SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

JEAN JACOD

Projection prévisible et décomposition multiplicative d'une semi-martingale positive

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 12 (1978), p. 22-34
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1978__12__22_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1977/78

PROJECTION PREVISIBLE ET DECOMPOSITION MULTIPLICATIVE D'UNE SEMI-MARTINGALE POSITIVE

Jean JACOD

Soit X un processus défini sur un espace probabilisé filtré $(\Omega,\underline{\underline{F}},(\underline{\underline{F}}_t)_{t\geq 0},P)$ vérifiant les conditions habituelles. Nous nous intéressons à la propriété suivante:

$$(*)\begin{cases} X = LD\,, \text{ où } L \text{ est une martingale locale et } D \text{ un processsus continu} \\ \text{à droite, prévisible, à variation finie sur tout compact, avec } D_0 = 1. \end{cases}$$

Il s'agit d'un sujet sur lequel existent déjà de nombreuses publications (voir la liste de références, qui n'est pas exhaustive), aussi n'est-il pas question ici de faire preuve de beaucoup d'originalité: nous utilisons des méthodes éprouvées et nous restons dans le cadre usuel où X est un processus positif (ce qui signifie ici: non-négatif) et où on cherche des processus L et D eux-mêmes positifs.

Plus précisément on part d'une semi-martingale spéciale positive X (il est aisé de vérifier que tout processus vérifiant (*) est une semi-martingale spéciale; la définition est rappelée plus loin), et on note ${}^pX$ sa projection prévisible. On montre alors qu'il existe une décomposition et une seule du type (*), sur "le plus grand intervalle stochastique sur lequel le processus $1/{}^pX$ est localement borné". On rassemble ainsi les cas extrêmes pour lesquels la décomposition (*) est connue: 1) le cas où X est une surmartingale positive, 2) celui où X et X_- ne s'annulent jamais, auquel cas $1/{}^pX$ est localement borné.

Cet article est décomposé en deux parties: d'abord on étudie la projection prévisible d'une semi-martingale spéciale; cette partie contient l'essentiel des résultats nouveaux. Puis on étudie la décomposition (*) proprement dite.

Auparavant on introduit quelques notations et on fait quelques commentaires (bien classiques !). On note $\underline{\underline{M}}$ l'ensemble des martingales continues à droite, uniformément intégrables, et $\underline{\underline{M}}_{loc}$ l'ensemble des martingales locales (classe obtenue par "localisation" de la classe $\underline{\underline{M}}$ par les temps d'arrêt). On note $\underline{\underline{V}}$ l'ensemble des processus continus à droite, nuls à l'origine, à variation finie sur tout compact, adaptés. Comme d'habitude on convient d'identifier deux éléments de $\underline{\underline{M}}_{loc}$ ou de $\underline{\underline{V}}$ qui sont P-indistinguables. $\underline{\underline{P}}$ désigne la tribu prévisible.

Une semi-martingale est un processus X s'écrivant

(1) $$X = X_0 + M + A \ : \quad M \in \underline{\underline{M}}_{loc} \,, \quad M_0 = 0 \,, \quad A \in \underline{\underline{V}} \,.$$

Il peut exister plusieurs décompositions (1), mais il en existe au plus une pour laquelle A est prévisible; si tel est le cas on dit que X est une semi-martingale <u>spéciale</u>, et l'unique décomposition (1) pour laquelle $A \in \underline{\underline{P}}$ est appelée <u>décomposition canonique</u>. On note $\underline{\underline{S}}_p$ l'ensemble des semi-martingales spéciales.

Notre référence pour les martingales, semi-martingales, intégrales stochastiques, est le cours de Meyer [4]. Si X est une semi-martingale et H un processus prévisible localement borné, on note $H \bullet X$ le "processus intégrale stochastique" de H par rapport à X.

<u>Remarques</u>: 1) Supposons qu'on ait (*). D'après la formule d'intégration par parties de Yoeurp (voir [4,p.315]) on a

(2) $$X = X_0 + D \bullet L + L_- \bullet D \,.$$

Comme $D \bullet L \in \underline{\underline{M}}_{loc}$ et $L_- \bullet D \in \underline{\underline{P}} \cap \underline{\underline{V}}$ on en déduit que $X \in \underline{\underline{S}}_p$.

2) Supposons que $X \in \underline{\underline{S}}_p$ vérifie (*) et que le processus $1/{}^pX$ soit localement borné. La formule $Y = (1/{}^pX) \bullet X$ définit alors un élément de $\underline{\underline{S}}_p$ nul en 0, dont on note $Y = N + B$ la décomposition canonique. Comme $D \in \underline{\underline{P}}$ et ${}^pL = L_-$ puisque $L \in \underline{\underline{M}}_{loc}$, on a ${}^pX = L_- D$ tandis que (2) entraine

$$Y = \frac{1}{L_- D} \bullet (D \bullet L + L_- \bullet D) = \frac{1}{L_-} \bullet L + \frac{1}{D} \bullet D \,.$$

L'unicité de la décomposition canonique de Y entraine $N = (1/L_-) \bullet L$ et comme $L_0 = X_0$ on a $L = X_0 + L_- \bullet N$. Cette équation, étudiée par C. Doléans-Dade [1], admet pour seule solution $L = X_0 \mathcal{E}(N)$, où $\mathcal{E}(N)$ désigne "l'exponentielle" de N.

