SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

MARC YOR
JOSÉ DE SAM LAZARO

Sous-espaces denses dans L^1 ou H^1 et représentation des martingales

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 12 (1978), p. 265-309
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1978__12__265_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1976/77

SOUS-ESPACES DENSES DANS L^1 OU H^1
ET REPRESENTATION DES MARTINGALES

par Marc Yor
(avec J. de Sam Lazaro pour l'appendice)

Introduction. Les martingales relatives à un espace probabilisé filtré $\Lambda = (\Omega, \underline{\underline{F}}, (\underline{\underline{F}}_t), P)$ jouent un rôle fondamental, tant pour le calcul stochastique sur Λ que pour l'étude de certaines propriétés de Λ.

Ceci a conduit de nombreux auteurs à représenter les martingales de carré intégrable (par exemple) sur Λ comme intégrales stochastiques par rapport à certaines martingales fondamentales, principalement dans le cadre des processus de Markov (Kunita-Watanabe [1] ; voir aussi [2] et [3]) et en particulier des processus à accroissements indépendants ([4],[5],[6],[7]), ainsi que pour les processus ponctuels ([8],[9],[10], [11] ; voir [12] pour une revue des résultats connus).

En [14], Jacod et Yor ont adopté un point de vue dual : étant donné un espace filtré sans probabilité $(\Omega, \underline{\underline{F}}^\circ, (\underline{\underline{F}}^\circ_t)_{t\geq 0})$, et un ensemble $\underline{\underline{N}}$ de processus càdlàg et $\underline{\underline{F}}^\circ_t$-adaptés, ils ont caractérisé les probabilités P sur $(\Omega, \underline{\underline{F}}^\circ)$ faisant de tout processus $N \in \underline{\underline{N}}$ une P-martingale locale, et telles que $\underline{\underline{N}}$ engendre l'ensemble des $(P, \underline{\underline{F}}^\circ_t)$-martingales locales au sens des espaces stables de martingales (cf. [1] pour les martingales de carré intégrable, et [14] pour les martingales locales).

L'origine du présent travail se trouve dans une remarque de Mokobodzki, qui nous a signalé la similitude qui lui semblait exister entre le théorème principal de [14], et un théorème de R.G. Douglas ([20]) sur la caractérisation des points extrémaux de certains ensembles de mesures sur un espace mesurable abstrait $(X, \underline{\underline{X}})$. Le lien étroit qui existe entre les deux théorèmes permet d'unifier les différents problèmes de représentation des martingales, et de les rapprocher de certains problèmes d'analyse fonctionnelle.

Le paragraphe 1 est consacré à l'exposé du théorème de Douglas, et de plusieurs de ses applications.

Le paragraphe 2 contient les nouveaux résultats obtenus pour les différents problèmes de représentation des martingales.

Le paragraphe 3 est consacré à l'étude des conditions d'extrémalité dans le problème des martingales, tel qu'il a été formulé par Stroock et Varadhan.

Enfin l'appendice, rédigé avec J. de Sam Lazaro, peut être lu indépendamment du reste de l'exposé.

Nous terminons l'introduction en remerciant vivement G. Mokobodzki, dont la remarque citée plus haut joue un rôle important dans cet article.

Quelques notations et rappels.

$(\Omega,\underline{\underline{F}}^\circ,(\underline{\underline{F}}^\circ_t)_{t\geq 0})$ désigne un espace mesurable, muni d'une filtration croissante.

Si P est une probabilité sur $(\Omega,\underline{\underline{F}}^\circ)$, on note $\underline{\underline{F}}(P)$ la tribu $\underline{\underline{F}}^\circ$ P-complétée, et $(\underline{\underline{F}}(P)_t)$ la filtration $(\underline{\underline{F}}^\circ_t)$ rendue $\underline{\underline{F}}(P)$-complète et continue à droite. $\underline{\underline{O}}$ (resp. $\underline{\underline{P}}$) désigne la tribu optionnelle (resp. prévisible) sur $\Omega\times\mathbb{R}_+$, associée à $(\underline{\underline{F}}(P)_t)$.

On écrit souvent t.a. au lieu de $\underline{\underline{F}}(P)_t$-temps d'arrêt.

$\underline{\underline{M}}_{loc}(P)$, resp. $\underline{\underline{M}}^2(P)$, est l'ensemble des $\underline{\underline{F}}(P)_t$-martingales locales, resp. martingales de carré intégrable, pour P. On utilise également les notations classiques $\underline{\underline{M}}^c_{loc}(P)$ et $\underline{\underline{M}}^d_{loc}(P)$.

$H^1(P)$ est l'espace de Banach des P-martingales $(X_t)_{t\geq 0}$ telles que $\|X\|_{H^1} = E[\sup_{t\geq 0}|X_t|] < \infty$. L'importance de cet espace réside - au moins pour nous - dans le résultat suivant (cf. [23]) : toute martingale locale M appartient localement à $H^1(P)$, c'est à dire[1] qu'il existe une suite de t.a. T_n qui croissent P-p.s. vers $+\infty$, et tels que $M^{T_n}\in H^1(P)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Voici une démonstration très simple de ce résultat : il suffit de démontrer que toute martingale uniformément intégrable M appartient localement à $H^1(P)$. Or si $T_n = \inf\{t \mid |M_t|\geq n\}$, les t.a. T_n croissent P-p.s. vers $+\infty$, et la martingale M^{T_n} appartient à $H^1(P)$. En effet, $\sup_t |M^{T_n}_t| \leq n + |M_{T_n}|1_{\{T_n<\infty\}}$, et l'expression de droite est intégrable.

Nous utilisons encore l'identification du dual de $H^1(P)$ à l'espace BMO(P), mais nous ne nous servons que de la propriété : si $M\in BMO(P)$, M est localement bornée (en effet, les sauts de M sont alors bornés ; avec les mêmes t.a. T_n , on a donc $\sup_t |M_{t\wedge T_n}| \in L^\infty(P)$).

1. Un théorème d'analyse fonctionnelle et quelques applications

1.1. Nous énonçons tout d'abord le théorème de Douglas [20], et nous donnons sa démonstration, essentiellement telle qu'elle figure en [20], ce qui nous permettra en particulier de la comparer à la démonstration du théorème 2.7, relatif à un problème de martingales.

1. Du moins si M_0 est intégrable. Sinon, il faut remplacer M^{T_n} par $M^{T_n}I_{\{T_n>0\}}$.

<u>Théorème 1.1</u> . <u>Soient</u> $(X,\underline{\underline{X}},\mu)$ <u>un espace de probabilité</u>, <u>et</u> F <u>un ensemble de fonctions réelles</u>, $\underline{\underline{X}}$-<u>mesurables et</u> μ-<u>intégrables</u>, <u>contenant la fonction</u> 1. <u>Notons</u>

$$\underline{\underline{M}}_\mu = \underline{\underline{M}}_\mu(F) = \{ \nu \in \underline{\underline{M}}^1_+(X,\underline{\underline{X}}) \mid \forall f \in F \ , \int |f| d\nu < \infty \ \underline{\text{et}} \ \int f d\nu = \int f d\mu \}$$

<u>Les deux assertions suivantes sont équivalentes</u>

1) μ <u>est un point extrémal de</u> $\underline{\underline{M}}_\mu$.
2) F <u>est total dans</u> $L^1(\mu)$.

<u>Remarques 1.2</u> . L'assertion 1) est clairement équivalente à

1') μ <u>est un point extrémal de</u> $\underline{\underline{M}}'_\mu = \{ \nu \in \underline{\underline{M}}_\mu \mid \nu \ll \mu \}$

On peut donc remplacer, dans l'énoncé du théorème 1.1., l'ensemble F de fonctions par un ensemble F de classes (pour l'égalité μ-p.s.) de fonctions $\underline{\underline{X}}$-mesurables et μ-intégrables.

Si l'on ne faisait pas, a priori, appartenir la fonction 1 à F, on aurait $\underline{\underline{M}}_\mu(F) = \underline{\underline{M}}_\mu(F \cup \{1\})$ puisque $\underline{\underline{M}}_\mu(F)$ est composé de lois de probabilité, mais la condition 1) entraînerait seulement que $F \cup \{1\}$ est total dans L^1.

Pour démontrer le théorème 1.1, nous aurons besoin du

<u>Lemme 1.3</u> . μ <u>est un point extrémal de</u> $\underline{\underline{M}}_\mu$ <u>si, et seulement si, la seule classe de fonctions</u> $g \in L^\infty(\underline{\underline{X}},\mu)$ <u>telle que</u> : $\forall f \in F$, $\int fg d\mu = 0$, <u>est la classe nulle</u>.

<u>Démonstration</u> : 1) Supposons que μ soit point extrémal de $\underline{\underline{M}}_\mu$. Soit $g \in L^\infty(\underline{\underline{X}},\mu)$, essentiellement bornée par la constante $k \in]0,\infty[$, telle que : $\forall f \in F$, $\int fg d\mu = 0$. Les mesures $\mu_1 = (1+\frac{g}{2k})\mu$ et $\mu_2 = (1-\frac{g}{2k})\mu$ sont des probabilités (on utilise ici le fait que $1 \in F$) et appartiennent à $\underline{\underline{M}}_\mu$. Comme on a $\mu = \frac{1}{2}(\mu_1+\mu_2)$, et que μ est point extrémal de $\underline{\underline{M}}_\mu$, on a $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, d'où $g=0$ μ-p.s..

2) Inversement, supposons la seconde propriété vérifiée. Si μ admet la décomposition $\mu = \alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2$ ($\alpha \in]0,1[$, $\mu_i \in \underline{\underline{M}}_\mu$), alors $\mu_1 \leqq \frac{1}{\alpha}\mu$, et donc il existe $g \in L^\infty(\underline{\underline{X}},\mu)$, $g \leqq \frac{1}{\alpha}$ μ-p.s., telle que $d\mu_1 = g d\mu$; μ_1 appartenant à $\underline{\underline{M}}_\mu$, on a $\forall f \in F$ $\int fg d\mu = \int f d\mu$, ou encore $\int f(g-1) d\mu = 0$. Cela entraîne, d'après l'hypothèse, $g-1=0$ μ-p.s., et donc $\mu_1 = \mu_2 = \mu$. μ est donc un point extrémal de $\underline{\underline{M}}_\mu$.

<u>Démonstration du théorème 1.1</u> .

D'après le théorème de Hahn-Banach, F est total dans $L^1(\mu)$ si, et seulement si, la seule forme linéaire continue ℓ sur $L^1(\mu)$, nulle sur F, est la forme nulle. Or une telle forme ℓ se représente par

$$\forall f \in L^1(\mu) \qquad \ell(f) = \int fg d\mu \quad \text{avec } g \in L^\infty(\mu)$$

et la condition de nullité sur F s'écrit $\forall f \in F$, $\int fg d\mu = 0$. Donc, d'après le lemme 1.3 , F est total dans $L^1(\mu)$ si et seulement si μ est un point extrémal de $\underline{\underline{M}}_\mu$.

1.2 . Nous donnons maintenant des compléments, exemples et applications du théorème 1.1.

Le théorème 1.1 s'applique à la caractérisation des points extrémaux de sous-ensembles $\underline{\underline{M}}$ de $\underline{\underline{M}}_+^1(X,\underline{\underline{X}})$ définis de la façon suivante : soit F un ensemble de fonctions $\underline{\underline{X}}$-mesurables réelles, contenant la fonction 1, et soit $(c_f)_{f\in F}$ une famille de nombres réels. Notons

$$\underline{\underline{M}} = \{ \mu \in \underline{\underline{M}}_+^1(X,\underline{\underline{X}}) \mid \forall f \in F , \int |f| d\mu < \infty \text{ et } \int f d\mu = c_f \}$$

Alors on a, avec les notations du théorème 1.1, $\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{M}}_\mu(F)$ pour tout $\mu \in \underline{\underline{M}}$, et donc μ est un point extrémal de $\underline{\underline{M}}$ si, et seulement si, F est total dans $L^1(\mu)$.

Remarquons que, si $X=\mathbb{R}$ et si F est la famille des applications $x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{N}$), cette question est liée au problème classique des moments (cf. [19] par exemple).

Rappelons maintenant l'application du théorème de Douglas faite dans le livre de Alfsen [17]. Ceci constitue notre premier exemple.

K est un ensemble convexe compact, A(K) désigne l'ensemble des fonctions affines continues sur K. Si $\mu \in \underline{\underline{M}}_+^1(K)$, on note x_μ le barycentre de μ, caractérisé par

$$\forall a \in A(K) , \quad a(x_\mu) = \int a(x) d\mu(x)$$

$\underline{\underline{M}}_x$ est l'ensemble des mesures positives sur K, admettant pour barycentre x . Si μ est un point extrémal de $\underline{\underline{M}}_{x_\mu}$, μ est dite simpliciale . D'après le théorème 1.1, μ est simpliciale si, et seulement si, A(K) est dense dans $L^1(\mu)$.

Dans le cas particulier où K est un ensemble convexe compact de $\mathbb{R}^n$, un théorème de Carathéodory donne une autre caractérisation des mesures de probabilité simpliciales : $\mu \in \underline{\underline{M}}_+^1(K)$ est simpliciale si, et seulement si, son support est un ensemble fini formé de points affinement indépendants (et comporte donc au plus n+1 points). Voir par exemple [17], proposition I.6.11 . Remarquons que dans ce cas particulier, si μ est simpliciale, alors A(K) s'identifie à $L^1(\mu)$ tout entier, et même à $L^p(\mu)$ pour $1 \leq p \leq \infty$.

D'une façon générale on peut se poser le problème de savoir (avec les notations du théorème 1.1) si, lorsque μ est un point extrémal de $\underline{\underline{M}}_\mu$, et lorsque F est inclus dans $\underline{\underline{L}}^p(\mu)$ pour un p fixé , $p \in]1,\infty[$ [(1)],

---

1. Pour le cas $p=\infty$, voir la dernière partie de l'appendice.

alors F est total dans $L^p(\mu)$. Dans son article, Douglas fournit un contre-exemple à cette assertion, ainsi que des conditions suffisantes pour qu'elle soit vérifiée. Dans le cadre de l'étude d'Alfsen, M. Capon a montré qu'il n'en était pas toujours ainsi [18]. Nous donnons ci-dessous une proposition générale due à M. Capon, avec une démonstration différente.

Proposition 1.4 . Soient $p\in]1,\infty[$, et p' l'exposant conjugué de p. Soit $F \subset L^p(\mu)$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1) F est total dans $L^p(\mu)$.

2) Pour toute classe $g\in L^{p'}(\mu)$ vérifiant $g\geq 0$ et $\int g d\mu=1$, la probabilité $\nu=g.\mu$ est un point extrémal de $\underline{\underline{M}}_\nu$.

Démonstration : 1) => 2). Soit donc $g\in L^{p'}(\mu)$, telle que $\nu=g.\mu$ soit une probabilité. D'après le théorème 1.1, $\nu=g.\mu$ est un point extrémal de $\underline{\underline{M}}_\nu$ si, et seulement si, F est total dans $L^1(\underline{\underline{X}},\nu)$. Il suffit donc de montrer que si $h\in L^\infty(\underline{\underline{X}},\nu)$ vérifie

$$\forall\, f\in F\ ,\ \int fhd\nu=0 \quad ,\quad \text{on a}\ \ h=0\ \ \nu\text{-ps.}$$

Or $\int fhd\nu = \int f(gh)d\nu$. D'après 1), comme $gh\in L^{p'}(\mu)$, on a $gh=0$ μ-ps, et donc $h=0$ ν-ps.

2) => 1). Il suffit ici de montrer que si $h\in L^{p'}(\mu)$ vérifie :

$$\forall\, f\in F\ ,\ \int fhd\mu = 0 \quad ,\quad \text{alors}\ h=0\ \mu\text{-ps.}$$

Supposons que h ne soit pas nulle μ-ps. Alors, quitte à diviser h par $\int|h|d\mu$, on peut supposer que $\nu=|h|.\mu$ est une probabilité. Or si on note h^+ (resp. h^-) la partie positive (resp. négative) de h, on a

$$\forall\, f\in F\ ,\ \int fh^+d\mu = \int fh^-d\mu \quad ,\ \text{donc}\ \nu=|h|.\mu = \tfrac{1}{2}((2h)^+.\mu+(2h^-).\mu)$$

ν est donc la demi-somme de deux probabilités de $\underline{\underline{M}}_\nu$, ce qui entraîne, d'après l'extrémalité de ν dans $\underline{\underline{M}}_\nu$, que $|h|=2h^+=2h^-$ μ-ps, donc $h=0$ μ-ps contrairement à notre hypothèse.

Notre second exemple est relatif aux images de probabilités ou, ce qui revient au même, aux restrictions de probabilités à des sous-tribus.

Soient $(X,\underline{\underline{X}})$, $(Y_i,\underline{\underline{Y}}_i)_{i\in I}$ des espaces mesurables, et pour tout i, soient $\nu_i\in\underline{\underline{M}}^1_+(Y_i,\underline{\underline{Y}}_i)$, $h_i : X \longrightarrow Y_i$ des lois et des applications $\underline{\underline{X}}|\underline{\underline{Y}}_i$-mesurables. Notons

$$\underline{\underline{M}}^{(h_i,\nu_i,i\in I)} = \{\mu\in\underline{\underline{M}}^1_+(X,\underline{\underline{X}})\ \mid\ \forall\, i\in I\ ,\ h_i(\mu)=\nu_i\ \}$$

Proposition 1.5. Soit $\mu \in \underline{\underline{M}}^{(h_i, \nu_i, i \in I)}$. μ *est un point extrémal de* $\underline{\underline{M}}^{(h_i, \nu_i, i \in I)}$ *si, et seulement si, les fonctions de la forme* $\sum_{j \in J} \varphi_j \circ h_j$, *où* J *est une partie finie de* I *et* $\varphi_j \in b(\underline{\underline{Y}}_j)$ *pour tout* j, *sont denses dans* $L^1(\mu)$.

Démonstration. Posons $F = \{ \varphi_i \circ h_i \mid \varphi_i \in b(\underline{\underline{Y}}_i),\ i \in I \}$. La propriété $h_i(\mu) = \nu_i$ est équivalente à

$$\forall\ \varphi_i \in b(\underline{\underline{Y}}_i)\ ,\quad \int \varphi_i \circ h_i \, d\mu = \int \varphi_i \, d\nu_i$$

Avec les notations du théorème 1.1, on a donc $\underline{\underline{M}}^{(h_i, \nu_i, i \in I)} = \underline{\underline{M}}_{\mu}$. D'après ce théorème, μ est extrémale dans $\underline{\underline{M}}^{(h_i, \nu_i, i \in I)}$ si, et seulement si, F est total dans $L^1(\mu)$. $\square$

Cette proposition s'applique de façon évidente lorsque l'on considère des probabilités sur un espace produit $\prod_{t \in T} (E_t, \underline{\underline{E}}_t)$, dont les marginales sur des produits partiels $\prod_{t \in S_i} (E_t, \underline{\underline{E}}_t)$, pour une famille $(S_i, i \in I)$ de sous-ensembles de T, sont fixées.

Le cas où l'ensemble d'indices I est réduit à un élément est particulièrement important. Soit $(Y, \underline{\underline{Y}}, \nu)$ un espace de probabilité, et soit $h : X \to Y$ une fonction $\underline{\underline{X}}|\underline{\underline{Y}}$-mesurable. Notons

$$\underline{\underline{M}}^{h,\nu} = \{ \mu \in \underline{\underline{M}}^1_+(X, \underline{\underline{X}}) \mid h(\mu) = \nu \}$$

et $\underline{\underline{H}}$ la tribu engendrée par h. On note $\underline{\underline{X}}^{\mu}$ la tribu complétée de $\underline{\underline{X}}$ pour μ, et $\underline{\underline{H}}^{\mu}$ la tribu obtenue en ajoutant à $\underline{\underline{H}}$ les ensembles μ-négligeables.

