_n}1_{\{S_n<T\}}+Z_T1_{\{S_n\geqq T\}}]$$
$$= E[Y_{S_n}1_{\{S_n<T\}}+Z_T^p1_{\{S_n\geqq T\}}]$$

car $\{S_n\geqq T\}=\bigcap_m\{S_n\geqq T_m\}$ appartient à $\underline{\underline{F}}_{T-}$. On a

$$\limsup_{n\to\infty} Y_{S_n}1_{\{S_n<T\}}+Z_T^p1_{\{S_n\geqq T\}} \leqq Y_T^-\vee Z_T^p$$

d'où, par un lemme de Fatou en lim sup (justifiable par l'intégrabilité uniforme des Y_{S_n})

$$\limsup_{n\to\infty} E[Y_{S_n}] \leqq E[Y_T^-\vee Z_T^p]$$

et enfin $E[Z_T^-]-\varepsilon \leqq E[Y_T^-\vee Z_T^p]$, l'inégalité cherchée.

__Remarque__. On peut donner à (7) l'interprétation suivante : si T est prévisible, on a p.s.

$$(8)\qquad Z_T^- = \operatorname*{ess\,sup}_{S\geqq T,\ S\in\underline{\underline{T}}_p} E[Y_S^-|\underline{\underline{F}}_{T-}]$$

où $\underline{\underline{T}}_p$ est la classe des temps d'arrêt prévisibles.

Le critère d'optimalité suivant met immédiatement en évidence le rôle joué par l'enveloppe de Snell :

__Théorème 1__. __Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un temps d'arrêt__ T __soit optimal est que l'on ait__ $Y_T=Z_T$ __p.s., et que__ $Z_{t\wedge T}$ __soit une martingale__.

__Démonstration__. La surmartingale forte Z appartenant à la classe (D), $Z_{t\wedge T}$ est une martingale si et seulement si $E[Z_T]=E[Z_0]$. D'autre part, on a pour tout temps d'arrêt T

$$Y_T\leqq Z_T \quad , \quad E[Z_T]\leqq E[Z_0] = \sup_{S\in\underline{\underline{T}}} E[Y_S].$$

Ainsi (T optimal) <=> ($E[Y_T]=E[Z_0]$) <=> ($E[Y_T]=E[Z_T]=E[Z_0]$) <=> ($Y_T=Z_T$ p.s. et $E[Z_T]=E[Z_0]$).

C. Bornes inférieures pour les temps d'arrêt optimaux.

Le théorème qui va suivre est à la base de ce travail.

__Théorème 2__. __Soit__ $\lambda\in[0,1[$. __On pose__ $J^\lambda=\{(\omega,t)\ |Y_t(\omega)>\lambda Z_t(\omega)\}$ __et__

$$(9)\qquad D_t^\lambda(\omega) = \inf\{\ s\geqq t\ |\ (\omega,s)\in J^\lambda\ \}\quad (\text{ on écrit } D_0^\lambda=D^\lambda\ )$$

__Alors pour tout temps d'arrêt__ T, __on a__

$$(10)\qquad Z_T = E[Z_{D_T^\lambda}|\underline{\underline{F}}_T]\ \text{p.s.}\ ,$$

__ou, ce qui est équivalent__ : $A_T^- = A_{D_T^\lambda}^-$, $B_T=B_{D_T^\lambda}$ __p.s.__

Démonstration. Soit $\overline{Z}$ l'enveloppe de Snell du processus $Z1_{J^\lambda}$. Elle vérifie l'inégalité

$$Y \leqq \lambda Z + (1-\lambda)\overline{Z}$$

En effet, sur J^λ on a $\overline{Z} \geqq Z1_{J^\lambda} = Z$, donc $\lambda Z+(1-\lambda)\overline{Z} \geqq \lambda Z+(1-\lambda)Z = Z \geqq Y$, et sur $(J^\lambda)^c$ on a $Y \leqq \lambda Z \leqq \lambda Z+(1-\lambda)\overline{Z}$.