Cette formule $L = X_0 \mathcal{E}(N)$ est très importante:

a) comme N est obtenu directement à partir de $(1/{}^pX)\bullet X$, elle montre en quoi ${}^pX$ joue un rôle essentiel dans l'obtention de (*);

b) elle permet de montrer l'unicité dans (*);

c) elle donne le schéma de la démonstration de l'existence dans (*): on pose $L = X_0 \mathcal{E}(N)$, puis $D = X/L$, et il reste à montrer que D satisfait les propriétés requises...

3) Si L est un élément positif de $\underline{\underline{M}}_{loc}$ et si $R = \inf(t: L_t = 0)$ on sait que $L = 0$ sur l'intervalle stochastique $[\![R,\infty[\![$. Une telle propriété n'étant évidemment pas vraie pour n'importe quel élément positif de $\underline{\underline{S}}_p$, on ne saurait s'attendre en général à ce que la décomposition (*) soit valide partout, mais simplement sur les intervalles où X ne s'annule pas.

Conventions: 1) Nous omettrons systématiquement les termes "P-p.s." et "à un ensemble P-évanescent près".

2) $\frac{0}{0} = 1$; $\frac{a}{0} = +\infty$ si $a \in]0,\infty[$.

1 - ETUDE DE LA PROJECTION PREVISIBLE

§a - Enoncé des résultats. On part d'un élément positif X de $\underline{\underline{S}}_p$, de décomposition canonique $X = X_0 + M + A$. Comme $X \geq 0$ il est clair que ${}^pX \geq 0$. Comme ${}^pM = M_-$ et $A \in \underline{\underline{P}}$ on a aussi

$$ {}^pX = X_0 + M_- + A = X_- + \Delta A $$

(on note ΔZ le processus des sauts du processus cadlag Z).

Posons:

$$ R_n = \inf(t: X_t \leq 1/n), \qquad R = \lim_{(n)}\uparrow R_n $$

$$ R'_n = \inf(t: ({}^pX)_t \leq 1/n), \qquad R' = \lim_{(n)}\uparrow R'_n . $$

THEOREME 1 : (a) <u>On a</u> $R = R'$ (rappelons qu'on omet: P-p.s.).

(b) <u>Il existe une suite</u> (S_n) <u>de temps d'arrêt croissant vers</u> R, <u>telle que</u> $X \geq 1/n$ <u>sur</u> $[\![0,S_n[\![$, <u>que</u> $X_- \geq 1/n$ <u>sur</u> $]\!]0,S_n]\!]$ <u>et que</u> ${}^pX \geq 1/n$ <u>sur</u> $[\![0,S_n]\!] \cap [\![0_{\{X_0 \geq 1/n\}},\infty[\![$.

(comme d'habitude, si T est un temps d'arrêt et $B \in \underline{\underline{F}}_T$, on note T_B le temps d'arrêt égal à T sur B, à $+\infty$ sur B^c).

L'ensemble prévisible $C(X) = \bigcup_{(n)} [\![0,S_n]\!]$ est doué de propriétés agréables en ce qui concerne le processus $1/{}^pX$, propriétés que nous allons énoncer dans le cas simple où $X_0 > 0$ identiquement (sinon, comme $({}^pX)_0 = X_0$, ce processus $1/{}^pX$ commence mal en l'instant 0 pour être localement borné).

THEOREME 2 : <u>Supposons que</u> $X_0 > 0$ <u>identiquement. Si</u> T <u>est un temps d'arrêt, le processus arrêté</u> $(1/{}^pX)^T$ <u>est localement borné si et seulement si</u> $[\![0,T]\!] \subset C(X)$ ($C(X)$ est évidemment le plus petit ensemble prévisible jouissant de cette propriété).

Le processus X étant cadlag, on a nécessairement $\min(X_R, X_{R-}) = 0$ si $R < \infty$, si bien que l'ensemble $\{R = \infty\}$ est exactement l'ensemble sur lequel ni X, ni X_-, ne s'annulent jamais. Par suite on a le

COROLLAIRE 1 : <u>Pour que le processus</u> $1/{}^pX$ <u>soit localement borné, il faut et il suffit que</u> X <u>et</u> X_- <u>ne s'annulent jamais</u>.

<u>Remarques</u>: 1) Le théorème 2 suggère que, plus que la suite (S_n), c'est l'ensemble aléatoire $C(X)$ qui joue un rôle important. Nous retrouverons ce fait lors de l'étude de la décomposition multiplicative.

2) Si $X \in \underline{\underline{M}}_{loc}$ on a ${}^pX = X_-$, $R'_n = R_n$ et $R = \inf(t: X_t = 0)$; ces deux théorèmes sont alors bien connus, et $C(X) = \{X_- > 0\}$.