Proposition 1.6. Soit $\mu \in \underline{\underline{M}}^{h,\nu}$. *Alors* μ *est un point extrémal de* $\underline{\underline{M}}^{h,\nu}$ *si, et seulement si,* $\underline{\underline{X}}^{\mu} = \underline{\underline{H}}^{\mu}$.

Démonstration. Posons $F = \{ \varphi \circ h \mid \varphi \in b(\underline{\underline{Y}}) \}$. D'après la proposition 1.5, μ est extrémale si, et seulement si, F (qui est un espace vectoriel) est dense dans $L^1(\mu)$. Or, si F y est dense, on a $\underline{\underline{X}}^{\mu} \subset \underline{\underline{H}}^{\mu}$, donc $\underline{\underline{X}}^{\mu} = \underline{\underline{H}}^{\mu}$.

Inversement, rappelons que toute fonction réelle $\underline{\underline{H}}$-mesurable f s'écrit sous la forme $f = \varphi \circ h$, où $\varphi : Y \to \mathbb{R}$ est une fonction $\underline{\underline{Y}}$-mesurable. Donc, si $\underline{\underline{X}}^{\mu} = \underline{\underline{H}}^{\mu}$, F est dense dans $L^1(\mu)$. $\square$

Remarques. Supposons en particulier que l'on ait $X = \mathbb{R} \times Y$, h étant la projection de $\mathbb{R} \times Y$ sur Y, et $\underline{\underline{X}}$ la tribu produit. Soit p la projection sur $\mathbb{R}$. On a $\underline{\underline{X}}^{\mu} = \underline{\underline{H}}^{\mu}$ si, et seulement si, p est égale μ-ps à une fonction $\underline{\underline{H}}$-mesurable, autrement dit s'il existe une fonction réelle g sur Y telle que $x = p(x,y) = g(h(x,y)) = g(y)$ pour μ-presque tout (x,y). Cela exprime que μ est portée par le *graphe* de g.

Les résultats précédents, et cette dernière remarque, retrouvent sous une forme plus générale les conclusions d'un travail de Mokobodzki [21]

(avec une démonstration différente, car ce travail est antérieur à l' article [20] de Douglas[1]). Généralisons la remarque précédente :

<u>Corollaire 1.7</u> (cf. [21], corollaire 2). <u>Soit</u> μ <u>point extrémal de</u> $\underline{\underline{M}}^{h,\nu}$, <u>et soit</u> $f : X \to \mathbb{R}$ <u>une fonction</u> $\underline{\underline{X}}$<u>-mesurable</u>.

<u>Il existe</u> $A \in \underline{\underline{X}}$, <u>de</u> μ<u>-mesure pleine</u>, <u>tel que</u>

$$\forall\, x,y \in A\ ,\quad h(x)=h(y) \Rightarrow f(x)=f(y)\ .$$

<u>Démonstration</u>. D'après la proposition 1.6, il existe une fonction $\underline{\underline{Y}}$-mesurable $\varphi : Y \to \mathbb{R}$, telle que $f=\varphi\circ h$ μ-ps. Il suffit alors de poser $A = \{ x \mid f(x)=\varphi(h(x))\}$ pour en déduire le corollaire. ▯

Dans le cas particulier où $X=Y$, $\underline{\underline{Y}}$ étant une sous-tribu de $\underline{\underline{X}}$ et h l'application identique de X, qui est $\underline{\underline{X}}|\underline{\underline{Y}}$-mesurable, on note

$$\underline{\underline{M}}^{\underline{\underline{Y}},\nu} = \{ \mu \in \underline{\underline{M}}^1_+(X,\underline{\underline{X}}) \mid \mu|_{\underline{\underline{Y}}}=\nu\}$$

et l'on déduit de la proposition 1.6 le :

<u>Corollaire 1.8</u> . <u>Soit</u> $\mu \in \underline{\underline{M}}^{\underline{\underline{Y}},\nu}$. <u>Alors</u> μ <u>est point extrémal de</u> $\underline{\underline{M}}^{\underline{\underline{Y}},\nu}$ <u>si, et seulement si</u>, $\underline{\underline{X}}^{\mu}=\underline{\underline{Y}}^{\mu}$.

Notre <u>troisième exemple</u>, dont l'intérêt est essentiellement pédagogique, est relatif aux systèmes dynamiques. On y voit en particulier comment varie l'ensemble des points extrémaux de $\underline{\underline{M}}_{\mu}$ (théorème 1.1) lorsque F varie.

Soient $(X,\underline{\underline{X}})$ un espace mesurable et T une bijection bimesurable de $(X,\underline{\underline{X}})$. Notons $\underline{\underline{M}}^T$ l'ensemble des probabilités sur $(X,\underline{\underline{X}})$ invariantes par T, et $\underline{\underline{I}}=\{A \in \underline{\underline{X}} \mid TA=A\}$ la tribu des ensembles T-invariants.

<u>Proposition 1.9</u>. <u>Soit</u> $\mu \in \underline{\underline{M}}^T$. μ <u>est un point extrémal de</u> $\underline{\underline{M}}^T$ <u>si, et seulement si, l'ensemble</u> $F_0 \cup \{1\}$ <u>est total dans</u> $L^1(\mu)$, <u>où</u>

$$F_0 = \{ f\circ T - f \mid f \in b(\underline{\underline{X}})\}\ .$$

<u>Démonstration</u>. Il suffit de remarquer que $\underline{\underline{M}}^T=\{\nu \in \underline{\underline{M}}^1_+(X,\underline{\underline{X}}) \mid \forall\, \varphi \in F_0,\ \int\varphi d\nu=0\} =\{\nu \in \underline{\underline{M}}^1_+(X,\underline{\underline{X}}) \mid \forall \varphi \in F_0,\ \int\varphi d\nu=\int\varphi d\mu\}$. On applique alors le théorème 1.1, avec $F=F_0\cup\{1\}$. ▯

On peut retrouver, à partir de ce résultat, l'équivalence bien connue

$$\mu \in \underline{\underline{M}}^T \text{, point extrémal de } \underline{\underline{M}}^T \iff \underline{\underline{I}} \text{ est } \mu\text{-triviale}$$

en remarquant que l'orthogonal de F_0 dans la dualité (L^1,L^∞) est $L^\infty(X,\underline{\underline{I}}^{\mu},\mu)$.

1. Voir aussi M.M. ERŠOV. The Choquet theorem and stochastic equations. Analysis Mathematica 1, 1975, p.259-271.

Considérons maintenant $\mu\in\underline{\underline{M}}^T$ (non nécessairement extrémale). Posons $\nu=\mu|_{\underline{\underline{I}}}$, et notons $\underline{\underline{M}}^{T,\nu}= \{\lambda\in\underline{\underline{M}}^T |\ \lambda|_{\underline{\underline{I}}}=\nu\}$. On montre aisément que $\underline{\underline{M}}^{T,\nu}$ est constitué de la seule mesure de probabilité μ (qui y est donc extrémale). Remarquons alors que, d'après le théorème 1.1, l'ensemble des fonctions $g\in b(\underline{\underline{I}})$ et $f\circ T-f$, $f\in b(\underline{\underline{X}})$ est total dans $L^1(\mu)$, d'où l'on déduit facilement le théorème ergodique ≪dans L^1≫ :

$$\forall\ f\in L^1(\mu)\ ,\quad \frac{1}{n}(f+f\circ T+\ldots+f\circ T^n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu(f|\underline{\underline{I}}) \quad \text{dans } L^1\ .$$

1.3 Nous terminons ce paragraphe par un dernier <u>complément</u> au théorème de Douglas : lorsqu'on poursuit l'étude de l'extrémalité de μ dans $\underline{\underline{M}}_\mu$, il est naturel de se poser la

<u>Question</u> 1 : <u>Quand a t'on</u> $\underline{\underline{M}}_\mu=\{\mu\}$?

En fait, on ne répondra ici qu'à la

<u>Question</u> 1': <u>Quand a t'on</u> $\underline{\underline{M}}'_\mu=\{\mu\}$?

$\underline{\underline{M}}'_\mu$ étant (cf. remarques 1.2) l'ensemble des éléments de $\underline{\underline{M}}_\mu$ absolument continus par rapport à μ . Si $\underline{\underline{M}}'_\mu=\{\mu\}$, on dit que μ est <u>infimale</u>, terme emprunté à un article à paraître de V. Beneš (relatif au second exemple ci-dessus, et à ses applications à certains problèmes de martingales). Avant de continuer, faisons quelques remarques :

- Si μ est infimale, alors μ est extrémale dans $\underline{\underline{M}}_\mu$.
- Si l'on note $\underline{\underline{M}}''_\mu = \{\ \nu\in\underline{\underline{M}}_\mu\ |\ \nu \simeq \mu\ \}$, on a $\frac{1}{2}\{\underline{\underline{M}}'_\mu+\mu\} \subset \underline{\underline{M}}''_\mu$, et toute probabilité μ telle que $\underline{\underline{M}}''_\mu = \{\mu\}$ est donc infimale. Une telle probabilité est appelée <u>standard</u> par Yen et Yoeurp en [32].

  Autrement dit : (μ standard) <=> (μ infimale) .
- En conséquence, chaque fois que l'on parvient à caractériser les mesures μ extrémales dans $\underline{\underline{M}}_\mu$ par une condition ne faisant intervenir que la classe d'équivalence de μ - c'est le cas de la proposition 1.6 (condition $\underline{\underline{X}}^\mu=\underline{\underline{H}}^\mu$) et de la proposition 1.9 (condition de μ-trivialité de $\underline{\underline{I}}$) - on a l'équivalence

  (μ extrémale dans $\underline{\underline{M}}_\mu$) <=> (μ infimale)

En effet, l'implication <= a été vue plus haut. Inversement, si μ est extrémale dans $\underline{\underline{M}}_\mu$, tous les points de l'ensemble convexe $\underline{\underline{M}}''_\mu$ sont extrémaux, ce qui n'est possible que si $\underline{\underline{M}}''_\mu=\{\mu\}$, et μ est standard, donc infimale.

Voici maintenant une caractérisation des probabilités infimales

<u>Proposition 1.10</u> . <u>Soit</u> $F\subset L^\infty(\mu)$. <u>Les deux assertions suivantes sont équivalentes</u> :

1) μ est infimale.

2) La seule fonction $g\in L^1(\mu)$, bornée inférieurement (ou : supérieurement) telle que : $\forall f\in F$, $\int fg d\mu = 0$, est la fonction nulle[1].

En particulier, si F est faiblement dense dans $L^{\infty}(\mu)$, μ est infimale (mais ce résultat était évident a priori).

Démonstration : 1)=>2) . Soit g une fonction bornée inférieurement, telle que $\int fg d\mu=0$ pour toute $f\in F$. Il existe une constante $c>0$ telle que $g \geqq -c$, et la fonction $h=1+\frac{g}{c}$ est positive, d'intégrale 1 puisque $1\in F$. La loi $\nu=h.\mu$ appartient à $\underline{\underline{M}}'_{\mu}$, donc $\nu=\mu$ d'après l'hypothèse, ce qui entraîne $g=0$ μ-ps.

2)=>1) . Soit $\nu=g.\mu \in \underline{\underline{M}}'_{\mu}$. Alors $h=g-1 \geqq -1$ vérifie $\int fh d\mu=0$ pour toute $f\in F$. D'après 2) on a $g=1$ μ-ps, et donc μ est infimale.

Remarque : Signalons encore, indépendamment du caractère infimal de μ, l'équivalence des assertions suivantes (en supposant toujours $F\subset L^{\infty}(\mu)$)

a) La seule fonction $g\in L^1(\mu)$, orthogonale à F, est $g=0$ (autrement dit, F est faiblement dense dans $L^{\infty}(\mu)$).

b) Pour toute $g\in L^1_+(\mu)$ d'intégrale 1, la probabilité $\nu=g.\mu$ est extrémale dans $\underline{\underline{M}}_{\nu}$.

Cette équivalence se démontre en suivant pas à pas la démonstration de la proposition 1.4.

2. Applications à des problèmes de martingales.

2.1. Un problème général.

Soit $(\Omega, \underline{\underline{F}}^{o}, (\underline{\underline{F}}^{o}_t)_{t\geqq 0})$ un espace filtré, dont la filtration $(\underline{\underline{F}}^{o}_t)$ est continue à droite. On suppose fixé, dans ce paragraphe, un processus réel $(X_t, t\geqq 0)$, qui n'est pas nécessairement $\underline{\underline{F}}^{o}_t$-adapté .

ν désigne une fonction d'ensembles, à valeurs dans $\mathbb{R}$, définie sur les ensembles $A\times]s,t] \subset \Omega\times\mathbb{R}^*_+$, où $A \in\underline{\underline{F}}^{o}_{s-}$ et $0<s<t$. On note

$$\underline{\underline{M}}_{\nu} = \underline{\underline{M}}_{\nu}(X)=\{ P \text{ probabilités sur } (\Omega,\underline{\underline{F}}^{o}) \mid \forall t ,\ E_P[|X_t|]<\infty$$
$$\forall s<t ,\ \forall A\in\underline{\underline{F}}^{o}_{s-},\ \int_A (X_s-X_t)dP = \nu(A\times]s,t]) \ \}$$

1. Nous commettons l'abus de langage habituel, consistant à parler de fonctions alors qu'il s'agit de classes pour l'égalité μ-p.s..

Supposons que ν soit prolongeable en une mesure bornée $\overline{\nu}$ sur la tribu prévisible de $\Omega\times]0,\infty[$; les réunions d'ensembles disjoints de la forme $A\times]s,t]$ ci-dessus formant une algèbre de Boole qui engendre la tribu prévisible, le prolongement $\overline{\nu}$, s'il existe, est unique. Soit P une loi de probabilité ; supposons que X soit continu à droite et $\underline{\underline{F}}(P)_t$-adapté. Alors la condition $P\in\underline{\underline{M}}_\nu$ est équivalente à l'ensemble des conditions a) et b) que voici

a) X est une <u>$(P,\underline{\underline{F}}(P)_t)$-quasimartingale</u>, autrement dit

$$\sup_\tau \left\{ \left(\sum_{i=0}^{n-1} E[|X_{t_i} - E[X_{t_{i+1}} | F(P)_{t_i}]| \right] + E[|X_{t_n}|] \right\} < \infty$$

où $\sup_\tau$ désigne le suprémum sur les subdivisions finies de $\mathbb{R}_+$

$$\tau = (0=t_0<t_1 \;\ldots.\; < t_n < \infty)$$

b) La quasi-martingale X admet une mesure de Föllmer sur la tribu prévisible de $\Omega\times]0,\infty[$, qui est égale à $\overline{\nu}$.

(Rappelons que si l'espace filtré $(\Omega,\underline{\underline{F}}^\circ,(\underline{\underline{F}}^\circ_t))$ est suffisamment "régulier" , toute $\underline{\underline{F}}(P)_t$-quasimartingale admet une mesure de Föllmer sur $\Omega\times[0,\infty]$: cf. Föllmer [22]). En particulier, si $\nu=0$ et X est $\underline{\underline{F}}(P)_t$-adapté, $P\in\underline{\underline{M}}_\nu$ signifie que X est une <u>$(P,\underline{\underline{F}}(P)_t)$-martingale</u>.

Nous notons $\mathcal{E}_\nu$ l'ensemble des points extrémaux de $\underline{\underline{M}}_\nu$. On déduit immédiatement du théorème 1.1 une caractérisation générale des éléments de $\mathcal{E}_\nu$ (nous ne l'énonçons pour un seul couple (X,ν) que pour des raisons de simplicité : le théorème 1.1 s'appliquerait aussi bien à la détermination des points extrémaux de $\underline{\underline{M}}=\bigcap_i \underline{\underline{M}}_{\nu_i}(X_i)$ pour une famille quelconque $(X_i,\nu_i)_{i\in I}$ de tels couples)

<u>Théorème 2.1</u> . <u>Soit</u> $P\in\underline{\underline{M}}_\nu$. <u>Il y a équivalence entre</u>

1) $P\in\mathcal{E}_\nu$.

2) <u>Les variables</u> 1 <u>et</u> $1_A(X_t-X_s)$ $(s<t,\ A\in\underline{\underline{F}}^\circ_{s-})$ <u>sont totales dans</u> $L^1(\Omega,\underline{\underline{F}}^\circ,P)$.

<u>2.2. Densité dans L^1 et dans H^1</u>.

La loi P restant désormais fixée la plupart du temps, nous ne ferons apparaître P dans les notations que lorsque ce sera indispensable pour la clarté : nous écrirons donc L^1, H^1, BMO, $\underline{\underline{F}}_t$ ... pour $L^1(P),\ldots,\underline{\underline{F}}(P)_t$. On suppose dans tout ce paragraphe que la tribu $\underline{\underline{F}}_0$ est P-triviale : cette condition permet de simplifier l'exposé, et elle n'est pas difficile à lever. On suppose en outre que $\underline{\underline{F}}=\bigvee_t \underline{\underline{F}}_t$.

Il est naturel d'associer à toute $f\in L^1$ la martingale uniformément intégrable $\tilde{f}_t=E[f|\underline{\underline{F}}_t]$ (supposée cadlag comme toutes les martingales ou martingales locales que l'on rencontrera par la suite). L'identification de f à $\tilde{f}$ nous permet d'identifier l'espace L^1 à l'espace de toutes les martingales uniformément intégrables M , muni de la norme $\|M\|_1=E[|M_\infty|]$. Lorsque nous considérerons ainsi L^1 comme un espace de martingales, nous le noterons $\tilde{L}^1$ ($\tilde{L}^1(P)$ si nécessaire). Grâce à cette identification des fonctions intégrables à des martingales, nous allons donner une version du théorème de Douglas en termes de densité dans un espace de martingales, qui sera l'espace H^1.

Si $\underline{\underline{N}}$ est un ensemble de P-martingales locales, on définit $\mathcal{L}^1(\underline{\underline{N}})$ (ou $\mathcal{L}^1(\underline{\underline{N}},P)$ s'il y a risque de confusion) comme le plus petit sous-espace vectoriel fermé de H^1, stable par arrêt (i.e. $M\in\mathcal{L}^1(\underline{\underline{N}})$ et T t.a. => $M^T\in\mathcal{L}^1(\underline{\underline{N}})$) contenant les martingales N^T ($N\in\underline{\underline{N}}$, T t.a.) qui appartiennent à H^1 (+).

Lorsque $\underline{\underline{N}}$ est réduit à une seule martingale locale X, nous écrirons simplement $\mathcal{L}^1(X)$. Nous recopions la proposition 1 de [15], qui permet de caractériser $\mathcal{L}^1(X)$:

<u>Lemme 2.2.</u>. <u>Si</u> X <u>est une martingale locale</u>, <u>on a</u>

$$\mathcal{L}^1(X) = \{ \int_{[0}^{\cdot]} H_s dX_s \mid H \text{ prévisible, } E[(\int_{[0,\infty[} H_s^2 d[X,X]_s)^{1/2}]<\infty \}$$

Démonstration rapide : l'ensemble de droite est un espace vectoriel V qui contient toutes les arrêtées $X^T\in H^1$. Il est stable par arrêt. Pour montrer qu'il est fermé, on considère l'espace Γ^1 des processus prévisibles H tels que $[\![H]\!] = E[(\int_{[0,\infty[} H_s^2 d[X,X]_s)^{1/2}]<\infty$, et on vérifie qu'il est complet pour la norme $[\![\ ]\!]$, après quoi on remarque que $H\mapsto\int_{[0}^{\cdot} H_s dX_s$ est une isométrie de l'espace Γ^1 dans H^1, dont l'image est V ; celui-ci est donc fermé. Soit (T_n) une suite de t.a. telle que $T_n\uparrow+\infty$ et $X^{T_n}\in H^1$. On vérifie que les processus de la forme $H1_{[0,T_n]}$ ($n\in\mathbb{N}$, $H=1_{A\times\{0\}}$, $A\in\underline{\underline{F}}_0$ ou bien $H=1_{A\times]s,t]}$, avec $s<t$, $A\in\underline{\underline{F}}_s$) forment un ensemble total dans Γ^1, et il en résulte sans peine que V est le plus petit espace vectoriel fermé dans H^1 , stable par arrêt et contenant les X^{T_n} .