Par suite, la surmartingale forte $\lambda Z+(1-\lambda)\overline{Z}$ majore Y, donc aussi Z. On en déduit $\overline{Z} \geqq Z$. L'inégalité inverse étant évidente, on a $\overline{Z}=Z$.

On a donc pour tout temps d'arrêt T

$$Z_T=\overline{Z}_T= \operatorname{ess\,sup}_{S \geqq T} E[Z_S 1_{J^\lambda}(S)\,|\,\underline{\underline{F}}_T] \leqq E[Z_{D_T^\lambda}\,|\,\underline{\underline{F}}_T] \leqq Z_T$$

car le temps d'arrêt $S_{\{S\in J^\lambda\}}$ majore D_T^λ et Z est une surmartingale.

Théorème 3. On a $\lambda Z_{D_T^\lambda} \leqq Y_{D_T^\lambda} \vee Y^+_{D_T^\lambda}$.

Démonstration. On a $D_T^\lambda = \inf\{\, s \geqq T \mid Y_s > \lambda Z_s\}$. Plaçons nous d'abord sur $\{D_T^\lambda < \infty\}$; alors ou bien $Y_{D_T^\lambda} > \lambda Z_{D_T^\lambda}$, ou bien $Y^+_{D_T^\lambda} \geqq \lambda Z^+_{D_T^\lambda}$. Mais $Z=Y\vee Z^+$; alors

- sur $\{Z=Z^+\}$ on a $Y_{D_T^\lambda} \vee Y^+_{D_T^\lambda} \geqq \lambda Z$
- sur $\{Z=Y\}$ on a $\lambda Z_{D_T^\lambda} \leqq Z_{D_T^\lambda} = Y_{D_T^\lambda} \leqq Y_{D_T^\lambda} \vee Y^+_{D_T^\lambda}$.

A l'infini, on a toujours $Z_\infty = Y_\infty$ (cf. (1)) et l'inégalité est évidente.

Soit $\varepsilon>0$. Un temps d'arrêt T est dit ε-optimal si $E[Y_T] \geqq E[Z_0]-\varepsilon$. On obtient un critère simple d'existence de temps ε-optimaux :

Corollaire. Si $Y \geqq Y^+$, D^λ est ε-optimal pour λ assez voisin de 1.

Démonstration. Si $Y \geqq Y^+$, le théorème 3 nous donne $\lambda E[Z_{D_0^\lambda}] \leqq E[Y_{D_0^\lambda}]$. Le théorème 2 nous permet de remplacer $E[Z_{D_0^\lambda}]$ par $E[Z_0]$, autrement dit on a $E[Y_{D^\lambda}] \geqq \lambda E[Z_0]$.

Remarque. On peut énoncer un résultat analogue en toute généralité, grâce à une notion introduite tout récemment par J.M. Bismut. Appelons système d'arrêt un quadruplet $\tau=(T,U,V,W)$, où T est un temps d'arrêt ordinaire, et U,V,W sont des éléments de $\underline{\underline{F}}_T$ formant une partition de Ω, telle que

- $U\cap\{T=0\}=\emptyset$, et le temps d'arrêt T_U est prévisible (donc $U\in\underline{\underline{F}}_{T-}$),
- $W\cap\{T=\infty\}=\emptyset$

Si X est un processus càdlàg, on pose alors

$$X_\tau = X_T^- 1_U + X_T 1_V + X_T^+ 1_W$$

Soient $\tau=(T,U,V,W)$ et $\tau'=(T',U',V',W')$; on écrira $\tau \leqq \tau'$ pour exprimer que $T \leqq T'$ et sur $\{T=T'\}$ on a $U' \subset U$, $V' \subset U \cup V$