Les comportements des processus prévisibles ${}^pX$ et X_- sont analogues sur l'ensemble $C(X)$. Ils peuvent différer en son extrémité R, comme le montre le corollaire suivant. On pose d'abord $B = \{R \in C(X)\} = \bigcup_{(n)} \{S_n = R < \infty\}$ et $B' = \{R < \infty, R \notin C(X)\} = \bigcap_{(n)} \{S_n < R < \infty\}$, donc $B \cap B' = \emptyset$ et $B \cup B' = \{R < \infty\}$.

COROLLAIRE 2 : (a) <u>Sur</u> B <u>on a</u> $X_{R-} > 0$, $({}^pX)_R > 0$ <u>et</u> $X_R = 0$. <u>On a</u> $C(X) \cap \{X=0\} = [\![R_B]\!]$.

(b) $R_{B'}$ <u>est un temps d'arrêt prévisible. Sur</u> $B' \cap \{X_{R-} > 0\}$ <u>on a</u> $X_R = ({}^pX)_R = 0$.

<u>Démonstration</u>: (a) Les inégalités $X_{R-} > 0$ et $({}^pX)_R > 0$ sur B découlent immédiatement du théorème 1, et comme $\min(X_R, X_{R-}) = 0$ si $R < \infty$ on a $X_R = 0$ sur B . Enfin $X > 0$ sur $[\![0,R [\![$, d'où la dernière assertion.

(b) Il est aisé de vérifier que $R_{B'}$ est annoncé par la suite de temps d'arrêt $(S_n)_{\{S_n < R\}}$, donc est prévisible. Sur $B'' = B' \cap \{X_{R-} > 0\}$ on a $X_R = 0$, tandis que $B'' \in \underline{\underline{F}}_{(R_{B'})-}$, donc $T = R_{B''}$ est également prévisible. Il vient alors

$$E(1_{B''}({}^pX)_R) = E(1_{\{T<\infty\}}({}^pX)_T) = E(1_{\{T<\infty\}}X_T) = E(1_{B''}X_R) = 0 . \blacksquare$$

<u>Commentaires</u>: 1) Si X est une surmartingale positive (donc un élément de $\underline{\underline{S}}_p$) le processus A est décroissant, donc ${}^pX \leq X_-$. On en déduit que $B = \{R<\infty, ({}^pX)_R > 0\}$ et $B' = \{R<\infty, ({}^pX)_R = 0\}$, tandis qu'on sait par ailleurs que $X = 0$ sur $[\![R,\infty [\![$ et ${}^pX = X_- = 0$ sur $]\!] R,\infty [\![$.

2) Sur B' on peut effectivement avoir $({}^pX)_R = 0 < X_{R-}$, ou $X_{R-} = 0 < ({}^pX)_R$, comme le montrent les deux exemples suivants.

Soit d'abord $X_t = 2$ si $t < 2$ et $X_t = 0$ si $t \geq 2$: on a ${}^pX = X$, $R = 2$, $B' = \Omega$, et $({}^pX)_R = 0 < X_{R-} = 2$; par ailleurs on a $C(X) = [\![0,2 [\![$ et l'inclusion $C(X) \subset \bigcup_{(n)} [\![0,R_n]\!]$, qui est toujours vraie, est stricte dans ce cas.

Soit maintenant $X_t = 2 - t$ si $t < 2$ et $X_t = 2$ si $t \geq 2$: on a encore ${}^pX = X$, $R = 2$, $B' = \Omega$, et $X_{R-} = 0 < ({}^pX)_R = 2$; par ailleurs $C(X) = [\![0,2 [\![$ et l'inclusion $C(X) \subset \bigcup_{(n)} [\![0,R'_n]\!]$, qui est toujours vraie, est stricte dans ce cas.

§b - <u>Démonstration des théorèmes 1 et 2</u>. Nous allons commencer par trois lemmes.

LEMME 1 : <u>Il existe une suite</u> (S_n) <u>de temps d'arrêt croissant vers</u> R' , <u>telle que</u> ${}^pX \geq 1/n$ <u>sur</u> $[\![0,S_n]\!] \cap [\![0_{\{X_0 \geq 1/n\}},\infty [\![$ <u>et que</u> $C(X) = \bigcup_{(n)} [\![0,S_n]\!]$

soit égal à $(\bigcup_{(n)}[\![0,R'_n]\!])\bigcap[\![0,R'_{\{({}^pX)_{R'}=0\}}[\![$.

Démonstration: L'ensemble prévisible $]\!]0,R'_n]\!]\bigcap\{{}^pX<1/n\}$ contient évidemment le graphe de son début V_n, qui est donc un temps d'arrêt prévisible, et qui vérifie clairement $V_n>0$, $V_n \geq R'_n$ et $V_n = R'_n$ si $V_n<\infty$. Il existe donc un temps d'arrêt T_n tel que $T_n<V_n$ et que $P(T_n<\min(n,V_n-1/n))\leq 1/2^n$, si bien que $\sup_{(n)} T_n = \sup_{(n)} V_n \geq R'$ (on rappelle encore une fois qu'on omet: P-p.s.). La formule $S_n = \sup_{p\leq n}\min(T_p,R'_p)$ définit alors une suite de temps d'arrêt croissant vers R'.