<u>Remarque</u> . $\underline{\underline{F}}_0$ étant P-triviale, on peut distinguer deux cas : si $X_0=0$, $\mathcal{L}^1(X) = \{ \int_0^{\cdot} H_s dX_s | \ldots \}$, ces intégrales stochastiques étant nulles en 0, relatives à l'intervalle $]0,.]$. Si $X_0\neq 0$, $\mathcal{L}^1(X)=\{c+\int_0^{\cdot} H_s dX_s \mid c\in\mathbb{R},\ldots\}$, avec des intégrales stochastiques du même type.

(+) Si $\underline{\underline{F}}_0$ n'est pas triviale, il faut ajouter que $\mathcal{L}^1(\underline{\underline{N}})$ doit être stable par multiplication par 1_A , pour tout $A\in\underline{\underline{F}}_0$.

Si $\underline{\underline{N}}$ est un ensemble quelconque de martingales locales, l'espace $\mathcal{L}^1(\underline{\underline{N}})$ est caractérisé par le lemme suivant :

<u>Lemme 2.3.</u> $\mathcal{L}^1(\underline{\underline{N}})$ <u>est le sous-espace vectoriel fermé dans</u> H^1 <u>engendré par</u> $\cup_{X\in\underline{\underline{N}}} \mathcal{L}^1(X)$.

<u>Démonstration</u> . Soit $\underline{\underline{K}}$ le sous-espace vectoriel engendré par $\cup_X \mathcal{L}^1(X)$. Il est clair que $\underline{\underline{K}}$ est stable par arrêt, et il en est de même de sa fermeture $\overline{\underline{\underline{K}}}$, car l'opération d'arrêt est une contraction de H^1. $\overline{\underline{\underline{K}}}$ possède donc toutes les propriétés exigées par la définition de $\mathcal{L}^1(\underline{\underline{N}})$, et tout sous-espace vectoriel fermé de H^1 vérifiant ces propriétés contient $\overline{\underline{\underline{K}}}$. D'où : $\overline{\underline{\underline{K}}} = \mathcal{L}^1(\underline{\underline{N}})$.

<u>Remarque</u> . Cette théorie des espaces stables dans H^1 est bien entendu calquée, mutatis mutandis, sur la théorie classique des espaces stables dans $\underline{\underline{M}}^2$, due à Kunita-Watanabe [1]. Celle-ci sera utilisée plus loin[1]. De même que nous avons défini $\mathcal{L}^1(\underline{\underline{N}})$, le sous-espace stable engendré dans H^1 par une famille de martingales locales, nous pouvons définir $\mathcal{L}^2(\underline{\underline{N}})$ comme le sous-espace stable engendré dans $\underline{\underline{M}}^2$ par une famille de martingales localement de carré intégrable : c'est le sous-espace stable (au sens de Kunita-Watanabe) engendré par les N^T ($N\in\underline{\underline{N}}$, T t.a. tel que $N^T\in\underline{\underline{M}}^2$) (auxquelles on doit ajouter les martingales $1_A N_0$, $A\in\underline{\underline{F}}_0$,$N\in\underline{\underline{N}}$, $\int_A N_0^2 dP<\infty$ si $\underline{\underline{F}}_0$ n'est pas P-triviale).

Rappelons que, si l'on identifie une martingale uniformément intégrable X à sa variable aléatoire terminale X_∞ , on a pour $1<p<\infty$

$$\|X_\infty\|^p_{L^p} = E[|X_\infty|^p] \leq \|X\|^p_{H^p} = E[\sup_t |X_t|^p] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E[|X_\infty|^p]$$

où la dernière relation est l'inégalité de Doob, de sorte que $\tilde{L}^p$ (i.e. L^p considéré comme espace de martingales) s'identifie à H^p avec une norme équivalente. Si $p=1$, on a seulement $H^1 \subset \tilde{L}^1$, avec $\|X_\infty\|_{L^1} \leq \|X\|_{H^1} \leq +\infty$ pour toute martingale uniformément intégrable X.

Le théorème suivant remédie partiellement à cela. Je remercie J.M. Bismut, pour une remarque qui m'a permis d'améliorer une version antérieure de ce théorème.

Fixons d'abord les notations. Soit A un ensemble de martingales uniformément intégrables . Nous désignons par Φ le sous ensemble de H^1

$$\Phi = \Phi(A) = \{\, Y^T \mid Y\in A \text{ , } T \text{ t.a. tel que } Y^T\in H^1 \}$$

(autrement dit, Φ est l'intersection de H^1 et du stabilisé de l'ensemble A

1. Dans la seconde partie de l'appendice.

pour l'arrêt). Nous désignons par Ψ l'enveloppe convexe de Φ , par $\overline{\Phi}$ la fermeture faible de Φ dans H^1 (autrement dit, pour la topologie $\sigma(H^1,BMO)$), et par $\overline{\Psi}$ la fermeture de Ψ dans H^1 : comme Ψ est convexe, il est inutile de spécifier s'il s'agit de la fermeture faible ou forte, en vertu du théorème de Hahn-Banach. Noter que $\overline{\Phi}$ et $\overline{\Psi}$ sont stables par arrêt. La trivialité de $\underline{\underline{F}}_0$ n'est pas utilisée dans l'énoncé suivant.

Théorème 2.4. Soit Y une martingale uniformément intégrable. Supposons que des martingales $Y^n \in A$[1] convergent vers Y dans $\tilde{L}^1$, ou même seulement pour la topologie faible $\sigma(\tilde{L}^1,\tilde{L}^\infty)$.

Alors, pour tout t.a. T tel que $Y^T \in H^1$, on a $Y^T \in \overline{\Phi}$.

Corollaire 2.5.1. Pour tout t.a. T tel que $Y^T \in H^1$, Y^T appartient à l'adhérence forte de l'enveloppe convexe Ψ de Φ .[2]

Démonstration. Le corollaire résulte immédiatement du théorème, et des remarques précédant l'énoncé.

Pour établir le théorème, nous pouvons nous ramener au cas où Y appartient à H^1, avec $T=\infty$: admettons le résultat sous ces hypothèses, et étendons le à la situation de l'énoncé. Les opérateurs d'espérance conditionnelle étant continus dans L^1, nous pouvons appliquer le théorème aux martingales arrêtées $(Y^n)^T$, Y^T , les variables terminales $(Y^n)^T_\infty = E[Y^n_\infty \,|\, \underline{\underline{F}}_T]$ convergeant (faiblement dans L^1) vers $E[Y_\infty \,|\, \underline{\underline{F}}_T]=Y^T_\infty$. Comme $Y^T \in H^1$ par hypothèse, le cas particulier du théorème que nous avons admis nous dit que Y^T appartient à la fermeture faible de l'ensemble Φ relatif à la suite $(Y^n)^T$, qui est plus petit que l'ensemble Φ initial.

Nous pouvons aussi nous ramener au cas où les Y^n appartiennent à H^1, de la manière suivante : pour tout n, il existe une suite de t.a. $S^n_k \uparrow \infty$ telle que $(Y^n)^{S^n_k} \in H^1$. Posons $(Y^n)^{S^n_k} = Z^n$, en choisissant $k=k_n$ assez grand pour que $\|Y^n_\infty - Z^n_\infty\|_{L^1} = \|Y^n_\infty - E[Y^n_\infty \,|\, \underline{\underline{F}}_{S^n_k}]\|_{L^1} \leq 1/n$ (la possibilité d'un tel choix résulte du théorème de convergence des martingales). Alors nous avons $Z^n \in H^1$ pour tout n , Z^n_∞ converge faiblement dans L^1 vers Y_∞ , car on a pour $g \in L^\infty$

$$\left|\int Z^n_\infty g\, dP - \int Y_\infty g\, dP\right| \leq \|Z^n_\infty - Y^n_\infty\|_{L^1} \|g\|_{L^\infty} + \left|\int Y^n_\infty g\, dP - \int Y_\infty g\, dP\right|$$

et enfin, l'ensemble Φ relatif à la suite (Z^n) est contenu dans l'ensemble Φ initial.

1. On identifie comme d'habitude les martingales Y^n,Y à leurs variables terminales Y^n_∞ , Y_∞ ; cette hypothèse signifie simplement que Y appartient à l'adhérence forte (faible) de A dans L^1. 2. Une application de ce résultat à un problème de contrôle sera publiée ailleurs.

Ces réductions étant faites, que signifie l'énoncé ? Nous mettons H^1 et BMO en dualité par la forme bilinéaire $(L,M) \mapsto E[[L,M]_\infty]$, et il nous faut montrer :

<u>Pour toute suite finie</u> $U^1,\dots,U^d$ <u>d'éléments de</u> BMO, <u>et tout</u> $\varepsilon>0$ <u>il existe un</u> $n\in\mathbb{N}$ <u>et un temps d'arrêt</u> T <u>tels que</u>

$$\forall\ i=1,\dots,d \quad |E[[(Y^n)^T,U^i]_\infty] - E[[Y,U^i]_\infty]| < \varepsilon .$$

Nous prenons pour T un temps d'arrêt de la forme

$$T = \inf\{\ t\ :\ |U_t^1|+\dots+|U_t^d|\geq k\ \}$$

où k est choisi assez grand pour que l'on ait pour $i=1,\dots,d$

$$E[\int_{]T,\infty]} |d[Y,U^i]_s|\ ] < \varepsilon/2$$

C'est possible, car le processus $[Y,U^i]$ est à variation intégrable, Y appartenant à H^1 et U^i à BMO (inégalité de Fefferman). Ce choix étant fait, nous pouvons remplacer à $\varepsilon/2$ près $E[[Y,U^i]_\infty]$ par $E[[Y,U^i]_T] = E[[Y,(U^i)^T]_\infty]$, et il nous suffit de prouver que (T restant fixé)

$$\text{lorsque } n\to\infty \quad E[[(Y^n)^T,U^i]_\infty] = E[[Y^n,(U^i)^T]_\infty] \longrightarrow E[[Y,(U^i)^T]_\infty]$$

pour $i=1,\dots,d$. Or la martingale U^i appartient à BMO , et ses sauts (y compris le " saut en 0" U_0^i) sont donc bornés. Comme elle est bornée sur $[0,T[$, elle l'est aussi sur $[0,T]$, et la martingale $(U^i)^T$ est bornée. La martingale locale $[Y^n,(U^i)^T] - Y^n(U^i)^T$ appartient donc à la classe (D) - elle appartient en fait à H^1 - et nous avons

$$E[[Y^n,(U^i)^T]_\infty] = E[Y_\infty^n U_T^i] \text{ , et de même } E[[Y,(U^i)^T]_\infty] = E[Y_\infty U_T^i]$$

Finalement, U_T^i appartenant à L^∞, on se trouve ramené à l'hypothèse : Y_∞^n converge vers Y_∞ pour $\sigma(L^1,L^\infty)$. ▯

Voici des conséquences importantes du théorème 2.4 :

<u>Corollaire 2.5.2. Soit</u> M <u>une martingale locale. Soient</u> $(Y_t^n),(Y_t)$ <u>des martingales uniformément intégrables telles que</u> Y_∞^n <u>converge vers</u> Y_∞ <u>faiblement dans</u> L^1. <u>Si les</u> Y^n <u>admettent des représentations comme intégrales stochastiques prévisibles par rapport à</u> M

$$Y_t^n = \int_0^t \varphi_s^n\, dM_s$$

<u>il existe un processus prévisible</u> φ <u>tel que</u> $Y_t = \int_0^t \varphi_s\, dM_s$.

<u>Autrement dit</u> : $\tilde{L}^1 \cap \mathcal{L}^1_{loc}(M)$ <u>est fermé dans</u> $\tilde{L}^1$

<u>Démonstration</u> : Avec les notations du théorème 2.4, tout élément de Ψ admet une représentation comme i.s. prévisible par rapport à M, autrement dit appartient à $\mathcal{L}^1(M)$. D'après le lemme 2.2, il en est de même de

tout élément de $\overline{\mathbb{Y}}$. D'après le théorème 2.4, Y appartient localement à $\overline{\mathbb{Y}}$, et le corollaire en résulte immédiatement.

Une démonstration presque identique donne le résultat suivant, qui s'énoncerait, pour des martingales localement de carré intégrable, en termes de continuité absolue de crochets obliques $\langle Y,Y\rangle$ par rapport à A.

Corollaire 2.5.3. *Les notations Y^n,Y ayant le même sens que dans le corollaire précédent, soit A un processus croissant prévisible, et supposons que, pour tout n, Y^n possède la propriété suivante :*

pour tout processus prévisible $\varphi\geq 0$ tel que $\int_0^{\cdot}\varphi_s dA_s=0$, on a $\int_0^{\cdot}\varphi_s dY^n_s=0$.

Alors, Y possède la même propriété.

Démonstration. Il suffit de vérifier cela lorsque φ est borné. La propriété passe alors aussitôt des Y^n à $\mathbb{Y}$, puis à $\overline{\mathbb{Y}}$, puis à Y par le théorème 2.4. Le caractère prévisible de A intervient dans les applications, mais n'a pas été utilisé.

On compare maintenant les ensembles totaux dans $\tilde{L}^1$ et dans H^1:

Théorème 2.6. 1) *Soit U un ensemble de martingales uniformément intégrables, stable par arrêt. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes*

a) U *est total dans* $\tilde{L}^1$.

b) $U\cap H^1$ *est total dans* H^1.

c) $\mathcal{L}^1(U) = H^1$.

2) *Soit* $U\subset\tilde{L}^1$ *tel que* $\mathcal{L}^1(U)=H^1$(U *n'est pas nécessairement stable par arrêt). Alors l'ensemble des variables de la forme* $1_A X_0$ $(A\in\underline{\underline{F}}_0$, $X\in U)$ *et* $1_A(X_t-X_s)$ $(0<s<t,\ A\in\underline{\underline{F}}_{s-}, X\in U)$ *est total dans* L^1 .

Démonstration. Il est évident que b)=>a), puisque H^1 est dense dans $\tilde{L}^1$, et que b)=>c), puisque $\mathcal{L}^1(U)$ est fermé et contient $U\cap H^1$. Pour voir que a)=>b), nous remarquons d'abord que $U\cap H^1$ est dense dans U pour la topologie de $\tilde{L}^1$ (c'est immédiat par arrêt), de sorte que nous pouvons supposer $U\subset H^1$ sans perdre de généralité. Soit V le sous-espace engendré par U. D'après a), pour toute martingale $Y\in H^1$ il existe des martingales $Y^n\in V$ convergeant vers Y dans $\tilde{L}^1$. D'après le corollaire 2.5.1, il existe des martingales Z^n, combinaisons convexes d'arrêtées des Y^n, qui convergent vers Y dans H^1. On conclut en remarquant que les Z^n appartiennent encore à V. Nous rejetons à la fin l'implication c)=>a), pour laquelle la trivialité de $\underline{\underline{F}}_0$ est nécessaire.

Passons au 2), <u>en supposant d'abord</u> $U\subset H^1$. Nous identifions systématiquement ici les martingales uniformément intégrables et leurs variables terminales. D'après les lemmes 2.3 et 2.2, les variables de la forme

(*) $\int_{[0,\infty[} \varphi_s dX_s$ où X parcourt U

φ l'espace $\Gamma(X)$ des processus prévisibles tels que $E[(\int_{[0,\infty[} \varphi_s^2 d[X,X]_s)^{1/2}] < \infty$

forment un ensemble total dans H^1. D'autre part, les processus du type

$$\varphi = 1_{A\times\{0\}} \ (A\in\underline{\underline{F}}_0) \qquad \text{et} \qquad \varphi = 1_{A\times]s,t]} \ (s<t,\ A\in\underline{\underline{F}}_{s-})$$

forment un ensemble dense dans $\Gamma(X)$, d'où la possibilité de considérer seulement des variables (*) associées à de tels processus, et un ensemble total dans H^1 formé des variables

$$1_A X_0 \ (A\in\underline{\underline{F}}_0, X\in U) \qquad \text{et} \quad 1_A(X_t - X_s) \ (0\leq s<t,\ A\in\underline{\underline{F}}_{s-},\ X\in U)\ .$$

(Mais $\underline{\underline{F}}_0$ est P-triviale : les variables du premier type sont simplement les constantes) . On conclut en remarquant que H^1 est dense dans L^1 (immédiat par arrêt).

Passons au cas où $U\subset L^1$. Soit V l'ensemble des arrêtées X^T ($X\in U$, T t.a.) qui appartiennent à H^1. On a $\mathcal{L}^1(V)=\mathcal{L}^1(U)=H^1$, et le résultat précédent nous donne un ensemble total dans L^1, formé de variables

$$1_A X_0 \ (A\in\underline{\underline{F}}_0,\ X\in U) \qquad \text{et} \qquad 1_A(X_t^T - X_s^T) \ (s<t,\ A\in\underline{\underline{F}}_{s-},\ X\in U,\ T \text{ t.a.})$$

Nous obtenons encore un ensemble total en restreignant T à être <u>borné</u> (remplacer T par $T\wedge n$, et faire tendre n vers l'infini). Nous pouvons aussi remplacer T par $T\vee s$. Finalement, soit T_n la n-ième approximation dyadique de T ; lorsque $n\to\infty$ $1_A(X_t^{T_n} - X_s^{T_n})$ converge dans L^1 vers $1_A(X_t^T - X_s^T)$, et l'on vérifie sans peine que $1_A(X_t^{T_n} - X_s^{T_n})$ est combinaison linéaire finie de variables $1_B(X_v - X_u)$ ($u<v$, $B\in\underline{\underline{F}}_u$).

Reste l'implication c)=>a) du 1). Nous continuons à identifier les martingales à leurs variables terminales. La stabilité de U par arrêt s'interprète alors comme stabilité par les opérateurs $E[\,|\underline{\underline{F}}_T]$. En particulier, prenant pour T un t.a. de la forme $1_A.s+1_{A^c}.\infty$ ($A\in\underline{\underline{F}}_{s-}$) , nous voyons que

$$X\in U \Rightarrow 1_A X_s + 1_{A^c} X \in U \quad \text{pour } A\in\underline{\underline{F}}_{s-}$$

Remplaçant s par $t>s$ sans changer A, et prenant une différence, nous voyons que

$$X\in U \Rightarrow 1_A(X_t - X_s)\in U$$

D'autre part, si $\mathcal{L}^1(U)=H^1$, il existe au moins un $X\in U$ tel que $X_0\neq 0$, donc par arrêt à 0, $\underline{\underline{F}}_0$ étant P-triviale, nous voyons que U contient une constante non nulle. Finalement, compte tenu de la partie 2), nous voyons que U contient un ensemble total dans L^1, et l'on a bien que c)=>a). ▯

Remarque. Si $\underline{\underline{F}}_0$ n'était pas triviale, il faudrait dans la partie 1) ajouter la stabilité de U par la multiplication par 1_A ($A\in\underline{\underline{F}}_0$), seulement pour l'implication c)=>a). La partie 2) est rédigée de manière à s'étendre sans modification.

On peut noter d'autre part que la conclusion de la partie 2) est vraie dès que U est un ensemble de vraies martingales (non nécessairement uniformément intégrables) : il suffit d'appliquer la partie 2) à l'ensemble des martingales arrêtées X^n ($X\in U$, $n\in\mathbb{N}$).