Il est très facile de voir que, si M est une martingale uniformément intégrable et τ est un système d'arrêt, on a $E[M_\tau]=E[M_0]$; on déduit de là et de la décomposition de Mertens que si Z est une surmartingale forte de la classe (D), on a aussi $E[Z_\tau]\leqq E[Z_0]$ (et cela s'étend aussitôt aux surmartingales fortes positives quelconques). Il en résulte en particulier que l'on a (en revenant aux enveloppes de Snell)

$$E[Y_\tau] \leqq E[Z_\tau] \leqq E[Z_0]$$

On dit que τ est optimal (resp. ε-optimal) si $E[Y_\tau]=E[Z_0]$ (resp. $E[Y_\tau] \geqq E[Z_0]-\varepsilon$). Le théorème 3 nous dit alors, sans aucune hypothèse du type $Y\geqq Y^+$, que le système d'arrêt

$$\delta^\lambda = (D^\lambda \ , \ \emptyset \ , \ \{Y_{D^\lambda}\geqq Y^+_{D^\lambda}\} \ , \{Y_{D^\lambda}<Y^+_{D^\lambda}\})$$

est ε-optimal pour λ suffisamment voisin de 1.

Nous allons maintenant faire tendre λ vers 1. Il faut pour cela introduire de nouvelles notations. Nous remarquons que J^λ décroît lorsque λ croît, donc D^λ croît. Nous posons

(11) $\qquad \lim_{\lambda\to 1} D^\lambda_T = D_T$ (nous écrivons D au lieu de D_0)

et $\qquad H^-_T = \{\ \omega : D^\lambda_T(\omega)<D_T(\omega)$ pour tout $\lambda\ \}$ (et $H^-_0 = H^-$)

(12) $\qquad H_T = (H^-_T)^c\cap\{Z_{D_T}=Y_{D_T}\}$ $\qquad (H_0=H)$

$\qquad H^+_T = (H^-_T)^c\cap\{Z_{D_T}>Y_{D_T}\}$ $\qquad (H^+_0=H^+)$

Le temps d'arrêt $(D_T)_{H^-_T}$ est prévisible, annoncé par la suite de t.a. $(D^\lambda_T)_{\{D^\lambda_T<D_T\}}$. Il en résulte que $\delta_T = (D_T,H^-_T,H_T,H^+_T)$ est un système d'arrêt.

<u>Théorème 4</u>. 1) <u>On a</u> $Z_T = E[Y^-_{D_T}1_{H^-_T} + Y_{D_T}1_{H_T} + Y^+_{D_T}1_{H^+_T}\ |\underline{F}_T\ ]$ <u>p.s.</u> .

2) <u>En particulier, le système d'arrêt</u> $\delta=(D,H^-,H,H^+)$ <u>est optimal, et l'on a</u> $\delta\leqq\tau$ <u>pour tout système d'arrêt optimal</u> τ.

3) D <u>est le début de chacun des ensembles</u>

$$\{Y = Z \text{ ou } Y^-=Z^-\} \quad \underline{\text{et}} \quad \{Y=Z \text{ ou } Y^-=Z^- \text{ ou } Y^+=Z^+\} \ .$$

<u>Démonstration</u>. 1) Du fait que Z est une surmartingale forte, Z_T majore le second membre (noter que l'on a $T<D_T$ sur H^-_T). Il suffit donc de montrer que $E[Z_T]$ est majorée par l'espérance du côté droit. On écrit le théorème 2, puis le théorème 3 :

$$\lambda E[Z_T] = \lambda E[Z_{D^\lambda_T}\ ] \leqq E[Y_{D^\lambda_T}\vee Y^+_{D^\lambda_T}1_{\{D^\lambda_T<D_T\}} + Y_{D_T}\vee Y^+_{D_T}1_{\{D^\lambda_T=D_T\}}\ ]$$

Faisons tendre λ vers 1, il vient

$$E[Z_T] \leqq E[\ Y^-_{D_T}1_{H^-_T} + Y_{D_T}\vee Y^+_{D_T}1_{(H^-_T)^c}\ ]$$

qui est la relation cherchée.