Etant données les définitions de V_n et T_n, on voit que ${}^pX\geq 1/n$ sur $]\!]0,R'_n]\!]\bigcap]\!]0,T_n]\!]$ pour tout n, et on en déduit que ${}^pX\geq 1/n$ sur $]\!]0,S_n]\!]$, donc sur $[\![0,S_n]\!]\bigcap[\![0_{\{X_0\geq 1/n\}},\infty[\![$ puisque $({}^pX)_0 = X_0$.

Comme $S_n\leq R'_n$ on a $C(X)\subset\bigcup_{(n)}[\![0,R'_n]\!]$. Supposons que pour n assez grand on ait $R'_n = R'$ (pour un ω donné); si $({}^pX)_{R'}=0$ il est clair qu'on doit avoir $S_m<R'$ pour tout m d'après les propriétés de S_m; par contre si $({}^pX)_{R'}>0$, on a $V_m=\infty$ pour m assez grand, donc également $T_q>R'$ et $S_q = R'_q = R'$ pour q assez grand: on en déduit que $C(X)$ a la forme donnée dans l'énoncé. ■

LEMME 2 : On a $R\leq R'$.

Démonstration: Fixons n. Comme $X_-\geq 1/n$ sur $]\!]0,R_n]\!]$ et comme ${}^pX = X_- + \Delta A$, on doit avoir $\Delta A\leq -1/n$ sur l'ensemble prévisible $D =]\!]0,R_n]\!]\bigcap\{{}^pX=0\}$, qui est donc à coupes discrètes. Par suite D contient le graphe de son début T, qui est ainsi un temps d'arrêt prévisible. Mais $X\geq 1/n$ sur $[\![0,R_n[\![$, donc

$$\frac{1}{n}\,P(T<R_n) \leq E(1_{\{T<\infty\}}X_T) = E(1_{\{T<\infty\}}({}^pX)_T) = 0$$

et $P(T<R_n)=0$. Autrement dit ${}^pX>0$ sur $]\!]0,R_n[\![$. Désignons par T_m le $m^{\text{ième}}$ instant où $\Delta A\leq -1/2n$: on a d'une part ${}^pX = X_- + \Delta A\geq 1/2n$ en dehors de $\bigcup_{(m)}[\![T_m]\!]$, et d'autre part $\lim_{(m)}\uparrow T_m=\infty$ tandis que ${}^pX>0$ sur $]\!]0,R_n[\![$: on déduit immédiatement de ces assertions que $R'\geq R_n$ dès que $({}^pX)_0 = X_0>0$; comme $R'=R=0$ si $X_0=0$ on a alors $R'\geq R_n$ pour tout n, donc $R'\geq R$. ■

LEMME 3 : <u>On a</u> $X_- \geq 1/n$ <u>sur</u> $]\!]0,S_n]\!]$.

<u>Démonstration</u>: Fixons $b \in]0,1/n[$ et $c<\infty$. On considère l'ensemble prévisible $D =]\!]0,\min(S_n,c)]\!] \cap \{X_- \leq b\}$. Soit T un temps d'arrêt prévisible annoncé par une suite (T_m), et de graphe contenu dans D. Posons enfin $D_m =]\!]T_m,T[\![\cap]\!]0,\min(S_n,c)]\!]$, $B_m = \{T_m < \min(S_n,c)\}$ et $a_m = E[\min(1,\sup_{T_m \leq t<T} X_t)1_{\{T<\infty\}}]$.

D'une part $\lim_{(m)}\downarrow \sup_{T_m \leq t<T} X_t = X_{T-} \leq b$ sur l'ensemble $\{T<\infty\}$, donc d'après le théorème de Lebesgue, $\lim_{(m)}\downarrow a_m \leq b\,P(T<\infty)$. D'autre part B_m est la projection sur Ω de l'ensemble prévisible D_m, tandis que les ensembles B_m décroissent vers l'ensemble $\{T<\infty\}$. D'après le théorème de section prévisible appliqué à D_m, il existe un temps d'arrêt prévisible V_m tel que $[\![V_m]\!] \subset D_m$ et $P(B_m)-1/m \leq P(V_m<\infty) \leq P(B_m)$. Comme $D_m \subset D$ on a $({}^pX)_{V_m} \geq 1/n$ si $V_m<\infty$, donc

$$\frac{1}{n}P(V_m<\infty) \leq E[\min(({}^pX)_{V_m},1)1_{\{V_m<\infty\}}] = E[{}^p(\min(X,1))_{V_m}1_{\{V_m<\infty\}}]$$
$$= E[\min(1,X_{V_m})1_{\{V_m<\infty\}}] \leq a_m + P(T=\infty,B_m).$$

En passant à la limite en m dans l'expression précédente, et en utilisant les diverses remarques faites plus haut sur a_m, V_m et B_m, on voit que $\frac{1}{n}P(T<\infty) \leq b\,P(T<\infty)$, ce qui n'est possible que si $P(T<\infty)=0$. D'après le théorème de section prévisible on en déduit que D est P-évanescent, donc $X_- > b$ sur $]\!]0,\min(S_n,c)]\!]$; ceci étant vrai pour tous $b \in]0,1/n[$ et $c<\infty$, on a bien le résultat cherché. ∎