2.3. La propriété de représentation prévisible.

Revenons à l'énoncé du théorème 2.1, en supposant que X est adapté à $(\underline{\underline{F}}^\circ_t)$, que $\nu=0$ (donc que X est une vraie martingale), et que P est extrémale. On vérifie immédiatement que $\underline{\underline{F}}^\circ_0$ est P-triviale. La condition 2) du théorème 2.1 entraîne que $\mathcal{L}^1(1,X)$ est dense dans $\tilde{L}^1$; comme il est stable par arrêt, le théorème 2.6 nous dit que $\mathcal{L}^1(1,X)=H^1$, et ceci revient à une propriété de représentation prévisible : tout élément de H^1 peut s'écrire sous la forme $c+\int_0^\cdot \varphi_s dX_s$, avec φ prévisible tel que $E[(\int_0^\infty \varphi_s^2 d[X,X]_s)^{1/2}]<\infty$. Ainsi, grâce au théorème de Douglas et au théorème 2.4 ou 2.6, nous avons déduit de l'extrémalité de P une propriété de représentation prévisible. Nous allons développer cette remarque.

Soit $\underline{\underline{N}}$ un ensemble de processus cadlag adaptés à $(\underline{\underline{F}}^\circ_t)$. On note

- $\underline{\underline{M}}_{\underline{\underline{N}}}$ l'ensemble des probabilités P sur $(\Omega,\underline{\underline{F}}^\circ)$, telles que tout $X\in\underline{\underline{N}}$ soit une $(\underline{\underline{F}}(P)_t,P)$-martingale locale ,
- $\mathcal{E}_{\underline{\underline{N}}}$ l'ensemble des points extrémaux de l'ensemble $\underline{\underline{M}}_{\underline{\underline{N}}}$.

Quelques remarques évidentes : d'abord , $\underline{\underline{M}}_{\underline{\underline{N}}}$ n'est pas nécessairement convexe, mais cela n'interdit pas de parler de ses points extrémaux. On ne change pas $\underline{\underline{M}}_{\underline{\underline{N}}}$ si l'on stabilise $\underline{\underline{N}}$ pour l'arrêt, et pour la multiplication par 1_A ($A\in\underline{\underline{F}}_0$). Enfin, la tribu $\underline{\underline{F}}_0$ est P-triviale pour tout $P\in\mathcal{E}_{\underline{\underline{N}}}$.

Le théorème suivant complète le théorème 1.5 de [14], où figure l'équivalence 1) <=> 2).

Théorème 2.7. Soit $P\in\underline{\underline{M}}_{\underline{\underline{N}}}$. Les assertions suivantes sont équivalentes

1) $P\in\mathcal{E}_{\underline{\underline{N}}}$.

2) $\underline{\underline{F}}_0$ est P-triviale, et $\mathcal{L}^1(\underline{\underline{N}}\cup\{1\},P)=H^1(P)$.

Si en outre tout élément de $\underline{\underline{N}}$ est une vraie martingale pour P, ces

<u>assertions sont aussi équivalentes à</u>

3) <u>Les variables</u> 1 <u>et</u> $1_A(X_t-X_s)$ ($\alpha<s<t$, $A\in\underline{\underline{F}}^o_{s-}$, $X\in\underline{\underline{N}}$) <u>sont totales dans</u> $L^1(\underline{\underline{F}}^o,P)$.

<u>Remarque</u>. Soit $\hat{\underline{\underline{N}}}$ le stabilisé de $\underline{\underline{N}}\cup\{1\}$ pour l'arrêt aux t.a. bornés de la famille $(\underline{\underline{F}}^o_t)$. Nous verrons aussi que 1) est équivalente à

4) $\underline{\underline{F}}_0$ <u>est</u> P-<u>triviale, et</u> $\hat{\underline{\underline{N}}}\cap\tilde{L}^1(P)$ <u>est total dans</u> $\tilde{L}^1(P)$.

<u>Démonstration</u>. Compte tenu des résultats obtenus plus haut, nous n'avons pas besoin de nous référer à [14]. Nous pouvons supposer que $1\in\underline{\underline{N}}$.

Il résulte de la remarque qui suit le théorème 2.6 que 2)=>3), si $\underline{\underline{N}}$ se compose de vraies P-martingales. Dans tous les cas, 2) entraîne que $\hat{\underline{\underline{N}}}\cap H^1(P)$ est total dans $H^1(P)$, donc a fortiori dans $\tilde{L}^1(P)$ (th. 2.6, b)) et a fortiori 4) , et il est clair aussi que 3)=>4) si $\underline{\underline{N}}$ se compose de vraies martingales. Enfin, 4)=>2) : c'est l'implication a)=>c) de 2.6.

Pour examiner l'équivalence avec 1), nous allons remplacer $\underline{\underline{N}}$ par un autre ensemble $\underline{\underline{L}}$: à toute martingale locale $X\in\underline{\underline{N}}$, nous associons une suite croissante (T_k) de temps d'arrêt de la famille $(\underline{\underline{F}}^o_t)$, telle que

$$T_k\uparrow+\infty \quad \text{P-p.s., et que } X^{T_k}1_{\{T_k>0\}} \text{ soit une vraie martingale pour P}$$

(si X est déjà une vraie martingale pour P, nous prenons $T_k=+\infty$). Alors $\underline{\underline{L}}$ est l'ensemble des processus X^{T_k} ainsi construits. Posons

$$\underline{\underline{M}}^!_{\underline{\underline{L}}} = \{ \text{ Q probabilités sur } (\Omega,\underline{\underline{F}}^o) \mid \forall\, X\in\underline{\underline{L}} \text{ , X est une Q-martingale} \}$$

On a $P\in\underline{\underline{M}}^!_{\underline{\underline{L}}}$ par construction. D'autre part, d'après le théorème 2.1 avec $\nu=0$, étendu (sans aucune difficulté) au cas où X est remplacé par un ensemble $\underline{\underline{L}}$ de processus, nous avons

$$(\text{ P extrémal dans } \underline{\underline{M}}^!_{\underline{\underline{L}}}) \iff (\text{ les v.a. 1 et } 1_A(X_t-X_s) \text{ , } A\in\underline{\underline{F}}_s, s<t, X\in\underline{\underline{L}} \text{ forment un ensemble total dans } L^1(P))$$

qui est la condition 3) pour $\underline{\underline{L}}$, et équivaut à 2) d'après la première partie, car $\mathcal{L}^1(\underline{\underline{N}},P)=\mathcal{L}^1(\underline{\underline{L}},P)$. Il nous reste seulement à vérifier (cf [15])

$$(\text{P non extrémal dans } \underline{\underline{M}}^!_{\underline{\underline{L}}}) \iff (\text{ P non extrémal dans } \underline{\underline{M}}_{\underline{\underline{N}}})$$

1) Supposons que P admette une représentation $rQ+(1-r)Q'$, avec $0<r<1$, $Q\in\underline{\underline{M}}^!_{\underline{\underline{L}}}$, $Q'\in\underline{\underline{M}}^!_{\underline{\underline{L}}}$, $Q\neq Q'$. Pour $X\in\underline{\underline{N}}$, les temps d'arrêt T_k associés plus haut à X tendent vers $+\infty$ P-p.s., donc p.s. pour Q et Q', donc X est une martingale locale pour Q et Q', ces mesures appartiennent à $\underline{\underline{M}}_{\underline{\underline{N}}}$, et P n'est pas extrémal dans $\underline{\underline{M}}_{\underline{\underline{N}}}$. C'est l'implication => .

2) Inversement , supposons que $P=rQ+(1-r)Q'$, $Q\in\underline{\underline{M}}_{\underline{\underline{N}}}$,$Q'\in\underline{\underline{M}}_{\underline{\underline{N}}}$, $Q\neq Q'$. Toute $X\in\underline{\underline{L}}$ est une martingale locale pour Q et Q'. Le processus $(X_s)_{s\leq t}$ appartient à la classe (D) pour t fini relativement à P, donc aussi

relativement à Q et Q'. Donc X est une vraie martingale pour Q et Q', et P est non extrémale dans $\underline{\underline{M}}'_{\underline{\underline{L}}}$. C'est l'implication <= . ▯

Remarques . a) En [14], il est montré que si $\underline{\underline{N}}$ est constitué d'un nombre fini de processus, il y a identité entre points extrémaux et points infimaux dans $\underline{\underline{M}}_{\underline{\underline{N}}}$. Cette question reste ouverte lorsque $\underline{\underline{N}}$ est infini.

b) Le théorème 2.7 est en fait une extension du théorème de Douglas (th. 1.1.). En effet, avec les notations du théorème 1.1, introduisons la filtration

$$\underline{\underline{F}}^o_t = \{X,\emptyset\} \text{ pour } 0\leqq t<1 \quad , \quad \underline{\underline{F}}^o_t=\underline{\underline{X}} \text{ pour } t\geqq 1$$

et associons à toute v.a. $f\in L^1(X,\underline{\underline{X}},\mu)$ le processus adapté

$$\tilde{f}_t = \int f d\mu \text{ si } 0\leqq t<1 \ , \quad \tilde{f}_t = f \text{ si } t\geqq 1$$

Le processus $(\tilde{f}_t)$ est une λ-martingale (ou même simplement une λ-martingale locale) si et seulement si f est λ-intégrable et $\int f d\lambda=\int f d\mu$. D'autre part, le sous-espace engendré par les variables 1 et $1_{A_s}(\tilde{f}_t-\tilde{f}_s)$ est le même que le sous-espace engendré par 1 et f. Il suffit donc d'appliquer le théorème 2.7 en prenant $\underline{\underline{N}}=\{\tilde{f}, f\in F\}$.

Quant aux démonstrations des deux théorèmes, elles reposent toutes deux sur le théorème de Hahn-Banach et la connaissance explicite d'un dual : $(L^1)'=L^\infty$ pour le théorème 1.1, $(H^1)'=BMO$ pour le théorème 2.7.

Nous nous restreignons maintenant au cas où $\underline{\underline{N}}$ est réduit à un processus réel X . D'après le lemme 2.2, si $P\in\underline{\underline{M}}_{\{X\}}$, P est point extrémal de $\underline{\underline{M}}_{\{X\}}$ si et seulement si

(1) toute martingale locale M peut s'écrire $M_t=c+\int_0^t H_s dX_s$, avec $c\in\mathbb{R}$, H prévisible tel que $(\int_0^\cdot H_s^2 d[X,X]_s)^{1/2}$ soit localement intégrable.

Si X vérifie cette propriété, on dit que X a la propriété de représentation prévisible (en abrégé : (RP)) par rapport à la filtration $(\underline{\underline{F}}_t)=(\underline{\underline{F}}(P)_t)$.

On déduit aisément de cette caractérisation des résultats de densité dans L^p pour $1\leqq p<\infty$, résolvant ici par l'affirmative la question générale qui précède la proposition 1.4.

Proposition 2.8. Soit $1\leqq p<\infty$. Soient X un processus cadlag réel $\underline{\underline{F}}^o_t$-adapté, et $P\in\underline{\underline{M}}_{\{X\}}$ tel que : $\forall\ t\geqq 0$, $E[|X_t|^p] < \infty$. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes

1) $P\in\mathcal{E}_{\{X\}}$.
2) Les variables 1 et $1_A(X_t-X_s)$ ($s<t$, $A\in\underline{\underline{F}}^o_s$) sont totales dans L^p.

<u>Démonstration</u>. Le résultat est déjà connu pour $p=1$ (théorème 2.1 avec $\nu=0$, ou théorème 2.7). Supposons donc $p>1$.

2)=>1). L^p est dense dans L^1, donc les variables de l'énoncé sont totales dans L^1, et on est ramené à la situation connue.

1)=>2) . Soit $Y\in L^p$. D'après (1), la martingale $\tilde{Y}_t=E[Y|\underline{\underline{F}}(P)_t]$ admet une représentation prévisible

$$\tilde{Y}_t = c + \int_0^t \varphi_s dX_s$$

D'après l'inégalité de Doob, cette martingale appartient à H^p. L'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy entraîne alors que φ appartient à l'espace $\Gamma^p(X)$ des processus prévisibles H tels que

$$\|H\|_p = E[(\int_0^\infty H_s^2 d[X,X])^{p/2}]^{1/p} < \infty$$

Les processus prévisibles étagés $H = \Sigma_1^n \lambda_i 1_{A_i\times]s_i,s_{i+1}]}$ ($s_i<s_{i+1}$, $\lambda_i\in\mathbb{R}$, $A_i\in\underline{\underline{F}}^o_{s_i}$) étant denses dans $\Gamma^p(X)$, choisissons une suite φ^n de tels processus qui converge vers φ , et posons $Y_t^n = c+\int_0^t \varphi_s^n dX_s$. Les martingales (Y_t^n) convergent dans H^p vers $(\tilde{Y}_t)$, donc leurs variables terminales convergent dans L^p vers $\tilde{Y}_\infty=Y$. Il reste seulement à remarquer que Y_∞^n appartient à l'espace vectoriel engendré par les variables du 2).

La suite du paragraphe est consacrée à l'étude de la propriété de représentation prévisible (RP). <u>Nous supposons dans tout ce paragraphe que la filtration $\underline{\underline{F}}_t=\underline{\underline{F}}(P)_t$ est quasi-continue à gauche</u>. En fait, nous commençons par réduire le problème, en remarquant que pour la propriété (RP), les parties martingale continue et somme compensée de sauts de X jouent des rôles très différents, ainsi d'ailleurs que les espaces $\underline{\underline{M}}^c_{loc}$ et $\underline{\underline{M}}^d_{loc}$.

Nous cherchons d'abord à représenter les martingales purement discontinues comme intégrales stochastiques (en abrégé : i.s.) par rapport à une martingale locale fondamentale $M\in\underline{\underline{M}}^d_{loc}$ (on appliquera cela à $M=X^d$ si la propriété (RP) est réalisée). Cette question est étudiée dans les deux propositions suivantes , la première concernant des i.s. optionnelles, la seconde des i.s. prévisibles.

<u>Proposition 2.9</u>. <u>Soit</u> $M\in\underline{\underline{M}}^d_{loc}$. <u>Les trois assertions suivantes sont équivalentes</u> (sous l'hypothèse de trivialité de $\underline{\underline{F}}_0$).

1) <u>Toute martingale locale</u> $L\in\underline{\underline{M}}^d_{loc}$ <u>peut se représenter comme intégrale stochastique optionnelle</u>

$$L_t = c + \int_0^t H_s dM_s \qquad (c\in\mathbb{R},\ H\in\underline{\underline{O}})$$

<u>où le processus</u> $(\int_0^t H_s^2 d[M,M]_s)^{1/2}$ <u>est localement intégrable</u>.

1') Même énoncé en remplaçant martingale locale par martingale bornée

2) Le graphe de tout t.a. totalement inaccessible est contenu, à un ensemble évanescent près, dans l'ensemble $I=\{(s,\omega) \mid \Delta M_s(\omega)\neq 0\}$[1].

Remarque. La martingale locale M étant quasi-continue à gauche, l'ensemble $I=\{\Delta M\neq 0\}$[1] est toujours (indépendamment de tout théorème de représentation) une réunion dénombrable de graphes de t.a. totalement inaccessibles.

Démonstration. Il est clair que 1)=>1'). Pour vérifier que 1')=>1), nous remarquons a) que les martingales bornées forment un ensemble dense dans H^1, donc (l'application $N\mapsto N^d$ étant une contraction de H^1) que les martingales bornées sommes compensées de sauts forment un ensemble dense dans H^{1d}. b) Que l'ensemble des martingales $L\in H^1$ admettant la représentation de l'énoncé est fermé dans H^1 (cf. démonstration du lemme 2.2 , en remplaçant "prévisible" par "optionnel" ; la propriété d'isométrie est préservée pour les processus optionnels, parce que la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$ est quasi-continue à gauche). Cet ensemble est donc H^{1d} tout entier. c) Que l'on passe immédiatement de H^{1d} à $\underline{\underline{M}}^d_{loc}$ par arrêt.

Montrons que 1)=>2). Soit (A_t) le processus croissant $I_{\{T\leq t\}}$ associé à T, t.a. totalement inaccessible, et soit (B_t) sa projection duale prévisible. La martingale uniformément intégrable C=A-B vérifie $\{\Delta C\neq 0\}=[\![T]\!]$. Or par hypothèse il existe un processus optionnel H tel que

$$C_t = \int_0^t H_s dM_s \qquad \text{(sans addition de constante, car } C_0=0)$$

D'où $1=\Delta C_T=H_T\Delta M_T$ sur $\{T<\infty\}$, et finalement $[\![T]\!]\subset I$.

Enfin, montrons que 2)=>1). Soit $L\in\underline{\underline{M}}^d_{loc}$. D'après l'hypothèse, on sait que $\{\Delta M=0\}\subset\{\Delta L=0\}$ à un ensemble évanescent près. On peut donc écrire

$$\Delta L = H\Delta M \quad , \text{ où H est le processus optionnel } \frac{\Delta L}{\Delta M}1_{\{\Delta M\neq 0\}}$$

Le processus $(\int_0^t H_s^2 d[M,M]_s)^{1/2} = (\sum_{s\leq t}(\Delta L_s)^2)^{1/2}$ étant localement intégrable, la martingale locale $K_t=\int_0^t H_s dM_s$ est bien définie. Comme $\underline{\underline{F}}_0$ est P-triviale, L_0 est p.s. égale à une constante c, et les martingales locales L et c+K sont des sommes compensées de sauts ayant même valeur initiale et mêmes sauts, et sont donc indistinguables. ▯

1. Contrairement à l'habitude, nous ne tenons pas compte ici du "saut en 0" $\Delta M_0=M_0$, qui n'est évidemment pas totalement inaccessible. Si $\underline{\underline{F}}_0$ n'était pas triviale, c devrait être remplacée par une variable $\underline{\underline{F}}_0$-mesurable quelconque.

Proposition 2.9'. On utilise les notations de la proposition 2.9. Les trois assertions suivantes sont équivalentes

1)

1') mêmes énoncés respectifs qu'en 2.9, en remplaçant optionnel par prévisible.

2) Le graphe de tout t.a. totalement inaccessible est contenu dans I, et de plus $\underline{\underline{O}}=\underline{\underline{P}}\vee\sigma(I)$.

De plus, si ces propriétés sont vérifiées on a, pour tout t.a. T, l'égalité $\underline{\underline{F}}_{T-}=\underline{\underline{F}}_T$.

Remarque. Le dernier résultat de cette proposition affirme que les tribus $\underline{\underline{F}}_{T-}$ sont aussi grandes que possible (i.e. égales à $\underline{\underline{F}}_T$) ; ceci est encore clairement une propriété d'extrémalité à rapprocher de la proposition 1.6.

Démonstration. L'équivalence 1)<=>1') figure explicitement en [14] (proposition 1.2, p. 87). Par ailleurs, la démonstration donnée plus haut s'étend sans autre changement que le remplacement de "optionnel" par "prévisible".

Montrons que 1)=>2). La première partie de 2) provient de la proposition précédente. D'autre part, considérons le processus croissant $Q^n_t = \sum_{s\leq t}(\Delta M^2_s)1_{\{|\Delta M_s|\leq n\}}$; il est à valeurs finies, et à sauts bornés par n^2, donc il est localement intégrable, et admet une projection duale prévisible que l'on note A^n. D'après l'hypothèse il existe f^n prévisible tel que

$$Q^n_t - A^n_t = \int_0^t f^n_s dM_s$$

et donc $\quad \Delta M^2 1_{\{|\Delta M|\leq n\}} = f^n\Delta M \quad$ ou $\quad \Delta M\, 1_{\{|\Delta M|\leq n\}} = f^n 1_{\{\Delta M\neq 0\}}$.

Posons $f = \underline{\lim}\, f^n$ si cette limite inférieure est finie, et 0 sinon ; f est prévisible, et nous avons $\Delta M = f\, 1_{\{\Delta M\neq 0\}}$.