2) Soit $\tau=(T,U,V,W)$ un système d'arrêt optimal. On a

$$E[Z_0]=E[Y_T^- 1_U+Y_T 1_V+Y_T^+ 1_W]\leqq E[Z_T^- 1_U+Z_T 1_V+Z_T^+ 1_W] \leqq E[Z_0]$$

Sur U, on a $Y_T^-=Z_T^-$ p.s., donc $D_0^\lambda<T$ pour tout λ (c'est ici qu'intervient la stricte positivité de Z ; cf. la fin des "hypothèses et notations").
Donc sur U on a $D\leqq T$, et $U\cap\{D=T\}\subset H^-$.
Sur V, on a $Y_T=Z_T$, donc $D_0^\lambda\leqq T$ pour tout λ, et $D\leqq T$. De plus, si $\omega\in V$ et $D(\omega)=T(\omega)$ on a $Z_D(\omega)=Y_D(\omega)$, donc $\omega\in H^-\cup H$ (cf. (12).
Sur W enfin, on a $Y_T^+=Z_T^+$, donc $D_0^\lambda\leqq T$ pour tout λ. Ces trois propriétés ensemble expriment que $\delta\leqq\tau$.

Nous avons vu que le graphe de T passe dans l'ensemble

$$J"=\{Y^-=Z^- \text{ ou } Y=Z \text{ ou } Y^+=Z^+\}$$

qui contient l'ensemble $J'= \{Y^-=Z^- \text{ ou } Y=Z\}$. Cela s'applique en particulier à $\tau=\delta$, et on a donc

$$\text{début}(J") \leqq D$$

Mais d'autre part on a $D^\lambda \leqq$ début(J") pour $\lambda<1$, donc D=début(J"), et $D\leqq$début(J'). Mais d'autre part comme $D=\lim_{\lambda\to 1} D^\lambda$ on a $Y_D=Z_D$ ou $Y_D^-=Z_D^-$, donc début(J')=D, et 3) est établi.

Corollaire. Si l'on a $Y\geqq Y^+$, $Y^p\geqq Y^-$, D est un temps d'arrêt optimal, et c'est le plus petit temps d'arrêt optimal.

Démonstration. Sous ces hypothèses, on a en effet

$$E[Y_D^- 1_{H^-} +Y_D 1_H+Y_D^+ 1_{H^+}] \leqq E[Y_D^p 1_{H^-} + Y_D 1_H + Y_D 1_{H^+}] = E[Y_D]$$

et D est donc optimal. Le reste est évident.

Remarque. La condition $Y^p\geqq Y^-$ équivaut à : pour toute suite croissante de temps d'arrêt $T_n\uparrow T$, telle que $T_n<T$ pour tout n, on a $E[Y_T] \geqq \lim_n E[Y_{T_n}]$.
De même, la condition $Y\geqq Y^+$ équivaut à : pour toute suite décroissante de temps d'arrêt $T_n\downarrow T$, on a $E[Y_T] \geqq \lim_n E[Y_{T_n}]$. Cela permet de faire la comparaison avec l'"hypothèse 1" de Bismut et Skalli, [2] p. 302.

D. Bornes supérieures pour les temps d'arrêt optimaux.

Nous reprenons la décomposition de Mertens (6) de la surmartingale forte Z,

$$Z_t = M_t - B_t - A_t^-$$

et nous introduisons les notations suivantes :

$$(13)\qquad \begin{aligned} S &= \inf\{ t>0 : A_t^-+B_t>0 \} \\ K^- &= \{B_S>0\} \\ K &= \{B_S=0 \text{ et } Y_S>Y_S^+\} \\ K^+ &= \{B_S=0 \text{ et } Y_S\leqq Y_S^+\} \end{aligned}$$

Les trois ensembles $\underline{\underline{F}}_S$-mesurables K^-,K,K^+ forment une partition de Ω. D'autre part, le graphe de S_{K^-} est l'ensemble prévisible

$$\{(\omega,t)\mid A_t^-(\omega)+B_t^-(\omega)=0,\ B_t(\omega)>0\}$$

et S_{K^-} est donc un temps prévisible. Ainsi

$$(14)\qquad \sigma=(S,K^-,K,K^+)$$

est un système d'arrêt.