<u>Démonstration du théorème 1</u>: Il suffit de recoller ces trois lemmes (en effet le lemme 3 entraine $X \geq 1/n$ sur $[\![0,S_n[\![$, donc $R_{n+1} \geq S_n$). ∎

<u>Démonstration du théorème 2</u>: Soit T un temps d'arrêt et $Y = (1/{}^pX)^T$. Supposons d'abord Y localement borné: d'après la définition même de R' on doit avoir $T \leq R'$, et $T<R'$ sur $\bigcap_{(n)}\{R'_n < R'<\infty\}$; de plus si $T=R'<\infty$ il faut que $({}^pX)_{R'}>0$: d'après la forme de $C(X)$ donnée au lemme 1, on doit donc avoir $[\![0,T]\!] \subset C(X)$.

Inversement supposons que $[\![0,T]\!] \subset C(X)$. Il est facile de vérifier que la suite $S'_n = (S_n)_{\{S_n<T\}}$ croit vers $+\infty$, et $Y^{S'_n} = Y^{S_n} \leq n$, donc Y est localement borné: cela achève de montrer que $C(X)$ jouit de la propriété annoncée. ∎

2 - ETUDE DE LA DECOMPOSITION MULTIPLICATIVE

§ a - Enoncé des résultats. On part, comme dans la partie 1, d'un élément positif X de $\underline{\underline{S}}_p$, de décomposition canonique $X = X_0 + M + A$. On utilisera les notations S_n, R, $C(X)$ introduite plus haut. Pour éviter des répétitions fastidieuses on notera $\underline{\underline{V}}'$ l'ensemble des processus D tels que $D_0 = 1$ et que $D - 1 \in \underline{\underline{V}}$.

Commençons par énoncer le théorème fondamental, dont nous déduirons ensuite un certain nombre de corollaires couvrant les situations classiques.

THEOREME 3 : Il existe un couple (L,D) de processus tel que

(3) $\quad X = LD$ sur $C(X)$, $\quad L^{S_n} \in \underline{\underline{M}}_{loc}$ et $D^{S_n} \in \underline{\underline{P}} \cap \underline{\underline{V}}'$ pour tout n.

Tout autre couple (L',D') vérifiant (3) satisfait à $L' = L$ et $D' = D$ sur l'ensemble $C(X)$. Enfin on a $D > 0$ sur $C(X)$, $L > 0$ sur $C(X) \cap \{X > 0\}$ et $L = 0$ sur $C(X) \cap \{X = 0\} = [\![R_B]\!]$.

Remarque: On voit bien là encore l'importance de $C(X)$. On pourrait d'ailleurs supprimer toute référence à la suite (S_n) en remplaçant la condition:

$$L^{S_n} \in \underline{\underline{M}}_{loc} \quad \text{et} \quad D^{S_n} \in \underline{\underline{P}} \cap \underline{\underline{V}}' \quad \text{pour tout } n$$

par la condition équivalente:

$$L^T \in \underline{\underline{M}}_{loc} \quad \text{et} \quad D^T \in \underline{\underline{P}} \cap \underline{\underline{V}}' \quad \text{pour tout temps d'arrêt } T \text{ avec } [\![0,T]\!] \subset C(X).$$

En utilisant le corollaire 1, on arrive au résultat obtenu par Yoeurp et Yor [7]:

COROLLAIRE 3 : Supposons que X et X_- ne s'annulent jamais. Il existe un couple (L,D) et un seul tel que $L \in \underline{\underline{M}}_{loc}$, $D \in \underline{\underline{P}} \cap \underline{\underline{V}}'$ et $X = LD$.

Voici maintenant le cas le plus connu (Ito et Watanabe [2], Meyer [3]):

COROLLAIRE 4 : Soit X une surmartingale positive ne s'annulant jamais. Il existe un couple et un seul (L,D) tel que $L \in \underline{\underline{M}}_{loc}$, $D \in \underline{\underline{P}} \cap \underline{\underline{V}}'$, $X = LD$ et que D soit décroissant.

Démonstration: On sait que X_- ne s'annule jamais non plus, donc on est dans le cadre du corollaire 3 et il suffit de montrer que D est décroissant. Mais on a (*), donc (2), ce qui implique $L_- \bullet D = A$ d'après l'unicité de la décomposition canonique. De plus $L > 0$ partout, donc $L_- > 0$ partout également; comme A est décroissant, il en est donc de même de $D = (1/L_-) \bullet A$. ■

En appliquant le même raisonnement (si X est une sousmartingale, le processus A est croissant) on obtient (Meyer et Yoeurp [5]):

COROLLAIRE 5 : Soit X une sousmartingale positive, telle que X et X_- ne s'annulent jamais. Il existe un couple et un seul (L,D) tel que $L \in \underline{\underline{M}}_{loc}$, $D \in \underline{\underline{P}} \cap \underline{\underline{V}}'$, $X = LD$ et que D soit croissant.