Soit ensuite L une martingale de carré intégrable ; la partie somme compensée de sauts de L admettant une représentation de la forme $\int_0^{\cdot} g_s dM_s$ avec un processus prévisible g, on a $\Delta L = g\Delta M = gf\, 1_{\{\Delta M\neq 0\}} = gf.1_I$.

La tribu $\underline{\underline{O}}$ est engendrée, aux processus évanescents près, par les projections optionnelles des processus mesurables de la forme $X_t(\omega)= a(t)b(\omega)$ (a borélienne sur $\mathbb{R}$, $b\in L^2$), autrement dit par les processus de la forme $a(t)L_t(\omega)$, où L est une martingale de carré intégrable. Les processus de la forme a(t), ou $L_{t-}(\omega)$, et les processus évanescents, étant prévisibles, on voit que $\underline{\underline{O}}$ est engendrée par $\underline{\underline{P}}$ et par les processus ΔL , où L est une martingale de carré intégrable. La relation $\Delta L= gf1_I$ vue plus haut montre que $\underline{\underline{O}}$ est engendrée par $\underline{\underline{P}}$ et 1_I .

Montrons que 2)=>1). D'après la première partie de 2) et la proposition 2.9, toute martingale locale $L\in\underline{\underline{M}}^d_{loc}$ admet une représentation comme intégrale optionnelle

$$L_t = c + \int_0^t H_s dM_s$$

Puisque $\underline{\underline{O}}$ est engendrée par $\underline{\underline{P}}$ et 1_I , il existe un processus prévisible K tel que K=H sur $I=\{\Delta M\neq 0\}$; M étant une somme compensée de sauts, on a alors $\int_0^{\cdot} H_s dM_s = \int_0^{\cdot} K_s dM_s$, car ces deux martingales locales sont des sommes compensées de sauts ayant les mêmes sauts, et nulles en 0. D'où la représentation $L_t = c+\int_0^t K_s dM_s$ de L comme i.s. prévisible.

Enfin, soit T un temps d'arrêt. D'après [27], chap. III, T41, il existe un élément A de $\underline{\underline{F}}_{T-}$, contenu dans $\{T<\infty\}$, tel que T_A soit totalement inaccessible et T_{A^c} accessible (donc prévisible, puisque la filtration est quasi-continue à gauche). Le graphe de T_A passe alors dans I, celui de T_{A^c} dans I^c.

La tribu $\underline{\underline{F}}_T$ (resp. $\underline{\underline{F}}_{T-}$) est engendrée, rappelons le, par les variables H_T , où $(H_t)_{0\leq t\leq\infty}$ est un processus optionnel (resp. prévisible). Si l'on a $\underline{\underline{O}}=\underline{\underline{P}}\vee\sigma(I)$, il existe pour tout processus optionnel H deux processus prévisibles K et L tels que $H=K1_I + L1_{I^c}$; ici nous aurons donc

$$H_T = 1_A K_T + 1_{A^c} L_T$$

donc H_T est $\underline{\underline{F}}_{T-}$-mesurable, et $\underline{\underline{F}}_T=\underline{\underline{F}}_{T-}$. $\square$

Revenons à la propriété (RP) par rapport à X , et décomposons X en sa partie continue X^c , et sa partie somme compensée de sauts $M=X^d$.Toute martingale locale somme compensée de sauts se représente comme intégrale stochastique prévisible par rapport à M, et l'on peut donc appliquer à M la proposition 2.9'. De même, toute martingale locale continue peut être représentée comme i.s. par rapport à X^c. Mais on ne possède pas dans le cas général (c'est à dire, lorsque X^c est distincte de X) de résultats intéressants découlant de cette dernière propriété (là encore, les parties martingale continue, et somme compensée de sauts, jouent des rôles très différents).

Nous terminons ce paragraphe par quelques remarques sur les démonstrations traditionnelles de la propriété (RP) pour le mouvement brownien, que nous allons présenter sous une forme un peu plus générale. Donnons nous comme plus haut $(\Omega,\underline{\underline{F}}^o_t,\ldots)$ et <u>deux</u> processus continus X et A adaptés à $(\underline{\underline{F}}^o_t)$, tous deux nuls en 0 pour fixer les idées, le second étant croissant. Désignons par $\underline{\underline{N}}$ la famille des processus

$$Y_t^\lambda = \exp(\lambda X_t - \frac{\lambda^2}{2}A_t) \qquad (\lambda\in\mathbb{R})$$

Soit P une loi sur Ω. Rappelons que les deux propriétés suivantes sont équivalentes

i) $\forall\ \lambda\in\mathbb{R}$, Y^λ est une P-martingale locale (autrement dit, $P\in\underline{\underline{M}}_N$)

ii) X est une P-martingale locale et $A=\langle X,X\rangle$ (autrement dit, A et X étant continus, $P\in\underline{\underline{M}}_{(X,X^2-A)}$)

Autre remarque : soit $P\in\underline{\underline{M}}_X$, et soit $Q\in\underline{\underline{M}}_X$ tel que $Q\ll P$. Comme X est continu, il n'y a pas lieu de distinguer $\langle X,X\rangle$ et $[X,X]$, donc la propriété ($A=\langle X,X\rangle$ sous P), qui signifie que certaines sommes de carrés convergent en probabilité vers A, entraîne ($A=\langle X,X\rangle$ sous Q). Autrement dit, avec les notations introduites en 1.2,

$$\text{Si } P\in\underline{\underline{M}}_{(X,X^2-A)} \text{ , on a } \underline{\underline{M}}_X^! = \{Q\in\underline{\underline{M}}_X \mid Q\ll P\} \subset \underline{\underline{M}}_{(X,X^2-A)}$$

Dans ces conditions, on a les équivalences suivantes

<u>Proposition 2.10</u> . <u>Avec les notations ci-dessus</u>, <u>soit</u> $P\in\underline{\underline{M}}_{(X,X^2-A)}$. <u>Les propriétés suivantes sont équivalentes</u>

1) X <u>possède la propriété</u> (RP) <u>sous</u> P .

2) P <u>est point extrémal de</u> $\underline{\underline{M}}_X$.

3) P <u>est point extrémal de</u> $\underline{\underline{M}}_{(X,X^2-A)}=\underline{\underline{M}}_N$.

<u>Démonstration</u> . Nous savons que 1)<=>2) (th. 2.7 et lemme 2.2). Il est évident que 2)=>3), car $\underline{\underline{M}}_{(X,X^2-A)}\subset \underline{\underline{M}}_X$. Inversement, on a $\underline{\underline{M}}_X^! \subset \underline{\underline{M}}_{(X,X^2-A)}$, donc 3) entraîne que P est extrémal dans $\underline{\underline{M}}_X^!$, donc dans $\underline{\underline{M}}_X$ (remarque 1.2). ▯

Dans le cas du mouvement brownien, où $A_t\equiv t$, on sait que la loi brownienne est <u>le seul</u> élément de $\underline{\underline{M}}_{(X,X^2-A)}$ (lorsque Ω est l'espace de toutes les applications continues avec sa filtration naturelle). Alors 3) est satisfaite et la propriété (RP) du mouvement brownien en découle.

Une autre méthode pour prouver la propriété (RP) pour le mouvement brownien X est de montrer (c'est facile !) que les variables

$$U^{\lambda,\sigma}= \exp(\Sigma_{i=1}^n \lambda_i(X_{s_{i+1}}-X_{s_i}) - \frac{1}{2} \Sigma_{i=1}^n \lambda_i^2(s_{i+1}-s_i))$$

($n\in\mathbb{N}$,$\lambda_i\in\mathbb{R}$,$\sigma=(s_1,\ldots,s_{n+1})$ avec $s_1<s_2..<s_{n+1}$) sont totales dans L^2 (ou seulement dans L^1 d'après le corollaire 2. .2) et peuvent s'écrire comme intégrales stochastiques par rapport à X. De façon générale, pour établir la propriété (RP) de X sous une loi $P\in\underline{\underline{M}}_{(X,X^2-A)}$, telle que les Y^λ soient de vraies martingales, une méthode générale (aussi voisine que possible de la méthode précédente pour le mouvement brownien) consiste à prouver 3) en cherchant un ensemble total dans $L^1(\underline{\underline{F}}^\circ_\infty,P)$ formé de variables de la forme 1 et $H_s(Y_t^\lambda-Y_s^\lambda)$ ($\lambda\in\mathbb{R}$, $s<t$, H_s $\underline{\underline{F}}^\circ_s$-mesurable). On établit alors 3) par le théorème 2.7, et 1) en résulte comme ci-dessus.

3. Le cas markovien et le problème des martingales[1]

3.1 Avant d'aborder les questions de représentation de martingales qui se posent dans le cadre markovien, faisons quelques rappels et préliminaires.

En [1], Kunita et Watanabe ont établi le résultat très important suivant, concernant les martingales relatives à la filtration naturelle d'un processus de Markov.

Soit $(\Omega, \underline{\underline{F}}, (\underline{\underline{F}}_t), X_t, (P_x)_{x\in E})$ un processus de Markov droit à valeurs dans un espace l.c.d. E, $(\underline{\underline{F}}_t)$ désignant la filtration naturelle de X convenablement complétée et rendue continue à droite. Soit $(R_p)_{p>0}$ la résolvante correspondante. Pour toute fonction univ. mesurable bornée g, la fonction $h=R_pg$ appartient au domaine du générateur infinitésimal L du processus, et on a $Lh=ph-g$. D'où les martingales suivantes

$$K_t^{p,g} = E[\int_0^\infty e^{-ps}g(X_s)ds|\underline{\underline{F}}_t] = e^{-pt}h(X_t) + \int_0^t e^{-ps}g(X_s)ds$$

$$C_t^h = \int_0^t e^{ps}dK_t^{p,g} = h(X_t)-h(X_0)- \int_0^t (ph-g)(X_s)ds$$

Les $K^{p,g}$ sont de carré intégrable, et les C^h de carré intégrable sur tout intervalle compact. Le résultat de Kunita-Watanabe affirme que les C^h engendrent $\underline{\underline{M}}_0^2(P_\mu)$ au sens des martingales de carré intégrable, pour toute loi initiale μ : toute martingale de $\underline{\underline{M}}^2(P_\mu)$, nulle en 0 et orthogonale aux martingales C^h, est nulle.

En fait, l'ensemble des $h=R_pg$ (g universellement mesurable bornée) ne dépend pas de $p>0$: on peut donc se borner à un $p>0$ fixé. Puis, pour chaque loi initiale μ, on voit qu'on peut se limiter aux g boréliennes. Enfin, un argument de classes monotones montre qu'on engendre le même sous-espace stable en faisant parcourir à g un ensemble G de fonctions boréliennes bornées, stable par produit, et engendrant la tribu borélienne.

On dit que le processus de Markov admet un <u>opérateur carré du champ</u> si, pour toute martingale C^h, le crochet oblique $\langle C^h,C^h\rangle_t$ est absolument continu par rapport à la mesure dt (et on peut alors écrire, d'après le théorème de Motoo $\langle C^h,C^h\rangle_t = \int_0^t f(X_s)ds$, où f est une fonction[2] positive sur E ; l'application qui à h associe f est une forme quadratique sur le domaine du générateur, que l'on appelle carré du champ). D'après le résultat de Kunita-Watanabe rappelé ci-dessus, pour toute loi P_μ et toute martingale M de carré intégrable nulle en 0, le crochet $\langle M,M\rangle$ satisfait alors à $d\langle M,M\rangle_t \ll dt$.

1. Ce paragraphe a été modifié après des discussions avec P.A.Meyer.
2. f est définie à un ensemble de potentiel nul près.

Le problème se pose donc de calculer le crochet $<C^h,C^h>$. Plutôt que de reprendre cette question dans le cadre des processus de Markov, nous en présentons une version relative à un espace $(\Omega,\underline{\underline{F}},(\underline{\underline{F}}_t),P)$ général (voir aussi [26], où le même point de vue est adopté).

De quoi s'agit-il ? Soit Φ un processus croissant prévisible, nul en 0, à valeurs finies. On considère l'ensemble S_Φ des semi-martingales Z localement bornées (donc spéciales), admettant une décomposition canonique $Z=Z_0+M+A$ ($M\in\underline{\underline{M}}_{loc}$ nulle en 0, $A\in\underline{\underline{V}}_p$ nul en 0) telle que $dA_t<<d\Phi_t$. Z étant localement bornée ainsi que A (car $A\in\underline{\underline{V}}_p$), M l'est aussi, et en particulier $<M,M>$ existe.

<u>Lemme 3.1</u> . 1) <u>Soit</u> $Z\in S_\Phi$. <u>Alors</u> $Z^2\in S_\Phi$ <u>si et seulement si</u> (avec les notations ci-dessus) <u>on a</u> $d<M,M>_t << d\Phi_t$.

2) S_Φ <u>est une algèbre si et seulement si, pour toute martingale locale nulle en 0</u> $M\in M^2_{loc}$ <u>on a</u> $d<M,M>_t << d\Phi_t$.

<u>Démonstration</u>. 1) Notons $X\equiv Y$ la relation d'équivalence "X-Y est une martingale locale nulle en 0". On se ramène aussitôt au cas où $Z_0=0$, et on écrit Z=M+A comme ci-dessus. Alors

$$Z^2 = (M+A)^2 \equiv <M,M> + 2MA + A^2$$

Or on a $A^2=\int_0^{\cdot}(A+A_-)dA$, et $MA\equiv\int_0^{\cdot}M_-dA$ d'après un lemme dû à Ch. Yoeurp (voir [23]). Mais alors $Z^2 \equiv <M,M> + \int_0^{\cdot}(2M_-+A+A_-)dA$, qui est absolument continu par rapport à Φ si et seulement si $d<M,M>_t << d\Phi_t$.

2) Soit M une martingale bornée nulle en 0 ; on a $M\in S_\Phi$, donc $M^2\in S_\Phi$ si S_Φ est une algèbre, donc $d<M,M>_t << d\Phi_t$. On passe de là par densité aux martingales de carré intégrable, puis aux martingales locales localement de carré intégrable par localisation.

Dans le cas des processus de Markov, on applique ainsi ce lemme : soit h appartenant au domaine du générateur L du processus. Prenons $\Phi_t=t$. Alors la semi-martingale $h(X_t) = h(X_0) + C^h_t + \int_0^t Lh(X_s)ds$ appartient à S_Φ, et elle est bornée. On a donc $d<C^h,C^h>_t <<d\Phi_t$ si et seulement si la semi-martingale $h^2(X_t)$ appartient à S_Φ . Il est évident que cette condition est satisfaite si h^2 appartient au domaine de L, et cela nous suffira pour la suite.

<u>Remarques</u>. Revenons à la situation générale. Il est peut être intéressant de mettre ces résultats sous une forme où les crochets obliques n'interviennent pas.

i) Disons qu'un processus prévisible H est Φ-<u>négligeable</u> si $\int_0^\infty |H_s|d\Phi_s = 0$ p.s.. Disons qu'une semi-martingale Z est Φ-a.c.p. (absolument continue sur les prévisibles) si l'intégrale stochastique $H\cdot Z = \int_0^\cdot H_s dZ_s$ (0 est exclu du domaine d'intégration) est nulle pour tout processus prévisible borné Φ-négligeable H. Cela ne dit rien sur Z_0.

<u>Lemme 3.2. Les propriétés suivantes sont équivalentes</u>

0) S_Φ <u>est une algèbre</u>.

1) <u>Pour toute martingale bornée</u> M, <u>nulle en</u> 0, <u>on a</u> $d\langle M,M\rangle_t \ll d\Phi_t$.

2) <u>Pour toute martingale</u> M <u>de carré intégrable nulle en</u> 0, $d\langle M,M\rangle_t \ll d\Phi_t$.

3) <u>Toute martingale de carré intégrable est</u> Φ-<u>a.c.p</u>..

4) <u>Toute martingale locale est</u> Φ-<u>a.c.p</u>..

5) <u>Pour toute martingale locale</u> M, [M,M] <u>est</u> Φ-<u>a.c.p</u>..

<u>Démonstration</u>. Nous savons que 0)<=>2) (lemme 3.1). Il est clair que 4)=>3)=>2)=>1). Supposons 1) satisfaite. et soit H prévisible borné Φ-négligeable. L'ensemble des martingales locales M telles que $H\cdot M=0$ contient les martingales bornées, puis par densité tout H^1, puis toutes les martingales locales par localisation, Enfin 4)<=>5), car $(\int_0^\cdot H_s dM_s=0)$ <=> $(\int_0^\cdot H_s^2 d[M,M]_s=0)$.

La définition de S_Φ est aussi encombrée de restrictions que l'on peut lever. Désignons par $\hat{S}_\Phi$ l'ensemble des semi-martingales Z telles que

> pour tout processus prévisible borné Φ-négligeable H,
> $H\cdot Z$ soit une martingale locale.

Alors une semi-martingale spéciale $Z=Z_0+M+A$ ($M\in\underline{\underline{M}}_{loc}$, $A\in\underline{\underline{V}}_p$) appartient à $\hat{S}_\Phi$ si et seulement si $dA_t \ll d\Phi_t$. De plus

<u>Lemme</u> 3.3. <u>Les conditions équivalentes</u> 0-5 <u>sont encore équivalentes à</u>

6) $\hat{S}_\Phi$ <u>est une algèbre</u>.

7) <u>Pour toute</u> $Z\in\hat{S}_\Phi$, <u>le processus</u> [Z,Z] <u>est</u> Φ-<u>a.c.p</u>..

8) <u>Toute</u> $Z\in\hat{S}_\Phi$ <u>est</u> Φ-<u>a.c.p</u>..

<u>Démonstration</u> : 5) => 6). En effet, soit $Z\in\hat{S}_\Phi$ et soit H prévisible borné Φ-négligeable. Le processus $I=1_{\{H\neq 0\}}$ est prévisible borné Φ-négligeable, donc $I.Z$ est une martingale locale, donc $[I\cdot Z,I\cdot Z]$ est Φ-a.c.p. d'après 5), et $H\cdot[Z,Z] = H\cdot[I.Z,I\cdot Z]=0$. Puis on écrit $Z^2=2Z_-\cdot Z+[Z,Z]$, donc $H\cdot Z^2= 2H\cdot(Z_-\cdot Z)=2Z_-\cdot(H\cdot Z)$, qui est une martingale locale, et on a $Z^2\in\hat{S}_\Phi$.

6)=>7) : Soit $Z\in\hat{S}_\Phi$, et soit H prévisible borné positif et Φ-négligeable. Comme $Z^2\in\hat{S}_\Phi$, $H\cdot Z^2= 2H\cdot(Z_-\cdot Z)+H\cdot[Z,Z]$ est une martingale locale. Il en est de même pour $H\cdot(Z_-\cdot Z)=Z_-\cdot(H\cdot Z)$, et, par différence , de $H\cdot[Z,Z]$. Par conséquent, $H\cdot[Z,Z]$ est constant sur $[0,\infty[$, et [Z,Z] est Φ-a.c.p..

7)=>8) : Soit $Z\in\hat{S}_\Phi$ et soit H prévisible borné Φ-négligeable. Comme [Z,Z] est croissant, $|H|\cdot[Z,Z]$ ne peut être une martingale locale que si $|H|\cdot[Z,Z]=0$, et alors aussi $H^2\cdot[Z,Z]=0$. La martingale locale $H\cdot Z$ satisfait alors à $[H\cdot Z,H\cdot Z]=0$, elle est donc nulle, et Z est Φ-a.c.p..

Enfin, 8) entraîne évidemment 4), car les martingales locales appartiennent à $\hat{S}_\Phi$.

Remarques - Il y a encore une dernière propriété équivalente que l'on peut noter

9) Toute $Z \in S_\Phi$ est Φ-a.c.p..

En effet, si $Z=Z_0+M+A$ (décomposition canonique) appartient à S_Φ , A est Φ-a.c.p. par définition, et on voit que 4)=>9). Inversement, 9)=>1), car les martingales bornées appartiennent à S_Φ .