La méthode qui nous conduit à l'énoncé suivant se prêterait à un calcul explicite de l'enveloppe de Snell à un instant T quelconque, à la manière du théorème 4, 1). Mais nous ne donnerons pas les détails.

<u>Théorème 5</u>. <u>Le système d'arrêt</u> σ <u>est optimal</u>, <u>et l'on a</u> $\tau\leqq\sigma$ <u>pour tout système d'arrêt optimal</u> τ.

<u>Démonstration.</u> Il s'agit de démontrer que $E[Z_0]=E[Y_S^-1_{K^-}+Y_S1_K+Y_S^+1_{K^+}]$.

Or :

- Sur K^-, on a $Y_S^-=Z_S^-$. En effet, S_{K^-} est prévisible, donc $Z_S^-=Z_S^p+\Delta B_S$ sur K^- ; or $\Delta B_S>0$ sur K^- d'après (13), donc $Z_S^->Z_S^p$. D'après (7), $Z_S^-=Y_S^-\vee Z_S^p$, donc $Z_S^-=Y_S^-$ sur K^-.
- Sur $K\cup K^+$, on a $A_S^-=0$, $B_S=0$; d'après le théorème 2, cela entraîne $A^-_{D_S^\lambda}=0$, $B_{D_S^\lambda}=0$, donc $D_S^\lambda=S$ pour tout $\lambda<1$. D'après le théorème 3 on a (toujours sur $K\cup K^+$) $\lambda Z_S=\lambda Z_{D_S^\lambda}\leqq Y_{D_S^\lambda}\vee Y^+_{D_S^\lambda}=Y_S\vee Y_S^+$, donc $Z_S\leqq Y_S\vee Y_S^+$, et enfin $Z_S=Y_S\vee Y_S^+$ sur $K\cup K^+$.

La formule à établir est donc $E[Z_0]=E[Z_S^-1_{K^-}+Z_SI_{K\cup K^+}]$. Or le côté droit vaut d'après la décomposition de Mertens

$$E[M_S^-1_{K^-}+M_S1_{K\cup K^+}]-E[(A_S^-+B_S^-)1_{K^-}+(A_S^-+B_S)1_{K\cup K^+}]=E[M_S]-0$$

$$=E[M_0]=E[Z_0].$$

Ainsi, σ est optimal. Soit $\tau=(T,U,V,W)$ un second système d'arrêt optimal. Nous avons comme dans la démonstration du théorème 4

$$E[Z_0]=E[Z_T^-1_U+Z_T1_V+Z_T^+1_W]\quad ;\ Y_T^-=Z_T^- \text{ sur } U,\ Y_T=Z_T \text{ sur } V,\ Y_T^+=Z_T^+ \text{ sur } W$$

Ecrivons la décomposition de Mertens

$$E[Z_T^-1_U+Z_T1_V+Z_T^+1_W]=E[M_T^-1_U+M_T1_V+M_T^+1_W]-E[(A_T^-+B_T^-)1_U+(A_T^-+B_T)1_V+(A_T+B_T)1_W]$$

et comme $E[M_T^-1_U+M_T1_V+M_T^+1_W]=E[M_0]=E[Z_0]$, le dernier terme est nul. La condition $A_T^-+B_T=0$ p.s. entraîne $T\leqq\sup\{t : A_t^-+B_t=0\}=S$. Soit $\omega\in\{T=S\}\cap K^-$; on a $B_T(\omega)=B_S(\omega)>0$, donc la nullité du dernier terme exige $\omega\in U$. De même, soit $\omega\in\{T=S\}\cap K$; on a $Y_T(\omega)=Y_S(\omega)>Y_S^+(\omega)=Y_T^+(\omega)$, et l'optimalité de τ exige que ω soit attribué à V. On a donc bien prouvé que $\tau\leqq\sigma$.