Dans le théorème 3, les valeurs de L et D en dehors de $C(X)$ importent peu.

On peut évidemment choisir L et D de sorte que la relation $X = LD$ soit valide partout; mais il n'y a alors guère de chances pour que ces processus aient de "bonnes" propriétés, par exemple $L \in \underline{\underline{M}}_{loc}$ ou $D \in \underline{\underline{P}} \cap \underline{\underline{V}}'$.

Au contraire on peut essayer d'étendre L et D en dehors de $C(X)$ de façon à ce que ces processus gardent de bonnes propriétés, mais alors l'égalité $X = LD$ ne sera valide en général que sur $C(X)$. Par exemple posons

$$
\begin{aligned}
S'_n &= (S_n)_{\{S_n < R\}} \\
C'(X) &= \bigcup_{(n)} [\![0, S'_n]\!] = C(X) \cup]\!] R_B, \infty [\![.
\end{aligned}
$$

On a alors, ce qui semble être le maximum que l'on puisse faire sans hypothèses particulières sur X :

COROLLAIRE 6 : Il existe un couple (L,D) de processus tel que

(4) $X = LD$ sur $C(X)$, $L^{S'_n} \in \underline{\underline{M}}_{loc}$ et $D^{S'_n} \in \underline{\underline{P}} \cap \underline{\underline{V}}'$ pour tout n.

Si (L',D') est un autre couple vérifiant (4) et $L' \geqslant 0$, on a $L = L'$ sur $C'(X)$ et $D = D'$ sur $C(X)$.

Démonstration: Soit (L'',D'') un couple vérifiant (3). On pose $L = L''$ et $D = D''$ sur $C(X)$; $L = D = 0$ sur $C'(X)^c$; $L = L''_R = 0$ et $D = D''_R$ sur

$C'(X) \setminus C(X)$. On a $L^{S'_n} = L''^{S_n}$ et $D^{S'_n} = D''^{S_n}$, donc (L,D) vérifie (4). Enfin l'unicité découle immédiatement du théorème 3. ∎

De même que dans la remarque suivant le théorème 3, on pourrait remplacer la seconde partie de la condition (4) par:

$L^T \in \underline{\underline{M}}_{loc}$ et $D^T \in \underline{\underline{P}} \cap \underline{\underline{V}}'$ pour tout temps d'arrêt T avec $[\![0,T]\!] \subset C'(X)$.

On a donc:

COROLLAIRE 7: <u>Supposons que</u> $C(X) = [\![0,R]\!]$ (ce qui équivaut à: $[\![R]\!] \subset C(X)$, ou à: $C'(X) = \Omega \times \mathbb{R}_+$). <u>Il existe un couple</u> (L,D) <u>tel que</u> $L \in \underline{\underline{M}}_{loc}$, $D \in \underline{\underline{P}} \cap \underline{\underline{V}}'$ <u>et</u> $X = LD$ <u>sur</u> $C(X)$.

Terminons enfin par un retour aux surmartingales positives, pouvant s'annuler. D'après le commentaire 1) suivant le corollaire 2, on a $C'(X) = [\![0,T[\![$ avec $T = \inf(t\colon t = R$ <u>et</u> $({}^pX)_t = 0)$, tandis que $X = 0$ sur $[\![R,\infty[\![$ pour toute surmartingale positive. En reprennant la démonstration des corollaires 6 et 4 (légèrement modifiée pour ce dernier), et en utilisant le fait qu'un processus décroissant positif D tel que $D_0 = 1$ appartient à $\underline{\underline{V}}'$, on obtient le résultat suivant (donné par Yoeurp dans [6]):

COROLLAIRE 8 : <u>Soit</u> X <u>une surmartingale positive. Il existe un couple</u> (L,D) <u>tel que</u> $L^{S'_n} \in \underline{\underline{M}}_{loc}$ <u>pour chaque</u> n, <u>que</u> $D \in \underline{\underline{P}} \cap \underline{\underline{V}}'$ <u>soit décroissant, et que</u> $X = LD$ <u>partout. Tout autre couple</u> (L',D') <u>vérifiant les mêmes conditions et</u> $L' \geq 0$, <u>satisfait à</u> $L = L'$ <u>sur</u> $C'(X)$ <u>et</u> $D = D'$ <u>sur</u> $C(X)$.

§<u>b - Démonstration du théorème 3</u>. Nous allons procéder en plusieurs étapes.