- Il est peut être intéressant de noter que l'ensemble des semi-martingales Φ-a.c.p. est toujours une algèbre . En effet, si Z est Φ-a.c.p., on a pour tout processus H prévisible borné Φ-négligeable

$$H\cdot Z=0, \text{ donc } [H\cdot Z,H\cdot Z]=0, \text{ donc } H^2\cdot[Z,Z]=0, \text{ donc } |H|\cdot[Z,Z]=0$$

et finalement $H\cdot[Z,Z]=0$. On écrit alors comme plus haut $H\cdot Z^2= 2Z_-\cdot(H\cdot Z) +H\cdot[Z,Z]$, donc $H\cdot Z^2=0$, et Z^2 est Φ-a.c.p. .

ii) Montrons que les propriétés équivalentes 0)-9) sont préservées par changement de mesure. Soient P et Q deux lois de probabilité équivalentes ; la propriété Φ-a.c.p. a alors le même sens sous P et sous Q. Supposons que les propriétés 0)-9) aient lieu sous Q, et soit Z une P-martingale bornée. Soit N la P-martingale fondamentale, cadlag et telle que $N_t = \frac{dQ}{dP}|\underline{\underline{F}}_t$ pour tout t ; d'après le théorème de Girsanov, $Z'= Z-\frac{1}{N_-}\cdot\langle Z,N\rangle$ est une Q-martingale locale. Z' est alors Φ-a.c.p. d'après la propriété 4). Mais alors, si H est prévisible borné Φ-négligeable, la décomposition canonique (sous P) de $H\cdot Z'$ doit être nulle, et comme cette décomposition s'écrit $H\cdot Z' = H\cdot Z - \frac{H}{N_-}\cdot\langle Z,N\rangle$, on a $H\cdot Z=0$. Cela signifie que Z est Φ-a.c.p. .

3.2 Nous revenons maintenant au point de vue adopté dans le paragraphe 2, en étudiant les solutions extrémales du "problème des martingales" sur $\mathbb{R}^n$. Nous désignons par Ω (ou Ω_d, Ω_c si la précision est nécessaire) l'ensemble des fonctions continues à droite et limitées à gauche (continues dans le cas de Ω_c) de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}^n$, par X le processus canonique défini sur Ω, et par $\underline{\underline{F}}^o_t$ la famille de tribus naturelle de X, rendue continue à droite. Soit L un opérateur linéaire de $\underline{\underline{C}}^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ dans $\underline{\underline{C}}_b(\mathbb{R}^n)$. On note $\underline{\underline{S}}_x(L)$ l'ensemble des lois P sur $(\Omega,\underline{\underline{F}}^o_\infty)$ telles que $P\{X_0=x\}=1$ et que

$$\forall f\in\underline{\underline{C}}^\infty_c \quad , \quad C^f_t = f(X_t)-f(X_0) - \int_0^t Lf(X_s)ds \text{ soit une P-martingale.}$$

$\underline{\underline{S}}_x(L)$ est un ensemble convexe, et nous désignerons par $\mathcal{E}_x(L)$ l'ensemble de ses points extrémaux. Le théorème 2.7 nous donne le critère suivant :

Théorème 3.4 . Soit $P\in\underline{\underline{S}}_x(L)$. Alors $P\in\mathcal{E}_x(L)$ si et seulement si $\underline{\underline{F}}_0$ est P-triviale, et si les variables 1 et $1_A(C^f_t-C^f_s)$ $(A\in\underline{\underline{F}}^o_{s-},\ f\in\underline{\underline{C}}^\infty_c,\ s<t)$ sont totales dans $L^1(\underline{\underline{F}}^o_\infty,P)$.

Maintenant, nous remarquons que $\underline{\underline{C}}^\infty_c$ est une algèbre . Par conséquent pour toute loi $P\in\underline{\underline{S}}_x(L)$, et toute $f\in\underline{\underline{C}}^\infty_c$, $<C^f,C^f>$ est absolument continue par rapport à $\Phi_t=t$, et nous pouvons même reprendre le calcul fait plus haut, et obtenir

$$<C^f,C^f>_t = \int_0^t \Gamma(f,f)(X_s)ds \quad \text{en posant } \Gamma(f,g)=L(fg)-fLg-gLf \ (f,g\in\underline{\underline{C}}^\infty_c)$$

Cela nous montre tout de suite que l'opérateur L ne peut être arbitraire : si $\underline{\underline{S}}_x(L)$ est non vide, la fonction continue $\Gamma(f,f)$ doit être positive en x. Donc si $\underline{\underline{S}}_x(L)$ est non vide pour tout x, L doit satisfaire à la condition de "type positif"

$$\text{pour tout } f\in\underline{\underline{C}}^\infty_c,\ \Gamma(f,f)=L(f^2)-2fLf \geqq 0$$

Supposons maintenant que P soit extrémale . Soit $M=1_A(C^f_t-C^f_s)$ $(s<t,\ A\in\underline{\underline{F}}^o_{s-})$. La martingale $E[M|\underline{\underline{F}}_u]=M_u$ vaut $1_A(C^f_{t\wedge u}-C^f_s)1_{\{s\leqq u\}}$, d'où l'on tire $d<M,M>_u = 1_A d<C^f,C^f>_u 1_{\{s\leqq u\leqq t\}} \ll du$. Appliquant alors le corollaire 2.5.3 et le caractère total dans L^1 des variables considérées, on voit que les conditions équivalentes 0-5 du lemme 3.2 sont satisfaites. Ainsi

Corollaire 3.5.1. Si $P\in\mathcal{E}_x(L)$, et si M est une P-martingale de carré intégrable, on a $d<M,M>_t \ll dt$.

3.3. Nous considérons maintenant un processus de Markov, solution du problème des martingales : c'est à dire une famille de mesures $(P_x)_{x\in\mathbb{R}^n}$ telle que $P_x\in\underline{\underline{S}}_x(L)$ pour tout x, et que $(\Omega,\ \underline{\underline{F}}^o_t,\ X_t,\ (P_x))$ soit un processus de Markov droit. Nous désignons par (P_t), (R_p) le semi-groupe et la résolvante correspondants, par $(\underline{\underline{F}}_t)$ la famille de tribus complétée pour toutes les lois P_μ , usuelle en théorie des processus de Markov.

Soit $f\in\underline{\underline{C}}^\infty_c$; comme C^f est une martingale pour toute loi P_x , nous avons

$$E_x[C^f_t]=E_x[C^f_0]=0 \quad , \text{ soit } \quad P_tf(x)-f(x) = \int_0^t P_sLf(x)ds$$

et comme $Lf\in\underline{\underline{C}}_b$, cela signifie que le domaine du générateur infinitésimal (faible) du processus contient $\underline{\underline{C}}^\infty_c$, et que le générateur coïncide avec L sur $\underline{\underline{C}}^\infty_c$.

Notons la conséquence suivante du corollaire 3.5.1 :

Corollaire 3.5.2 . Si $P_x\in\mathcal{E}_x(L)$ pour tout x (en particulier s'il y a unicité du problème des martingales : $\underline{\underline{S}}_x(L)=\{P_x\}$ pour tout x), le processus admet un opérateur carré du champ.

D'autre part, toutes les solutions du problème des martingales possèdent la propriété suivante :

Lemme 3.6.1 . Soit $P\in\underline{\underline{S}}_x(L)$, et soit T un t.a. prévisible. On a

$$P\{0<T<\infty,\ X_T\neq X_{T-}\} = 0$$

Autrement dit, les sauts de X sont totalement inaccessibles.

Démonstration . Le "autrement dit" est un résultat bien connu de théorie générale des processus. Quitte à remplacer T par $(T\wedge n)\vee 1/n$, on peut supposer T strictement positif et borné. Soit $f\in\underline{\underline{C}}_c^\infty$; la semi-martingale $f\circ X_t$ s'écrit $f\circ X_0+C_t^f + \int_0^t Lf(X_s)ds$; C^f étant une martingale, et le dernier processus étant continu, on voit que $E[f(X_T)|\underline{\underline{F}}_{T-}] = (f(X))_{T-} = f(X_{T-})$ puisque f est continue. D'où pour toute fonction g $E[g(X_{T-})f(X_T)] = E[g(X_{T-})f(X_{T-})]$, et cela entraîne que la loi du couple (X_{T-},X_T) est portée par la diagonale.

On en déduit, pour les processus de Markov, solutions du problème de martingales, les propriétés :

Lemme 3.6.2 . 1) La famille de tribus $(\underline{\underline{F}}_t)$ est quasi-continue à gauche.
2) Pour tout x et toute $g\in\underline{\underline{C}}_c^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\{x\})$ posons $\Lambda(x,g)=Lg(x)$. Alors $\Lambda(x,.)$ est une mesure de Radon positive sur $\mathbb{R}^n\setminus\{x\}$ (que nous considérerons souvent comme une mesure positive, non de Radon, sur $\mathbb{R}^n$, ne chargeant pas $\{x\}$). L'application $x\longmapsto\Lambda(x,.)$ est un noyau (noyau de Lévy). Si f est une fonction positive borélienne sur $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$, nulle sur la diagonale, la projection duale prévisible de la mesure aléatoire $\Sigma_{s>0}\ f(X_{s-},X_s)\varepsilon_s$ est la mesure aléatoire $\Lambda(X_s,f)ds$, où $\Lambda(x,f)=\int\Lambda(x,dy)f(x,y)$.

Signalons tout de suite un piège : nous n'avons pas affirmé que les seuls temps d'arrêt totalement inaccessibles étaient les temps de sauts de X, de sorte que le système de Lévy ci-dessus ne nous permet pas de compenser toutes les mesures aléatoires ponctuelles à sauts totalement inaccessibles.

Démonstration . 1) Il s'agit de montrer que pour tout temps prévisible T, que l'on peut supposer borné comme ci-dessus, on a $\underline{\underline{F}}_{T-}=\underline{\underline{F}}_T$. Or $X_T=X_{T-}$ p.s. est $\underline{\underline{F}}_{T-}$-mesurable, en vertu du lemme précédent. La propriété de Markov forte entraîne alors que $E[U|\underline{\underline{F}}_T]=E[U|\underline{\underline{F}}_{T-}]$ p.s. pour toute variable U, donc $\underline{\underline{F}}_{T-}=\underline{\underline{F}}_T$ aux ensembles négligeables près.

2) est essentiellement un résultat classique d'Ikeda-S.Watanabe (cf. J.M. Kyoto, 1962 [(1)]). Si $g\in\underline{\underline{C}}_c^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\{x\})$, on a $Lg(x)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}P_tg(x)\geq 0$, d'où l'existence de la mesure positive $\Lambda(x,.)$. Pour montrer que Λ est un

1. Voir aussi le séminaire de Strasbourg I, p. 160.

noyau , on considère des fonctions $g_n(x,y)$ de classe $\underline{\underline{C}}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$, nulles au voisinage de la diagonale, et croissant vers 1 hors de la diagonale. Alors si $f\in\underline{\underline{C}}_c^\infty$ est positive, on a pour tout x

$$\Lambda(x,f) = \lim_n \int\Lambda(x,dy)g_n(x,y)f(y) = \lim_n L(fg_n(x,.))$$

qui est bien borélienne (en fait, on peut montrer que $\Lambda(.,f)$ est s.c.i. si f est continue positive). Nous ne donnerons pas le reste de la démonstration, qui est trop long .

Remarque. Si $f\in\underline{\underline{C}}_c^\infty$ est positive et nulle en x, il existe des $f_n\in\underline{\underline{C}}_c^\infty$ nuls au voisinage de x et positifs, croissant vers f. On a alors $Lf(x)\geqq Lf_n(x) =\Lambda(x,f_n)$, donc $Lf(x)\geq\Lambda(x,f)$. En particulier

$$\int\Lambda(x,dy)(g(y)-g(x))^2 < \infty \quad \text{pour toute } g\in\underline{\underline{C}}_c^\infty$$

On peut pousser cette discussion beaucoup plus loin : J.P. Roth [30] a montré que les opérateurs $L : \underline{\underline{C}}_c^\infty(\mathbb{R}^n)\hookrightarrow \underline{\underline{C}}_b(\mathbb{R}^n)$ tels que $L1=0$ et que $\underline{\underline{S}}_x(L)\neq\emptyset$ pour tout $x\in\mathbb{R}^n$ sont nécessairement de la forme

$$Lf(x) = \frac{1}{2}\Sigma_{i,j}\, a_{ij}(x)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x) + \Sigma_i\, b_i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$
$$+ \int\Lambda(x,dy)\left(f(y)-f(x)-\Sigma_i h^i(y-x)\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right)$$

où $h^i\in\underline{\underline{C}}_c^\infty$ coïncide avec la coordonnée x^i au voisinage de 0. On retrouve donc à peu de chose près les opérateurs considérés par Jacod-Yor en [14].

Le lemme suivant est analogue au précédent, mais concerne les solutions extrémales du problème de martingales au lieu des solutions markoviennes.

<u>Lemme 3.6.3. Soit</u> $P\in\mathcal{E}_x(L)$, <u>et soit</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$ <u>la filtration</u> $(\underline{\underline{F}}_t^o)$ <u>rendue</u> $(\underline{\underline{F}}_\infty^o,P)$-<u>complète</u>.

1) <u>Pour tout t.a.</u> T, <u>on a</u> $\underline{\underline{F}}_T = \underline{\underline{F}}_{T-}\vee\sigma(X_T 1_{\{T<\infty\}})$.
2) <u>Les seuls t.a. totalement inaccessibles sont les temps de saut de</u> X.
3) <u>La tribu</u> $\underline{\underline{F}}_0$ <u>est</u> P-<u>triviale</u>.
4) <u>La filtration</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$ <u>est quasi-continue à gauche</u>.
5) <u>Si</u> T <u>est un t.a., on a l'équivalence</u>
$$P\{X_T\neq X_{T-}\ ,0<T<\infty\}=0 \iff T \text{ est prévisible} .$$

<u>Démonstration</u> . D'après le théorème 2.7, la loi P étant extrémale, les propriétés suivantes sont satisfaites :

a) Les variables 1 et $1_A(C_v^f-C_u^f)$ ($A\in\underline{\underline{F}}_{u-}^o$, $u<v$, $f\in\underline{\underline{C}}_c^\infty$) sont totales dans L^1 (assertion 3) du théorème 2.7). Noter que $1_A(C_v^f-C_u^f)=U$ s'écrit aussi $\int_0^\infty H_s dC_s^f$, où H est le processus prévisible $1_A 1_{]u,v]}$; la martingale associée $U_t=E[U|\underline{\underline{F}}_t]$ vaut donc $\int_0^t H_s dC_s^f$.

b) $\underline{\underline{F}}_0$ est P-triviale (assertion 4) de 2.7), ce qui règle ici le 3).

Démontrons alors 1) : il suffit de prouver que pour des variables U formant un ensemble total dans $L^1(P)$, on a

$$E[U|\underline{\underline{F}}_T] \text{ est p.s. mesurable par rapport à } \underline{\underline{F}}_{T-}\vee\sigma(X_T 1_{\{T<\infty\}})$$

C'est trivial pour U=1. Lorsque U est de la forme ci-dessus, $U=\int_0^\infty H_s dC_s^f$, on a avec les mêmes notations

$$E[U|\underline{\underline{F}}_T] = U_T = U_{T-} + H_T((f(X_T)-f(X_{T-}))$$

H étant prévisible, H_T est $\underline{\underline{F}}_{T-}$-mesurable, et l'énoncé en découle.

Démontrons 5) : nous savons que si T est prévisible, $X_T=X_{T-}$ p.s. sur $\{0<T<\infty\}$. Inversement, si T possède cette propriété, toutes les martingales $U_t=E[U|\underline{\underline{F}}_t]$, où U=1 ou bien U est de la forme ci-dessus, sont continues à l'instant T. Comme ces variables U forment un ensemble total dans L^1, toutes les martingales uniformément intégrables sont continues à l'instant T. On montre alors en théorie générale des processus que T est prévisible, et que $\underline{\underline{F}}_T=\underline{\underline{F}}_{T-}$.

En particulier, cela entraîne que $\underline{\underline{F}}_T=\underline{\underline{F}}_{T-}$ pour tout temps prévisible, ce qui équivaut à 4).

Enfin, soit T un t.a. totalement inaccessible ; le t.a. $T_{\{X_T=X_{T-},T<\infty\}}$ est totalement inaccessible, et prévisible d'après 5), donc il est p.s. égal à $+\infty$, et $P\{X_T=X_{T-}, T<\infty\}=0$. Donc T est un temps de saut de X et 2) est établie.

3.4 Dans quels cas peut on affirmer que la loi P_x appartient à $\mathcal{E}_x(L)$?

Sans pouvoir apporter de réponse, nous voudrions faire quelques remarques à ce sujet. Soit U l'ensemble des martingales C_t^f , avec $f\in\underline{\underline{C}}_c^\infty$, et soit V l'ensemble des martingales

$$C_t^h = h(X_t) - h(X_0) - \int_0^t (ph-g)(X_s)ds \quad , \; h=R_p g \; , \; g\in\underline{\underline{C}}_c^\infty .$$

D'après le théorème 2.11 et le théorème 2.7, on a $P_x\in\mathcal{E}_x(L)$ si et seulement si $\mathcal{L}^1(1,U)=H^1(P_x)$. D'après le résultat de Kunita-Watanabe rappelé en 3.1, on a toujours $\mathcal{L}^1(1,V)=H^1(P_x)$. En définitive, tout revient à prouver que $\mathcal{L}^1(V)\subset\mathcal{L}^1(U)$. Voici alors les remarques :

<u>Remarque 1.</u> <u>Les propriétés suivantes sont équivalentes</u>

i) <u>Tout temps totalement inaccessible est un temps de saut de</u> X.

ii) <u>Toute somme compensée de sauts appartient localement à</u> $\mathcal{L}^1(U)$.

<u>Cette condition est satisfaite en particulier si</u> $R_p(\underline{\underline{C}}_c^\infty)\subset\underline{\underline{C}}_b(\mathbb{R}^n)$.

Il nous suffit de démontrer que pour toute $h=R_p g$ $(g\in\underline{\underline{C}}_c^\infty)$, la martingale $(C^h)^d$ appartient localement à $\mathcal{L}^1(U)$. Cette martingale étant de carré intégrable sur tout intervalle fini, nous la décomposons suivant le sous-espace stable (au sens de Kunita-Watanabe) engendré par U, et une martingale (M_t), nulle en 0, de carré intégrable sur tout intervalle fini, orthogonale aux C^g ($g\in\underline{\underline{C}}_c^\infty$). D'après Kunita-Watanabe[1], (M_t) est une fonctionnelle additive, et il existe une fonction borélienne m sur $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$, nulle sur la diagonale, telle que $\Delta M_t = m(X_{t-},X_t)$ - c'est ici qu'intervient l'absence de sauts de M autres que les sauts de X. En particulier, M étant de carré intégrable sur $[0,t]$ pour tout t fini, on a $E[\ \Sigma_0^t\ m^2(X_{s-},X_s)] < \infty$. Soient $g\in\underline{\underline{C}}_c^\infty$, k borélienne bornée sur $\mathbb{R}^n$, écrivons que M est orthogonale à l'intégrale stochastique $\int_0^{\cdot} k(X_{s-})dC_s^g$; il vient que

α) $E[\Sigma_0^t\ |k(X_{s-})m(X_{s-},X_s)(g(X_s)-g(X_{s-}))|] < \infty$

β) $E[\Sigma_0^t\ k(X_{s-})m(X_{s-},X_s)(g(X_s)-g(X_{s-}))] = 0$

Prenons $j\in\underline{\underline{C}}_c^\infty$, et appliquons ces formules avec gj au lieu de g. Il vient en développant

$$E[\ \Sigma_0^t\ k(X_{s-})m(X_{s-},X_s)(g(X_s)-g(X_{s-}))j(X_s) + \\ + \Sigma_0^t\ k(X_{s-})m(X_{s-},X_s)(j(X_s)-j(X_{s-}))g(X_{s-})] = 0$$

Le dernier terme a une espérance nulle d'après β). Il reste donc

γ) $E[\Sigma_0^t\ k(X_{s-})j(X_s)m(X_{s-},X_s)(g(X_s)-g(X_{s-}))]=0$

un raisonnement de classes monotones justifié par α) avec k=1 nous permet de remplacer $k(X_{s-})j(X_s)$ par $u(X_{s-},X_s)$, où u est borélienne bornée sur $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$. Prenant $u(x,y) = \mathrm{sgn}(m(x,y)(g(x)-g(y)))$, il est immédiat de démontrer que m est nulle, et M aussi.