<u>Corollaire. Si l'on a $Y \geq Y^+$, $Z^- = Z^p$, S est un temps d'arrêt optimal, et c'est le plus grand temps d'arrêt optimal.</u>

<u>Démonstration</u>. Si $Y \geq Y^+$ on a $E[Y_S^- 1_{K^-} + Y_S 1_K + Y_S^+ 1_{K^+}] \leqq E[Y_S^- 1_{K^-} + Y_S 1_{K \cup K^+}]$. Si $Z^- = Z^p$ on a $B=0$, donc $K^- = \emptyset$. Le reste est évident.

<u>Remarque</u>. Ces hypothèses sont plus faibles que celles du corollaire du théorème 4 : $Y \geq Y^+$, $Y^p \geq Y^-$, qui entraînaient l'optimalité de D. En effet $(Y^p \geq Y^-) \Rightarrow (Z^p \geq Y^-) \Rightarrow (Y^- \vee Z^p = Z^p) \Rightarrow (Z^- = Z^p)$ d'après (7).

E. Formes optimales.

Soit $\underline{\underline{H}}$ l'espace des processus optionnels X, définis pour $0 \leqq t \leqq \infty$, admettant des limites à droite et à gauche (y compris une limite à gauche à l'infini) et tels que $E[\sup_t |X_t|] < +\infty$. Nous désignerons par $\underline{\underline{M}}$ l'ensemble des formes linéaires positives μ sur $\underline{\underline{H}}$ du type suivant

$$(15) \qquad \mu(X) = E[\int_{]0,\infty]} X_s^- dI_s + \int_{[0,\infty]} X_s dJ_s + \int_{[0,\infty[} X_s^+ dK_s]$$

où I est un processus croissant prévisible ne chargeant pas 0, J et K deux processus croissants adaptés, et K ne charge pas $+\infty$, et où l'on a

$$I_\infty + J_\infty + K_\infty = 1$$

Par exemple, si τ est un système d'arrêt, la forme μ_τ : $X \mapsto E[X_\tau]$ est du type (15). Les éléments de $\underline{\underline{M}}$ apparaissent comme des "systèmes d'arrêt flous", de la même manière que les "temps d'arrêt flous" sont associés aux temps d'arrêt ordinaires ([5]) l'on peut conjecturer que les formes μ_τ sont les points extrémaux de $\underline{\underline{M}}$.

On peut montrer que les processus croissants I,J,K associés à μ sont uniquement déterminés par μ, si l'on impose à I et K d'être purement discontinus.

J.M. Bismut a démontré que $\underline{\underline{M}}$ est compact pour la topologie faible déterminée sur $\underline{\underline{M}}$ par les éléments de $\underline{\underline{H}}$, résultat analogue au théorème de Baxter-Chacon sur les temps d'arrêt flous. D'autre part, si μ appartient à $\underline{\underline{M}}$, $\mu(X)$ a un sens pour un processus optionnel X de la classe (D), et l'on a $\mu(X) = E[X_\infty]$ pour toute martingale uniformément intégrable X. Il en résulte sans peine que l'on a $\mu(Z) \leqq E[Z_0]$ pour toute surmartingale forte (positive) Z.

Revenons alors au problème d'arrêt optimal. On a évidemment

$$E[Z_0] \geqq \sup_{\mu \in \underline{\underline{M}}} \mu(Z) \geqq \sup_{\mu \in \underline{\underline{M}}} \mu(Y) \geqq \sup_{T \in \underline{\underline{T}}} E[Y_T] = E[Z_0].$$

On dira qu'une forme μ est optimale si $\mu(Y) = E[Z_0]$.