(i) Posons $X^n = X^{S_n}$. Comme $1/{}^pX \leq n$ sur $]\!]0,S_n]\!]$ et comme X^n est arrêté en S_n, l'intégrale stochastique $Y^n = (1/{}^pX) \cdot X^n$ existe et définit une semi-martingale spéciale dont on note $Y^n = N^n + B^n$ la décomposition canonique. On a aussi $N^n = (1/{}^pX) \cdot M^n$, si $M^n = M^{S_n}$. De plus ${}^p(\Delta Y^n) = \Delta B^n$, donc il vient

$$(5) \qquad \Delta N^n = \Delta Y^n - \Delta B^n = \frac{1}{{}^pX}(\Delta X^n - {}^p(\Delta X^n)) = \left(\frac{X}{{}^pX} - 1\right) 1_{]\!]0,S_n]\!]}$$

car ${}^{p}(X^{n}) = {}^{p}X 1_{[\![0,S_n]\!]} + X^{n} 1_{]\!]S_n,\infty[\![}$. Soit $T_n = (S_n)_{\{S_n<\infty, X_{S_n}=0\}}$: on déduit de (5) que $\Delta N^{n} > -1$ sur $]\!]0,T_n[\![$ et que $\Delta N^{n}_{T_n} = -1$ si $0<T_n<\infty$.

Comme $S_n = T_n = 0$ si $X_0 = 0$, il est bien connu que l'exponentielle $L^{n} = X_0 \mathcal{E}(N^{n})$ vérifie:

$$(6) \qquad \begin{cases} L^{n} > 0 \quad \text{sur } [\![0,T_n[\![, \quad L^{n} = 0 \quad \text{sur } [\![T_n,\infty[\![, \\ L^{n}_{(T_n)-} > 0 \quad \text{sur } \{0<T_n<\infty\}. \end{cases}$$

(ii) Soit $\tilde{D}^{n} = X^{n}/L^{n}$: avec la convention $\frac{0}{0} = 1$ ce processus est bien défini car on a $X^{n} = 0$ sur $[\![T_n,\infty[\![$. Nous allons montrer que $\tilde{D}^{n} \in \underline{\underline{V}}'$.

D'abord on a $\tilde{D}^{n}_0 = 1$. Ensuite on a $\tilde{D}^{n} = F(X^{n},L^{n})$ si $F(x,y) = x/y$ pour $y \neq 0$ et $F(x,0) = 1$. On peut appliquer la formule d'Ito à F de la manière suivante: soit $R_p = \inf(t: L^{n}_t \leq 1/p)$; on peut trouver une fonction F_p de classe C^2, coïncidant avec F sur $\{|y| \geq 1/p\}$; on applique la formule d'Ito à F_p, on remarque que $F(X^{n},L^{n}) = F_p(X^{n},L^{n})$ sur $[\![0,R_p[\![$, et en calculant ce qui se passe à l'instant R_p on voit immédiatement qu'on peut appliquer la formule d'Ito usuelle à $(\tilde{D}^{n})^{R_p} = F((X^{n})^{R_p},(L^{n})^{R_p})$; enfin d'après (6) on a $[\![0,T_n]\!] = \bigcup_{(p)} [\![0,R_p]\!]$, tandis que les processus D^{n}, X^{n} et L^{n} sont arrêtés en T_n : on voit donc qu'on peut appliquer la formule d'Ito à $\tilde{D}^{n} = F(X^{n},L^{n})$ comme si F était de classe C^2.

Convenons d'écrire $\tilde{D}^{n} \sim C$ si C est un processus tel que $\tilde{D}^{n} - C \in \underline{\underline{V}}'$. En ne conservant que les termes "martingales" dans la formule d'Ito on arrive alors à

$$\tilde{D}^{n} \sim \frac{1}{L^{n}_{-}} \bullet M^{n} - \frac{X_{-}}{(L^{n}_{-})^2} \bullet L^{n}$$

(les termes ci-dessus sont bien définis, car $(1/L^{n}_{-})^{T_n}$ est localement borné, tandis que M^{n} et L^{n} sont arrêtés en T_n). Mais ${}^{p}X = X_{-} + \Delta A$, $L^{n} = X_0 + L^{n}_{-} \bullet N^{n}$ et $N^{n} = (1/{}^{p}X) \bullet M^{n}$, de sorte que

$$\tilde{D}^{n} \sim [\frac{1}{L^{n}_{-}}(1 - \frac{X_{-}}{{}^{p}X}) 1_{]\!]0,S_n]\!]}] \bullet M^{n} = \frac{1}{L^{n}_{-}({}^{p}X)} \bullet (\Delta A \bullet M^{n}).$$

Or d'après la formule d'intégration par parties de Yoeurp, on a $\Delta A \bullet M^{n} = [A,M^{n}] \in \underline{\underline{V}}$. L'expression précédente appartient donc aussi à $\underline{\underline{V}}$ et on en déduit que $\tilde{D}^{n} \in \underline{\underline{V}}'$.

(iii) Par ailleurs $\Delta \tilde{D}^{n} = (X^{n} L^{n}_{-} - X^{n}_{-} L^{n})/L^{n}_{-} L^{n}$ sur $]\!]0,T_n[\![$. Un calcul simple, utilisant (5), montre que si $Z^{n} = ({}^{p}X - X)(1/L^{n}_{-}) 1_{[\![0,S_n]\!]}$ on a

$\Delta\tilde{D}^n = Z^n$ sur $]\!]0,S_n]\!]\cap]\!]0,T_n[\![$.