La démonstration de ii)=>i) est semblable à celle de l'assertion 2) du lemme 3.6.3 : si T est un t.a. totalement inaccessible, le t.a. $S=T_{\{X_T=X_{T-},T<\infty\}}$ est aussi totalement inaccessible, et il existe donc une martingale uniformément intégrable M qui est une somme compensée de sauts, et qui admet un saut unité à l'instant S. D'après ii), M appartient à $\mathcal{L}^1(U)$, donc M est continue à l'instant S puisque $X_S=X_{S-}$. Donc $S=+\infty$ p.s., et T est un temps de saut de X.

Enfin, si $h=R_pg$ est continue pour $g\in\underline{\underline{C}}_c^\infty$, les martingales C^h ne sautent qu'aux instants de saut de X, et d'après le résultat de Kunita-Watanabe, il en est de même de toutes les martingales. D'où la dernière assertion.

La remarque suivante est malheureusement d'une généralité insuffisante.

__Remarque 2__ . __Supposons que__ $R_p(\underline{\underline{C}}_c^\infty)\subset\underline{\underline{C}}^2(\mathbb{R}^n)$. __Alors__ $P_x\in\mathcal{E}_x(L)$.

1. Plus exactement, d'après [31], car Kunita-Watanabe utilisaient l' hypothèse (L). Notre démonstration revient à un passage des représentations optionnelles $W*(\mu-\nu)$ aux représentations prévisibles (th. 1.7 de [14], p.92), mais avec plus de généralité (on a séparé le cas purement discontinu).

Le processus $(g\circ X_t)$ étant une semi-martingale pour tout $g\in\underline{\underline{C}}_c^\infty$, le processus X lui-même est une semi-martingale vectorielle. Mais alors la formule d'Ito entraîne que $(h\circ X_t)$ est une semi-martingale pour toute fonction de classe C^2, avec une décomposition

$$h\circ X_t = \Sigma_i \int_0^t \frac{\partial h}{\partial x_i}(X_{s-})dX_s^i + \text{termes à variation finie}$$

D'où la partie martingale continue de la semi-martingale $(h\circ X_t)$:

$$(h\circ X)_t^c = \Sigma_i \int_0^t \frac{\partial h}{\partial x_i}(X_{s-})d(X^i)_s^c$$

Si la résolvante applique $\underline{\underline{C}}_c^\infty$ dans $\underline{\underline{C}}^2$, nous pouvons appliquer cela avec $h=R_pg$ ($g\in\underline{\underline{C}}_c^\infty$) ; les semi-martingales $h(X)$ et C^h ayant même partie martingale continue, nous voyons que $(C^h)^c$ est une somme d'intégrales stochastiques par rapport aux X^{ic}.

Or nous savons d'après la remarque précédente que toute martingale locale purement discontinue appartient localement à $\mathcal{L}^1(U)$. Soit $g\in\underline{\underline{C}}_c^\infty$; la martingale C^g appartient à U, la martingale $(C^g)^d$ appartient localement à $\mathcal{L}^1(U)$, donc $(C^g)^c$ appartient localement à $\mathcal{L}^1(U)$. Par localisation, on voit que $(X^i)^c$ appartient localement à $\mathcal{L}^1(U)$. D'après ce qui précède on a le même résultat pour $(C^h)^c$, puis après addition de $(C^h)^d$, pour C^h. Mais alors avec les notations du début on a $\mathcal{L}^1(V)\subset\mathcal{L}^1(U)$ et c'est terminé.

Notre troisième remarque consiste à montrer que si l'on n'a pas pour tout x $P_x\in\mathcal{E}_x(L)$, alors il y a non-unicité du problème des martingales en un sens terriblement fort : il existe une infinité de processus de Markov distincts, solutions du problème de martingales pour tout x. On peut rapprocher cela de la proposition 4.4 de [14], où l'on exhibe un opérateur L et une infinité de semi-groupes de Feller distincts vérifiant tous $P_x\in\mathcal{E}_x(L)$ pour tout x .

Supposons donc que $P_x\notin\mathcal{E}_x(L)$, et choisissons $h=R_pg$ ($g\in\underline{\underline{C}}_c^\infty$) telle que C^h n'appartienne pas localement à $\mathcal{L}^1(U)$ pour P_x . Distinguons deux cas.

1) $(C^h)^d$ n'appartient pas localement à $\mathcal{L}^1(U)$. Alors (remarque 1) il existe un temps terminal totalement inaccessible de la forme

$$T = \inf\{\, t>0 : |(h\circ X_t)_- - h\circ X_t|>\varepsilon \ ,\ X_t=X_{t-}\}$$

fini avec probabilité positive pour P_x. Soit (T_n) la suite des itérés de T, soit p_t la fonctionnelle additive qui compte les $T_n\leq t$; on a $\varepsilon^2 p_t \leqq [C^h,C^h]_t$, et la fonction $E_\cdot[(C_t^h)^2]$ est bornée, donc $E_\cdot[p_t]$ est bornée, et la fonctionnelle additive M_t compensée de p_t est telle que $E_\cdot[\exp(\lambda|M_1|)]$ soit bornée pour λ assez petit, d'après l'inégalité de John-Nirenberg. On sait qu'alors la fonctionnelle multiplicative $\mathcal{E}(\lambda M)$, qui est positive si $0<\lambda<1$, est une vraie martingale d'espérance 1 sur

$[0,1]$ pour λ assez petit, mais encore >0. Par multiplicativité, on voit que c'est une vraie martingale d'espérance 1 sur $[0,\infty[$, et comme M est une somme compensée de sauts qui ne saute pas en même temps que X, M (donc $\mathcal{E}(\lambda M)$) est orthogonale aux C^g , $g\in\underline{\underline{C}}_c^{\infty}$. Mais alors les mesures Q_x telles que $\frac{dQ_x}{dP_x}\Big|_{\underline{\underline{F}}_t^o} = \mathcal{E}(\lambda M)_t$ sont toutes des solutions du problème de martingales, et correspondent à des processus de Markov distincts.

2) Toute $(C^h)^d$ appartient localement à $\mathcal{L}^1(U)$. Alors on est dans le cas de la remarque 1, et il existe h telle que $(C^h)^c$ n'appartienne pas localement à $\mathcal{L}^1(U)$. Soit M la martingale fonctionnelle additive continue obtenue en retranchant à $(C^h)^c$ sa projection sur le sous-espace stable (au sens de Kunita-Watanabe) engendré par U . On a $E_{\bullet}[M_t^2]\leq E_{\bullet}[(C^h)_t^{c2}]$ qui est bornée, et on raisonne comme plus haut, sur $\mathcal{E}(\lambda M)$.

3.5 Nous terminons ce paragraphe en dégageant une autre connexion entre la propriété (RP) et la propriété de Markov.

Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus à valeurs dans un espace mesurable $(E,\underline{\underline{E}})$, défini sur un espace $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$; on désigne par $(\underline{\underline{F}}_t)$ la filtration naturelle de (X_t), rendue continue à droite et complétée, et on suppose que $\underline{\underline{F}}=\underline{\underline{F}}_{\infty}$, et que (X_t) vérifie la propriété de Markov simple par rapport à $(\underline{\underline{F}}_t)$, non nécessairement homogène dans le temps.

Rappelons tout d'abord la notion d'<u>ensemble plein</u> de fonctions, introduite par P.A. Meyer en [24].

<u>Définition</u>. Un ensemble F de fonctions réelles bornées $\underline{\underline{E}}$-mesurables est dit <u>plein</u> si la seule mesure bornée λ telle que

$$\forall\, f\in F \;,\; \int f d\nu = 0$$

est la mesure nulle.

<u>Lemme 3.7 . Si</u> F <u>est plein, et si</u> μ <u>est une probabilité sur</u> $(E,\underline{\underline{E}})$, <u>alors</u>

1) F <u>est total dans</u> $L^p(\underline{\underline{E}},\mu)$ <u>pour tout</u> p, $1\leq p<\infty$.

2) <u>On a</u> $\sigma(F)=\underline{\underline{E}}$ <u>aux ensembles</u> μ<u>-négligeables près</u>.

<u>Démonstration</u>. La seconde assertion découle classiquement de la première. Pour montrer la première, il suffit de remarquer que si p' est l'exposant conjugué de p, l'orthogonal de F dans $L^{p'}$ est réduit à 0.

On peut maintenant énoncer le :

<u>Théorème 3.8 . Soient</u> F <u>un ensemble plein de fonctions</u>, M <u>une martingale locale sur</u> Ω, <u>nulle en</u> 0. <u>Les propriétés suivantes sont équivalentes</u>

1) $\forall\, t\geq 0$, $\forall f\in F$, $f(X_t) = E[f(X_t)] + \int_0^{\infty} H_s^f dM_s$, <u>où</u> H^f <u>est un processus prévisible tel que</u> $E[\int_0^{\infty}(H_s^f)^2 d[M,M]_s] < \infty$

2) Même énoncé en remplaçant F par $b(\underline{\underline{E}})$.

3) M vérifie la propriété (RP) relativement à $(\underline{\underline{F}}_t)$.

Démonstration . 1)=>2). Soit $g\in b(\underline{\underline{E}})$. Si $t=0$, et si $\mu_0=X_0(P)$, nous avons $f=\int f d\mu_0$ μ-p.s. pour les $f\in F$, qui forment un ensemble total dans L^1, et $\underline{\underline{E}}$ est donc μ_0-dégénérée. Soient $t>0$, et μ_t la loi image $X_t(P)$. D'après le lemme 3.7 toute $f\in b(\underline{\underline{E}})$ est limite dans $L^2(\mu_t)$ d'une suite d'éléments f_n de l'espace vectoriel engendré par F, admettant donc des représentations

$$f_n(X_t) = E[f_n(X_t)] + \int_0^t H_s^n dM_s$$

Les variables $f_n(X_t)$ convergent vers $f(X_t)$ dans $L^2(P)$, et on vérifie comme dans le lemme 2.2 que les H^n forment une suite de Cauchy dans l'espace $\Gamma^2(M)$ des processus prévisibles H tels que $\|H\|=E[\int_0^\infty H_s^2 d[M,M]_s]^{1/2}$ $<\infty$, d'où existence d'une représentation pour $f(X_t)$.

2)=>3). Il suffit de montrer que toute variable Y (bornée, $\underline{\underline{F}}$-mesurable) peut s'écrire sous la forme $Y=E[Y]+\int_0^\infty H_s dM_s$, où H est prévisible et vérifie $E[\int_0^\infty H_s^2 d[M,M]_s] < \infty$. Or les variables qui peuvent se représenter ainsi forment un espace vectoriel qui contient les constantes, stable par limite dans L^2, donc par limite simple bornée. Par application du théorème des classes monotones, il suffit donc de traiter le cas des variables $Y_n=\prod_{1\leq i\leq n} f_i(X_{t_i})$, $f_i\in b(\underline{\underline{E}})$, $t_1<t_2\ldots<t_n$. Nous procédons par récurrence sur n . La variable $f_n(X_{t_n})$ admet une représentation $c+\int_0^\infty K_s dM_s$; on peut alors écrire

$$f_n(X_{t_n}) = E[f_n(X_{t_n})|\underline{\underline{F}}_{t_n}] = c+\int_0^{t_n} K_s dM_s$$

$$E[f_n(X_{t_n})|\underline{\underline{F}}_{t_{n-1}}] = c+\int_0^{t_{n-1}} K_s dM_s$$

D'après la propriété de Markov (noter que l'homogénéité dans le temps n'est pas nécessaire) cette dernière variable s'écrit $g(X_{t_{n-1}})$, avec $g\in b(\underline{\underline{E}})$. Par différence, nous avons donc

$$f_n(X_{t_n}) = g(X_{t_{n-1}}) + \int_{t_{n-1}}^{t_n} K_s dM_s$$

Portons cette valeur dans l'expression de Y_n . Nous avons en notant Y_{n-1} le produit étendu jusqu'à $n-1$

$$Y_n = Y_{n-1}g(X_{t_{n-1}}) + \int_0^\infty K'_s dM_s$$

où $K'_s = Y_{n-1}K_s 1_{\{t_{n-1}<s\leq t_n\}}$ est prévisible, puisque Y_{n-1} est $\underline{\underline{F}}_{t_{n-1}}$-mesurable. Quant au premier terme, il est du même type que Y_n, mais ne fait intervenir que les instants $t_1,\ldots,t_{n-1}$, et l'hypothèse de récurrence permet de conclure.

Une variante du théorème 3.8 consiste à remplacer M par une famille $\underline{\underline{N}}$ de martingales locales, l'hypothèse étant

pour tout $f \in \mathcal{F}$, tout $t \geq 0$, la martingale $E[f(X_t)|\underline{\underline{F}}_s]$ appartient à $\mathcal{L}^1(\underline{\underline{N}})$

et la conclusion

$$H^1((\underline{\underline{F}}_t),P) = \mathcal{L}^1(\underline{\underline{N}}).$$

Les modifications à apporter dans la démonstration précédente sont élémentaires.

Illustrons ce théorème en reprenant le problème des martingales étudié plus haut en 3.4. Notons (P_t) le semi-groupe du processus de Markov de lois $(P_x)_{x \in \mathbb{R}^n}$, et prenons comme ensemble plein $\mathcal{F}=\underline{\underline{C}}_c^{\infty}$. Pour toute $f \in \underline{\underline{C}}_c^{\infty}$, la martingale $E[f(X_t)|\underline{\underline{F}}_s]$ vaut

$$M^{t,f}_s = P_{t-s}f(X_s) \text{ si } 0 \leq s < t \ , \quad f(X_t) \text{ si } s \geq t$$

Prenons pour $\underline{\underline{N}}$ l'ensemble des martingales C^g ($g \in \underline{\underline{C}}_c^{\infty}$). L'extrémalité de P_x dans $\underline{\underline{S}}_x(L)$ équivaut à la condition $H^1(P_x) = \mathcal{L}^1(\underline{\underline{N}},1)$; d'après le théorème 3.8, cela équivaut encore à l'appartenance des martingales $M^{t,f}$ à $\mathcal{L}^1(\underline{\underline{N}},1)$, pour $f \in \underline{\underline{C}}_c^{\infty}$.

Lorsque h est une fonction sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^n$ de classe $C^{1,2}$, le processus $h(s,X_s)$ est une semi-martingale d'après la formule d'Ito, et la formule d'Ito nous permet même (lorsque h est bornée, par exemple, de sorte que la semi-martingale est spéciale) d'en écrire la décomposition canonique. Explicitons en la partie martingale, qui vaut

$$\Sigma_i \int_0^s \frac{\partial}{\partial x_i} h(u,X_u) d(X^i)^c_u + W*(\mu-\nu)$$

avec les notations de [14] : μ est la mesure aléatoire sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$

$$\mu(\omega \ ; \ dt \times dx \ ) = \Sigma_{s>0} \ \varepsilon_{(s,\Delta X_s(\omega))}(dt \times dx) 1_{\{\Delta X_s(\omega) \neq 0\}}$$

et ν sa compensatrice prévisible, donnée par le système de Lévy Λ : $\nu(\omega \ ; \ dt \times dx) = dt \Lambda(X_t(\omega),dx)$. D'autre part, $W(\omega,s,x)$ est la fonction mesurable sur $(\Omega \times \mathbb{R}_+^*) \times \mathbb{R}^n$, $\underline{\underline{P}} \times \underline{\underline{B}}(\mathbb{R}^n))$

$$W(\omega,s,x) = h(s,x+X_{s-}(\omega))-h(s,X_{s-}(\omega))$$

Supposons maintenant que $(t,x) \longmapsto P_t f(x)$ soit de classe $C^{1,2}$ pour $f \in \underline{\underline{C}}_c^{\infty}$. Appliquant cela à $h(s,x) = P_{t-s}f(x)$ pour $s \in [0,t[$, nous arrivons à écrire explicitement les martingales $M^{t,f}$. Malheureusement, les représentations que l'on écrit ainsi sont des représentations optionnelles, non prévisibles, et il reste encore un peu de travail à faire pour en déduire, à la manière de [14], l'extrémalité de P. Celle-ci se déduit plus simplement de la méthode des remarques 1-2 du 3.4 .

APPENDICE

(M. Yor et J. de Sam Lazaro)

1. Martingales homogènes et propriété (RP)

Soit $(M_t)_{t\geq 0}$ une martingale nulle en 0 (cadlag) sur un espace de probabilité filtré $(\Omega,\underline{\underline{F}},\underline{\underline{F}}_t,P)$. On dit que (M_t) est homogène si, pour tout $h\geq 0$, les processus $(M_t)_{t\geq 0}$ et $(M_t^h)=(M_{t+h}-M_h)$ ont même loi. Soulignons l'importance des martingales homogènes en théorie des flots. On se propose de déterminer toutes les martingales homogènes qui possèdent la propriété (RP) relativement à leur famille de tribus naturelle.

On peut évidemment se transporter sur l'espace Ω des applications cadlag de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, muni de ses applications coordonnées (X_t) , de sa filtration naturelle $(\underline{\underline{F}}_t^\circ)$ - on pose $\underline{\underline{F}}^\circ=\underline{\underline{F}}_\infty^\circ$ - et d'une loi P pour laquelle le processus X est une martingale. L'homogénéité de la martingale X signifie alors que la loi P est invariante par θ_h pour tout $h\geq 0$, où θ_h est l'application de Ω dans lui même définie par

$\forall\ \omega\in\Omega$, $\quad X_t(\theta_h\omega) = X_{t+h}(\omega)-X_h(\omega)$

Enonçons le résultat :

Théorème 1. Supposons que, sous P, X soit une martingale homogène possédant la propriété (RP). Alors X est un mouvement brownien, ou la martingale compensée d'un processus de Poisson.

Démonstration. Il est bien connu que le mouvement brownien (de paramètre quelconque σ^2) et le processus de Poisson compensé (d'intensité λ quelconque) possèdent la propriété (RP). Par ailleurs, ce sont les seuls processus à accroissements indépendants, réels et centrés, pour lesquels la propriété (RP) est vérifiée. Voir à ce sujet l'appendice de [9] . Ce résultat peut également être retrouvé à partir de la représentation des martingales des processus à accroissements indépendants comme intégrales stochastiques optionnelles (cf. par exemple le paragraphe 3 de [16]). Le théorème 1 sera donc prouvé si nous montrons que X est un processus à accroissements indépendants.

Nous désignerons par $\underline{\underline{F}}_t^h$ la tribu engendrée par les variables $X_{s+h}-X_h$, $0\leq s\leq t$.

