SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

CLAUDE DELLACHERIE
PAUL-ANDRÉ MEYER

Construction d'un processus prévisible ayant une valeur donnée en un temps d'arrêt

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 12 (1978), p. 425-427
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1978__12__425_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1976/77

CONSTRUCTION D'UN PROCESSUS PREVISIBLE AYANT UNE VALEUR DONNEE EN UN TEMPS D'ARRET

par C.Dellacherie et P.A.Meyer

Cette note est consacrée à une "petite remarque évidente" de théorie générale des processus, que nous n'avons vu écrite nulle part, bien qu'elle soit implicite, par exemple, dans Weil [3] et dans d'autres travaux de conditionnement par rapport au passé strict. Il s'agit de répondre aux questions suivantes, où T désigne un temps d'arrêt ;

a) Soit X mesurable par rapport à $\underline{\underline{F}}_{T-}$. On sait (voir [1], IV.67) qu'il existe un processus prévisible (Z_t) tel que $X=Z_T$. Mais existe t'il un procédé permettant d'<u>écrire</u> un tel processus ?

b) Lorsque T n'est pas prévisible, peut on "calculer" des espérances conditionnelles du type $E[Y|\underline{\underline{F}}_{T-}]$?

Nous désignons par $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ un espace probabilisé muni d'une filtration $(\underline{\underline{F}}_t)$ qui satisfait aux conditions habituelles. Il est commode de se donner une tribu supplémentaire $\underline{\underline{F}}_{0-} \subset \underline{\underline{F}}_0$, contenant tous les ensembles P-négligeables, et de poser $\underline{\underline{F}}_t=\underline{\underline{F}}_{0-}$ pour $t<0$; ainsi l'instant 0 perd son rôle spécial. Soient T un temps d'arrêt (T peut prendre les valeurs 0 et $+\infty$ avec probabilité positive) et X une v.a. intégrable ; nous introduisons les deux processus à variation intégrable suivants, définis pour $-\infty<t\leq+\infty$, nuls pour $t<0$, pouvant présenter un saut en 0 et un saut à l'infini

$$(1) \qquad A_t = I_{\{t\geq T\}} \qquad , \qquad B_t = XI_{\{t\geq T\}}$$

et nous désignons par $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ leurs projections duales prévisibles. On dit parfois que B est <u>innovant</u> si $\tilde{B}=0$, ce qui revient à dire que $E[B_\infty-B_t|\underline{\underline{F}}_t]$ =0 pour tout t, ou encore, lorsque X est $\underline{\underline{F}}_T$-mesurable, que B est une martingale.

La remarque suivante figure dans un travail tout récent de Le Jan :

LEMME. B <u>est innovant si et seulement si</u> $E[X|\underline{\underline{F}}_{T-}]=0$.

DEMONSTRATION. Soit $A\in\underline{\underline{F}}_t$; on a $E[(B_\infty-B_t)I_A]=E[XI_{\{t<T\}\cap A}]$, et les ensembles de la forme $\{t<T\}\cap A$ $(t\in\mathbb{R}, A\in\underline{\underline{F}}_t)$ forment une famille stable par intersection qui engendre $\underline{\underline{F}}_{T-}$. On applique alors le théorème I.21 de [1], en prenant pour $\underline{\underline{H}}$ l'espace des v.a. $\underline{\underline{F}}_{T-}$-mesurables bornées U telles que $E[UX]=0$.

Considérons les mesures bornées sur $(\mathbb{R}\cup\{+\infty\})\times\Omega$

$$\alpha(U) = E[\int_{[0,\infty]} U_s dA_s] \quad , \quad \beta(U) = E[\int_{[0,\infty]} U_s dB_s]$$

On a manifestement $\beta\ll\alpha$, et la même propriété a lieu a fortiori sur la tribu prévisible. Il existe donc, d'après le théorème de Radon-Nikodym, un processus prévisible $(Z_t)_{0\leqq t\leqq+\infty}$, unique à équivalence près par rapport à α, α-intégrable, et tel que $\beta=Z\cdot\alpha$ sur la tribu prévisible $\mathcal{P}$. Autrement dit,

(3) $\qquad E[|Z_T|]<\infty \quad , \quad \tilde{B}_t = \int_{[0,\infty]} Z_s d\tilde{A}_s$

Mais la relation $\beta=Z\cdot\alpha$ sur la tribu prévisible signifie que $B-Z\cdot A$ est innovant. Ce processus s'écrivant $(X-Z_T)I_{\{t\geqq T\}}$, le lemme précédent nous dit que $Z_T=E[X|\underline{\underline{F}}_{T-}]$.

Inversement, si Z est un processus prévisible tel que $Z_T=E[X|\underline{\underline{F}}_{T-}]$, $|Z|$ est α-intégrable, $B-Z\cdot A$ est innovant d'après le lemme, donc Z est densité de β/α sur la tribu prévisible, et il en résulte que Z est connu p.p. relativement à la mesure aléatoire $d\tilde{A}$.

La réponse aux questions a) et b) est donc

(4) $\qquad E[X|\underline{\underline{F}}_{T-}]=Z_T \qquad$ où (Z_t) est version prévisible de $\dfrac{d\tilde{B}}{d\tilde{A}}$

Les résultats de "conditionnement par rapport au passé strict" entrent maintenant dans le schéma suivant : on s'intéresse au cas où X est $\underline{\underline{F}}_T$-mesurable, et où l'on a une représentation de la forme

(5) $\qquad \tilde{B}_t = \int_0^t n_s(\omega,X)ds$

$(s,\omega)\mapsto n_s(\omega,.)$ étant un noyau de $[0,\infty]\times\Omega$ muni de la tribu prévisible, dans $(\Omega,\underline{\underline{F}}_T)$ - noyau non nécessairement borné. Dans ce cas, la formule (4) s'écrit

(6) $\qquad Z_t(\omega)=\dfrac{n_t(\omega,X)}{n_t(\omega,1)} \qquad$ et en particulier $\quad E[X|\underline{\underline{F}}_{T-}] = \dfrac{n_T(X)}{n_T(1)}$

REMARQUE. On peut se demander si la v.a. X "contrôle" l'ensemble du processus prévisible (Z_t). Or on a, le processus $(|Z_t|^p)$ étant prévisible

$$E[\int_{[0,\infty]}|Z_t|^p d\tilde{A}_t] = E[\int_{[0,\infty]}|Z_t|^p dA_t] = E[|Z_T|^p] \leqq E[|X|^p] \quad .$$

REFERENCES

[1] C. Dellacherie et P.A. Meyer. Probabilités et Potentiels A. 2e éd. Hermann, Paris 1976.

[2] Y. Le Jan. Martingales et changement de temps, martingales de sauts. A paraître aux C.R. Acad. Sc. Paris (1977).

[3] M. Weil. Conditionnement par rapport au passé strict. C.R.A.S. Paris t. 270, p. 1523-1525 (1970).