On peut définir sur $\underline{\underline{M}}$ un ordre analogue à l'ordre du balayage en théorie du potentiel. Si μ et $\hat{\mu}$ sont des éléments de $\underline{\underline{M}}$, associés respectivement à des processus croissants (uniques) (I,J,K), $(\hat{I},\hat{J},\hat{K})$, il est naturel de dire que $\mu \dashv \hat{\mu}$ (μ est <u>antérieure</u> à $\hat{\mu}$) si

$$\mu(Z) \geqq \hat{\mu}(Z) \text{ pour toute surmartingale forte positive } Z$$

et l'on peut montrer que cette relation équivaut à

$$\hat{I}+\hat{J}^{-}+\hat{K} \leqq I+J^{-}+K \qquad \text{et} \qquad \hat{I}+\hat{J}^{-}+\hat{K}^{-} \leqq I+J^{-}+K^{-}$$

Dans ces conditions, on peut étendre aux formes optimales les encadrements indiqués plus haut pour les systèmes d'arrêt optimaux, avec en principe la même démonstration (nous ne donnerons pas les détails). Si δ et σ désignent respectivement le plus petit (théorème 4) et le plus grand (théorème 5) système d'arrêt optimal, on a encore

(16) $$\mu_\delta \dashv \lambda \dashv \mu_\sigma \text{ pour toute forme optimale } \lambda \in \underline{\underline{M}} \text{ .}$$

F. <u>Application aux processus de Markov</u>.

Nous n'allons pas chercher ici à faire une théorie détaillée, afin de ne pas accabler le lecteur sous les hypothèses. Le problème d'arrêt optimal prend ici la forme particulière suivante. On se donne un semi-groupe de Markov (P_t) sur un espace d'états E, et une probabilité initiale λ. On construit une réalisation (X_t) des processus de Markov gouvernés à (P_t), et l'on cherche des temps d'arrêt T maximisant

(17) $$E_\lambda[e^{-pT} g \circ X_T]$$

où p est un nombre $\geqq 0$, et g est une fonction positive sur l'espace d'états. Cela revient formellement à appliquer la théorie générale de l'arrêt optimal au processus

$$Y_t = e^{-pt} g \circ X_t \qquad \text{avec } Y_\infty = 0$$

Pour que cette étude entre dans l'étude des paragraphes antérieurs, il faut que Y soit un processus optionnel (ce sera le cas lorsque g sera mesurable par rapport à la tribu engendrée sur E par les fonctions excessives) et pourvu de limites à droite et à gauche (ce sera le cas lorsque g sera, par exemple, une différence de fonctions surmédianes).

Le point important, en théorie des processus de Markov, est l'existence d'une théorie analytique des réduites, développée récemment par Mokobodzki. Si g est mesurable par rapport à la tribu engendrée sur E par les fonctions 1-excessives, il existe toujours une plus petite fonction $q \geqq g$, mesurable par rapport à la même tribu, et fortement p-surmédiane. Le processus

$$Z_t = e^{-pt} q_o X_t \tag{18}$$

est alors l'enveloppe de Snell de (Y_t), quelle que soit la probabilité initiale λ . La décomposition de Mertens de (Z_t) se fait de même au moyen de fonctionnelles additives A et B indépendantes de la probabilité initiale, et les systèmes d'arrêt optimaux que l'on a construits sont eux mêmes indépendants de la probabilité initiale. On pourra consulter [2].

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.M. BISMUT. Dualité convexe, temps d'arrêt optimal et contrôle stochastique. Z. Wahr. verw. Geb. 38, 169-198 (1977).

[2] J.M. BISMUT et B. SKALLI. Temps d'arrêt optimal, théorie générale des processus et processus de Markov. Z. Wahr. verw. Geb. 39, 301-314 (1977).

[3] J.M. BISMUT. Temps d'arrêt optimal, quasi-temps d'arrêt et retournement du temps. A paraître.

[4] J.F. MERTENS . Théorie des processus stochastiques généraux . Application aux surmartingales. Z. Wahr. verw. Geb. 22, 45-68 (1972).

[5] P.A. MEYER. Temps d'arrêt flous d'après Baxter-Chacòn. A paraître (dans ce volume).

M. P.A. Meyer nous a signalé que la méthode de démonstration du théorème 2 est presque identique à une méthode utilisée par Mokobodzki, figurant dans

[6] D. HEATH. Skorokhod stopping via potential theory. Séminaire de Probabilités VIII, Lecture Notes in M. 381, p. 152 (Springer-Verlag 1974).

M.A. Maingueneau
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Route de Laval
72- Le Mans