X ayant la propriété (RP), toute variable $Z\in L^2(\underline{\underline{F}}_\infty^\circ,P)$ admet une représentation

$$Z = E[Z] + \int_0^\infty \varphi_s dX_s \text{ , où } \varphi \text{ est prévisible, et } E[\int_0^\infty \varphi_s^2 d[X,X]_s] < \infty .$$

Appliquons l'opérateur θ_h . Il est très facile de vérifier que le processus φ_s^h défini par $\varphi_s^h(\omega)=\varphi_{s-h}(\theta_h\omega)1_{\{s>h\}}$ est prévisible, et que l'on a

$$(\int_0^\infty \varphi_s dX_s)\circ\theta_h = \int_0^\infty \varphi_s^h dX_s$$

En effet, ces propriétés sont immédiates si $\varphi_t = 1_A 1_{]u,v]}(t)$ $(u<v,\ A\in\underline{\underline{F}}^\circ_u)$, et on passe des processus prévisibles élémentaires aux processus prévisibles φ tels que $E[\int_0^\infty \varphi_s^2 d[X,X]_s]<\infty$ par le procédé habituel, en utilisant l'invariance de P sous θ_h. On a donc finalement, le processus φ^h étant nul sur $[0,h[$

$$E[(\int_0^\infty \varphi_s dX_s)\circ\theta_h | \underline{\underline{F}}_h] = 0$$

ou encore

$$E[Z\circ\theta_h | \underline{\underline{F}}_h] = E[Z]$$

Faisant parcourir à Z une algèbre de fonctions bornées engendrant $\underline{\underline{F}}^\circ_\infty$, $Z\circ\theta_h$ parcourt une algèbre engendrant $\underline{\underline{F}}^h_\infty$, et par conséquent

$\underline{\underline{F}}^h_\infty$ et $\underline{\underline{F}}_h$ sont indépendantes pour tout $h>0$

ce qui entraîne en particulier que (X_t) est à accroissements indépendants.

<u>Remarque</u>. Nous n'avons pas résolu ici le problème qui se rencontre réellement en théorie des flots : celui-ci concerne en effet l'espace Ω des applications cadlag de $\mathbb{R}$ <u>tout entier</u> dans $\mathbb{R}$, nulles en 0, avec le même processus canonique (X_t), et la filtration $\underline{\underline{F}}^\circ_t$ définie pour $t\in\mathbb{R}$ par $\underline{\underline{F}}^\circ_t = \sigma(X_u - X_v,\ u\leq t,\ v\leq t)$. P étant une loi sur Ω, on dit que X est une <u>martingale</u> si $E[|X_t|]<\infty$ pour tout $t\in\mathbb{R}$, et si pour tout u et tout $t>u$ on a $E[X_t - X_u | \underline{\underline{F}}^\circ_u]=0$. La martingale est dite <u>homogène</u> si P est invariante par les opérateurs θ_h comme ci-dessus, mais la propriété (RP) s'écrit

$$\left|\begin{array}{l}\forall\ Z\in L^2(\underline{\underline{F}}^\circ_\infty) \text{ il existe } (\varphi_t)_{t\in\mathbb{R}} \text{ prévisible tel que } E[\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_s^2 d[X,X]_s]<\infty \\ \text{et que } Z=E[Z] + \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_s dX_s\end{array}\right.$$

ou encore, si l'on préfère travailler sur $[0,\infty[$

$$\left|\begin{array}{l}\forall\ Z\in L^2(\underline{\underline{F}}^\circ_\infty) \text{ il existe } (\varphi_t)_{t\geq 0} \text{ prévisible tel que } E[\int_0^\infty\varphi_s^2 d[X,X]_s]<\infty \\ \text{et que } Z= E[Z|\underline{\underline{F}}^\circ_0] + \int_0^\infty\varphi_s dX_s\end{array}\right.$$

2. <u>Existence d'une martingale totalisatrice</u>

Soit $(\Omega,\underline{\underline{F}},\underline{\underline{F}}_t,P)$ un espace de probabilité filtré vérifiant les conditions habituelles, et de plus les trois conditions suivantes

α) $\underline{\underline{F}} = \bigvee_t \underline{\underline{F}}_t$

β) $L^2(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$ est séparable

γ) $\underline{\underline{F}}_0$ est P-triviale.

On se pose la question de savoir s'il existe une martingale $Z\in\underline{\underline{M}}^2$ qui ait la propriété (RP) par rapport à $(\underline{\underline{F}}_t)$. Une telle martingale, si elle existe, est dite <u>totalisatrice</u>, à cause de la terminologie analogue employée dans la théorie des algèbres de Von Neumann, et des liens étroits existant entre cette théorie et celle des intégrales stochastiques (voir à ce sujet Dellacherie et Stricker [29]). A l'aide des résultats de [29], l'un de nous a indiqué en [16] une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une martingale totalisatrice (cf. [16], théorèmes 4 et 5). Nous allons donner ci-dessous une autre condition nécessaire et suffisante.

A toute martingale $M \in \underline{\underline{M}}^2$, on associe la mesure positive bornée sur la tribu prévisible

$$p_M(ds\times d\omega) = d\langle M,M\rangle_s(\omega)dP(\omega)$$

Si M et N sont deux éléments de $\underline{\underline{M}}^2$, on a $p_M \ll p_N$ si et seulement si, pour presque tout ω, on a $d\langle M,M\rangle_t(\omega) \ll d\langle N,N\rangle_t(\omega)$; de même les mesures p_M et p_N sont étrangères si et seulement si $d\langle M,M\rangle_t(\omega)$ et $d\langle N,N\rangle_t(\omega)$ sont étrangères sur $\mathbb{R}_+$ pour presque tout ω.

Voici nos résultats :

Proposition 2. *Soient* M *et* N $\in \underline{\underline{M}}^2$, *nulles en 0 et non nulles. Les propriétés suivantes sont équivalentes*

a) p_M *et* p_N *sont étrangères*

b) *Les martingales* M *et* N *sont orthogonales et* $\mathcal{L}^2(M,N)=\mathcal{L}^2(M+N)$.

Théorème 3. *Sous les hypothèses* α,β,γ *les propriétés suivantes sont équivalentes* :

1) *Il existe une martingale totalisatrice.*

2) *Pour tout couple* (M,N) *de martingales orthogonales de* $\underline{\underline{M}}^2$, *les mesures* p_M *et* p_N *sont étrangères.*

Remarque. D'après la proposition 2), on peut remplacer 2) par

2') M et N sont orthogonales si et seulement si p_M et p_N sont étrangères.

Démonstration de la proposition.

On utilise la notation usuelle H·M pour l'intégrale stochastique $\int_0^{\cdot} H_s dM_s$.

a)=> b). p_M et p_N étant étrangères, il existe un ensemble prévisible A portant p_M un ensemble prévisible B portant p_N, tels que $A\cap B=\emptyset$. On a alors $M=1_A\cdot M$, $N=1_B\cdot N$, donc $\langle M,N\rangle = 1_A 1_B \langle M,N\rangle = 0$, et M et N sont orthogonales. Alors $\mathcal{L}^2(M,N)$ est constitué des martingales de carré intégrable de la forme H·M+K·N avec H,K prévisibles, et on a

$$H\cdot M = H1_A(M+N) \ , \ K\cdot N = K1_B(M+N) \ , \text{ d'où b).}$$

b)=>a). D'après b), il existe H et K prévisibles tels que $M=H\cdot X$, $N=K\cdot X$ en posant $X=M+N$. Comme $\langle M,N\rangle=0$, on a $0=(HK)\cdot\langle X,X\rangle$, donc $HK=0$ p_X-p.p.. Alors l'ensemble $A=\{H\neq 0\}$ porte p_M , et A^c porte p_N .

Démonstration du théorème.
1)=>2) , d'après la démonstration précédente de b)=>a), en prenant ici pour X une martingale totalisatrice.
2)=>1) . D'après l'hypothèse β , il existe une suite (finie ou infinie) de martingales de carré intégrables X^n nulles en 0, non nulles, deux à deux orthogonales, telles que $\underline{\underline{M}}_0^2$ soit égal à $\mathcal{L}^2(X^n, n\in\mathbb{N})$. Quitte à remplacer X^n par $\lambda_n X^n$, avec des $\lambda_n\neq 0$ convenables, on peut supposer que la série $\Sigma_n X^n$ converge dans $\underline{\underline{M}}^2$ vers une martingale X. Pour montrer que X est totalisatrice, il suffit de montrer que toute martingale Y orthogonale à X est nulle. Or d'après 2), p_Y est étrangère à $p_X = \Sigma_n p_{X^n}$. Donc elle est étrangère à chaque p_{X^n} , Y est orthogonale à X^n pour tout n, et finalement Y est nulle.

3. Densité dans $L^\infty(\mu)$ pour le problème de Douglas.

3.1. Rappels

Si $(X,\underline{\underline{X}})$ est un espace mesurable, on note, en suivant Dunford et Schwartz [33] , $ba(X,\underline{\underline{X}})$ - ou simplement ba - l'espace des mesures additives bornées sur $\underline{\underline{X}}$: il est constitué des applications $\lambda : \underline{\underline{X}} \longrightarrow \mathbb{R}$, simplement additives sur $\underline{\underline{X}}$, pour lesquelles $\|\lambda\| = \sup_\tau \Sigma_{i\in I_\tau} |\lambda(A_i)| < \infty$, τ parcourant l'ensemble des partitions finies $\underline{\underline{X}}$-mesurables $\tau = (A_i)_{i\in I_\tau}$ de X .

Toute fonction f, $\underline{\underline{X}}$-mesurable bornée (on note : $f\in b(\underline{\underline{X}})$) étant limite uniforme de fonctions étagées, on définit $\lambda(f)$ pour $\lambda\in ba$ et $f\in b(\underline{\underline{X}})$ par linéarité et continuité, après avoir posé $\lambda(1_A)=\lambda(A)$ pour $A\in\underline{\underline{X}}$. On a bien sûr $|\lambda(f)| \leq \|f\|_\infty |\lambda|$.

Si μ est une probabilité sur $(X,\underline{\underline{X}})$, l'espace

$$ba(\mu) = \{ \lambda\in ba \mid \forall A\in\underline{\underline{X}} ,(\mu(A)=0) \Rightarrow (\lambda(A)=0)\}$$

s'identifie comme suit au dual de $L^\infty(\mu)$ ([33], p.296): si $f\in L^\infty(\mu)$, on pose $\lambda(f)=\lambda(f')$ pour toute $f'\in b(\underline{\underline{X}})$ appartenant à la classe f. Alors l'application $(\lambda,f)\mapsto\lambda(f)$, bien définie sur $ba(\mu)\times L^\infty(\mu)$, est la forme bilinéaire qui met ces deux espaces en dualité.

Enfin on a ([33], pages 98-99) , avec des notations évidentes

$$ba = (ba)^+ - (ba)^+ \quad ; \quad ba(\mu) = (ba(\mu))^+ - (ba(\mu))^+ .$$

3.2 Revenons maintenant au problème de Douglas (voir le paragraphe 1).

Soit F un ensemble de fonctions $\underline{\underline{X}}$-mesurables bornées (nous laissons au lecteur le cas où F est un ensemble de classes pour l'égalité μ-p.s.). Nous posons comme au paragraphe 1

$$\underline{\underline{M}}_\mu = \{ \nu \text{ probabilités sur } (X,\underline{\underline{X}}) \mid \forall f\in F \int f d\nu = \int f d\mu \}$$

Alors, il est immédiat que μ est extrémale dans $\underline{\underline{M}}_{\mu}$ si, et seulement si, elle l'est dans

$$\hat{\underline{\underline{M}}}_{\mu} = \{ \lambda \epsilon ba^{+} \mid \forall f \epsilon F , \lambda(f)=\mu(f) \}$$

La proposition suivante est l'analogue de la proposition 1.4 :

<u>Proposition</u>. <u>Avec les notations ci-dessus</u>, <u>les deux assertions suivantes sont équivalentes</u>

1) F <u>est dense dans</u> $L^{\infty}(\mu)$.

2) <u>Toute mesure additive</u> $\lambda \epsilon (ba)^{+}(\mu)$ <u>est extrémale dans</u>

$$\hat{\underline{\underline{M}}}_{\lambda} = \{ \nu \epsilon ba^{+} \mid \forall f \epsilon F , \nu(f)=\lambda(f) \} .$$

<u>Démonstration</u> . 1)=>2) . Soit $\lambda \epsilon ba^{+}(\mu)$, de la forme $\lambda=\alpha\lambda^{1}+(1-\alpha)\lambda^{2}$, avec $\lambda^{1},\lambda^{2} \epsilon \hat{\underline{\underline{M}}}_{\lambda}$, $\alpha \epsilon]0,1[$. Noter que λ^{1} est majorée par λ/α, donc appartient à $ba^{+}(\mu)$, et alors, d'après 1), λ et λ^{1} induisent la même forme linéaire sur $L^{\infty}(\mu)$. En particulier, $\lambda(A)=\lambda^{1}(A)$ pour tout $A \epsilon \underline{\underline{X}}$, donc $\lambda=\lambda^{1}=\lambda^{2}$, et λ est point extrémal de $\hat{\underline{\underline{M}}}_{\lambda}$.

2)=>1). Comme $(L^{\infty}(\mu))'=ba(\mu)$, il suffit de montrer que la seule $\lambda \epsilon ba(\mu)$ telle que : $\forall f \epsilon F$, $\lambda(f)=0$, est la mesure nulle. Soit λ une telle mesure additive, et soit $\lambda=\lambda^{+}-\lambda^{-}$ la décomposition de Jordan de λ ([33], pages 98-99). On a alors $|\lambda|=\lambda^{+}+\lambda^{-} \epsilon (ba)^{+}(\mu)$ et

$$|\lambda| = \frac{2\lambda^{+}+2\lambda^{-}}{2} \quad ; \; 2\lambda^{+},\ 2\lambda^{-} \epsilon \hat{\underline{\underline{M}}}_{|\lambda|}$$

D'après l'hypothèse, on a donc : $2\lambda^{+}=2\lambda^{-}=|\lambda|$, donc $\lambda=\lambda^{+}-\lambda^{-}=0$.

BIBLIOGRAPHIE

Sur la représentation des martingales comme intégrales stochastiques

a) Processus de Markov

[1] H. Kunita, S. Watanabe : On square integrable martingales. Nagoya Math. Journal, Vol. 30, 1967, pp. 209-245.

[2] M. Motoo, S. Watanabe : On a class of additive functionals of Markov processes. J. Math. Kyoto. Univ. 4, 1965, pp. 429-469.

[3] S. Watanabe : On discontinuous additive functionals and Lévy measures of a Markov process. Japanese J. Math. 36, 1964, pp. 53-70.

b) Processus à accroissements indépendants.

Les articles sur ce sujet sont innombrables, et nous ne donnons qu'une liste restreinte. De nombreuses références figurent dans la bibliographie de [5].

[4] C. Dellacherie : Intégrales stochastiques par rapport aux processus de Wiener et de Poisson. Séminaire de probabilités VIII. Lect. Notes in Math. 381, Springer-Verlag 1974.

[5] L. Galtchouk : Représentation des martingales engendrées par un processus à accroissements indépendants (cas des martingales de carré intégrable). Ann. I.H.P. vol. XII, 1976, pp. 199-211.

[6] K. Ito : Multiple Wiener integral. J. Math. Soc. Japan, vol.2, 1951, pp. 157-169.

[7] K. Ito : Spectral type of the shift transformation of differential processes with stationary increments. T.A.M.S. 1956, pp. 253-263.

(ces deux articles contiennent en particulier la décomposition en chaos de Wiener (intégrales stochastiques multiples), qui entraîne les théorèmes de représentation des martingales comme intégrales stochastiques usuelles).

c) Processus ponctuels

[8] R. Boel, P. Varaiya, E. Wong : Martingales on jump processes. Part I, representation results. Part II, applications. SIAM J. Control 13, 5, pp. 999-1061.

[9] C.S. Chou, P.A. Meyer : sur la représentation des martingales comme intégrales stochastiques dans les processus ponctuels. Séminaire de Probabilités IX , Springer-Verlag 1974.

[10] M.H.A. Davis : The representation of martingales of jump processes SIAM J. of control, 14 , 1976.

[11] J. Jacod : Multivariate point processes : predictable projection, Radon-Nikodym derivatives, representation of martingales. Z.W. 31, 1975, pp. 235-253.

De façon générale, on peut consulter sur ce sujet, la revue

[12] P. Brémaud, J. Jacod : Processus ponctuels et martingales. A paraître dans : Adv. in Appl. Prob., 1977.

d) <u>En relation avec les problèmes de martingales</u>.

[13] J. Jacod : A general theorem of representation for martingales. A.M.S. Meeting (à paraître en 1977).

[14] J. Jacod, M. Yor : Etude des solutions extrémales et représentation intégrale des solutions pour certains problèmes de martingales. Z.W. 38, 1977, pp. 83-125.

[15] M. Yor : Représentation intégrale des martingales, étude des distributions extrémales. Thèse, Université P. et M. Curie, Paris 1976.

[16] M. Yor : Remarques sur la représentation des martingales comme intégrales stochastiques. Séminaire de Probabilités XI. Lecture Notes in M. n°581, Springer-Verlag 1977.

e) <u>Sur le théorème de Douglas et les questions connexes</u>.

[17] E.M. Alfsen : Compact convex sets and boundary integrals. Ergebn. der M. 57, Springer-Verlag, 1971.

[18] M. Capon : Densité des fonctions affines continues sur un convexe compact dans un espace L^p... Sém. Choquet (Init.An.) 1970-71.

[19] G. Choquet : Le problème des moments. Séminaire Choquet (Initiation à l'analyse), Université de Paris, 1e année, 1961-62.

[20] R.G. Douglas : On extremal measures and subspace density. Michigan Math. J. 11, 1964, pp. 644-652.

[21] G. Mokobodzki : sur des mesures qui définissent des graphes d'applications. Séminaire Brelot-Choquet-Deny , 6e année, 1962.

f) <u>Autres références</u> .

[22] H. Föllmer : On the representation of semi-martingales. Ann. Prob. 1, 1973, pp. 580-589.

[23] P.A. Meyer : Un cours sur les intégrales stochastiques. Séminaire de Probabilités X. Lecture Notes in M. 511, 1976.

[24] P.A. Meyer : Démonstration probabiliste de certaines inégalités de Littlewood-Paley , exposé II (l'opérateur carré du champ). Séminaire de Probabilités X, Lecture Notes in M. 511, Springer 1976.

[25] P.A. Meyer : Notes sur les intégrales stochastiques : Intégrales Hilbertiennes. Séminaire de Probabilités XI. Lecture Notes in M. 581, Springer 1977.

[26] M. Yor : Une remarque sur les formes de Dirichlet et les semi-martingales. Séminaire de Théorie du Potentiel, n°2. Lecture Notes in M. 569, 1976.

[27] C. Dellacherie : Capacités et processus stochastiques. Ergebn. der Math. 67, Springer-Verlag 1972.

[28] J. Neveu : Notes sur l'intégrale stochastique. Cours de 3e Cycle 1972. Laboratoire de Probabilités, Université P. et M. Curie, Paris.

[29] C. Dellacherie et C. Stricker : Changements de temps et intégrales stochastiques. Séminaire de Probabilités XI, Lecture Notes in M. 581, Springer-Verlag 1977.

[30] J.P. Roth : Opérateurs dissipatifs et semi-groupes dans les espaces de fonctions continues. Ann. Inst. Fourier 26-4, 1976, pp. 1-97.

[31] A. Benveniste : Application de deux théorèmes de Mokobodzki à l'étude du noyau de Lévy d'un processus de Hunt sans hypothèse (L). Séminaire de Probabilités VII, Lecture Notes in M. 321, Springer-Verlag 1973 [voir aussi les commentaires sur le travail de Benveniste, dans le même volume, exposé suivant].

[32] K.A. Yen et Ch. Yoeurp : Représentation des martingales comme intégrales stochastiques de processus optionnels. Séminaire de Probabilités X, Lecture Notes in M. 511, Springer-Verlag 1976.

[33] N. Dunford et J. Schwartz : Linear Operators, Part I. Interscience Publ. New York 1958.

J. de Sam Lazaro
UER des Sciences et Techniques
Université de Rouen
76130 Mont Saint-Aignan

Marc Yor
Laboratoire de Probabilités
Université de Paris VI
2 Place Jussieu - Tour 46
75230 Paris Cedex 05