Posons alors $D^n = (\tilde{D}^n_- + Z^n)^{S_n}$, avec la convention $\tilde{D}^n_{0-} = 1$. On a $D^n_0 = 1$, $D^n = \tilde{D}^n$ sur $[\![0,S_n]\!]\cap[\![0,T_n[\![$, et il est clair que D^n est prévisible: on en déduit d'une part que $D^n \in \underline{\underline{P}}\cap\underline{\underline{V}}'$ (puisque $\tilde{D}^n \in \underline{\underline{V}}'$), d'autre part que $X^n = L^n D^n$ sur $[\![0,S_n]\!]\cap[\![0,T_n[\![$. Mais $T_n \geq S_n$ et si $T_n = S_n < \infty$ on a $X^n_{S_n} = L^n_{S_n} = 0$ d'après (6). Par suite la relation $X^n = L^n D^n$ est valide sur $[\![0,S_n]\!]$, donc partout puisque tous ces processus sont arrêtés en S_n.

(iv) Nous pouvons maintenant passer à la construction du couple (L,D). On remarque que $N^n = (N^{n+1})^{S_n}$, donc $L^n = (L^{n+1})^{S_n}$; de même $D^n = (D^{n+1})^{S_n}$ et $Z^n = Z^{n+1}$ sur $[\![0,S_n]\!]$, donc $D^n = D^{n+1}$ sur $[\![0,S_n]\!]$. On peut donc définir les processus L et D en posant $L = L^n$ et $D = D^n$ sur $[\![0,S_n]\!]$ et (par exemple) $L = D = 0$ sur le complémentaire de $C(X)$. Le couple (L,D) vérifie clairement (3).

On a $L^n > 0$ et $D^n > 0$ par construction sur $[\![0,T_n[\![$, donc $L > 0$ et $D > 0$ sur $C(X)\cap\{X>0\}$. Enfin si $R = S_n < \infty$ on a $X_R = 0$ d'après le corollaire 2, donc $T_n = R$, $L_R = L^n_{T_n} = 0$ et $({}^pX)_R > 0$, donc $D_R = D^n_{T_n} = ({}^pX)_R / L^n_{R-} > 0$: on en déduit que $L = 0$ et $D > 0$ sur l'ensemble $[\![R_B]\!]$.

(v) Il nous reste enfin à montrer l'unicité. Soit (L',D') un couple de processus vérifiant (3). En reprenant le raisonnement fait dans l'introduction on obtient ${}^p(X^n) = L'^{S_n}_- D'^{S_n}$ et

$$\begin{aligned} X^n &= X_0 + D'\cdot L'^{S_n} + L'_-\cdot D'^{S_n} \\ Y^n &= (1/L'_-)\cdot L'^{S_n} + (1/D')\cdot D'^{S_n} \end{aligned}$$

en utilisant la définition de Y^n, ce qui montre en outre que les intégrales stochastiques ci-dessus sont bien définies. D'après l'unicité de la décomposition canonique on doit avoir $N^n = (1/L'_-)\cdot L'^{S_n}$, donc $L'_-\cdot N^n = 1\cdot L'^{S_n} = L'^{S_n} - X_0$ (puisque $L'_0 = X_0$), donc $L'^{S_n} = X_0\mathcal{E}(N^n) = L^n$. On en déduit que $L = L'$ sur $C(X)$.

Comme $LD = L'D' = X$ on doit aussi avoir $D = D'$ sur $C(X)\cap\{X>0\}$. Par conséquent $C(X)\cap\{D \neq D'\}$ est le graphe d'un temps d'arrêt prévisible S, qui de plus vérifie $[\![S]\!]\subset[\![R_B]\!]$; donc $X_S = 0$ sur $\{S<\infty\}$ et $E(({}^pX)_S 1_{\{S<\infty\}}) = E(X_S 1_{\{S<\infty\}}) = 0$, donc $({}^pX)_S = 0$ sur $\{S<\infty\}$, ce qui contredit le fait que $({}^pX)_R > 0$ sur B (cf. corollaire 2), sauf si $P(S<\infty) = 0$. On achève ainsi de prouver que $D = D'$ sur $C(X)$. ∎

REFERENCES

1 DOLEANS-DADE C.: Quelques applications de la formule de changement de variables pour les semi-martingales. Z.W. 16, 1970

2 ITO K., WATANABE S.: Transformation of Markov processes by multiplicative functionals. Ann. Inst. Fourier, 15, 1965

3 MEYER P.A.: Multiplicative decompositions of positive supermartingales. Dans: Markoff processes and potential theory, J. Chover Ed., Wiley, 1967

4 MEYER P.A.: Un cours sur les intégrales stochastiques. Sém. Proba. X, Strasbourg. Lect. Notes Math. 1976

5 YOEURP C., MEYER P.A.: Sur la décomposition multiplicative des sousmartingales positives. Sém. Proba. X, Strasbourg. Lect. Notes Math. 1976

6 YOEURP C.: Décompositions des martingales locales et formules exponentielles. Sém. Proba. X, Strasbourg. Lect. Notes Math. 1976

7 YOEURP C., YOR M.: Espace orthogonal à une semi-martingale, applications. A paraitre, 1977