MAURIZIO PRATELLI

Une version probabiliste d'un théorème d'interpolation de G. Stampacchia

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 12 (1978), p. 1-19
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1978__12__1_0>

UNE VERSION PROBABILISTE D'UN THEOREME D'INTERPOLATION DE G.STAMPACCHIA.

(Par Maurizio PRATELLI).

Dans cet article nous nous proposons de démontrer une version probabiliste du théorème d'interpolation de G.Stampacchia (théor. 4.1 de [8];cf.aussi [1]). Cette version probabiliste constitue, comme nous le montrerons dans le paragraphe 3,une effective généralisation du théorème de Stampacchia.

Quand cet article avait déjà été rédigé,nous avons appris par P.A.Meyer qu'un résultat analogue avait été démontré(par des méthodes complètement différentes)par STROOCK. En effet le théor.1.2 de [9] est une forme légèrement plus faible de notre théorème 2.1. Il faut cependant signaler que les techniques employées par Stroock sont valables pour des martingales à temps discret et qu'elles ne semblent pas susceptibles d'être adaptées au cas continu.

O.NOTATIONS ET CONVENTIONS GENERALES.

Dans toute la suite,$(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t),P)$ désigne un espace probabilisé complet,muni d'une filtration satisfaisant aux "conditions habituelles" de [7] .

Pour tout nombre réel $p\geq 1$,on désigne par $M^p(\Omega,\mathcal{F},P)$,ou simplement par M^p,l'espace constitué par les variables aléatoires X pour lesquelles le nombre

$$(0.1) \qquad \|X\|_{M^p} = \sup_{r \in R_+} r \left(P\left\{ |X| > r \right\} \right)^{\frac{1}{p}}$$

est fini.(*)

Il est bien connu que l'on a $\|X+Y\|_{M^p} \leqslant 2(\|X\|_{M^p} + \|Y\|_{M^p})$ et $L^p \subset M^p \subset L^{p'}$ pour $1 \leqslant p' < p < +\infty$.

En outre on vérifie facilement que, pour toute variable aléatoire X appartenant à M^p $(1 < p < \infty)$ et pour tout ensemble mesurable A, on a

$$(0.2) \qquad \|X\, I_A\|_1 \leqslant q\, \|X\|_{M^p} \cdot \|I_A\|_q$$

où q désigne l'exposant conjugué de p.

En effet, en supposant $\|X\|_{M^p} \leqslant 1$, on trouve

$$E\left[|X|\, I_A\right] = \int_0^{+\infty} P\left\{ |X| > t, A \right\} dt \leqslant \int_0^{+\infty} (t^{-p} \wedge P(A))\, dt$$

$$= \int_0^{P(A)^{-\frac{1}{p}}} P(A)\, dt + \int_{P(A)^{-\frac{1}{p}}}^{+\infty} t^{-p}\, dt = q\, P(A)^{\frac{1}{q}},$$

ce qui démontre l'assertion.

On complète la définition des espaces M^p en posant $M^\infty = L^\infty$.

Toute martingale M considérée dans la suite sera supposée à

(*) Ici, et dans toute la suite, une variable aléatoire est considérée en réalité comme une classe d'équivalence de variables aléatoires p.s. égales. De même un processus est considéré comme une classe d'équivalence de processus indistinguables.

trajectoires p.s. continues à droite et pourv ues de limites à gauche(avec la convention $M_{0-}=0$):plus précisement,elle sera la projection optionnelle d'un processus (constant par rapport au temps) du type $(t,\omega)\longmapsto H(\omega)$,où H est une variable aléatoire intégrable. Cette variable aléatoire,qui coïncide avec la variable aléatoire terminale M_∞ de la martingale,sera parfois confondue avec la martingale elle-même. Ainsi on dira que H appartient à BMO au lieu de dire que M appartient à BMO,et on écrira $\|H\|_{BMO}$ au lieu de $\|M\|_{BMO}$.

On rappelle que BMO est l'espace constitué par les martingales M, de carré intégrable,qui satisfont à une condition du type

$$E\left[(M_\infty-M_{T-})^2 \mid \mathcal{F}_T\right] \leq k^2$$

(pour tout temps d'arrêt T),où k est une constante réelle positive indépendante de T. La plus petite des constantes possédant cette propriété est,par définition,la norme de M dans BMO. De façon équivalente,cette norme peut être aussi définie comme la borne supérieure des nombres de la forme

$$\sqrt{E\left[(M_\infty-M_{T-})^2\right] / P\{T<\infty\}}$$

où T parcourt l'ensemble de tous les temps d'arrêt tels que $P\{T<\infty\}\neq 0$. On a par conséquent,pour un tel temps d'arrêt T,

$$E\left[|M_\infty-M_{T-}|\right] / P\{T<\infty\} \leq \|M\|_{BMO},$$

et donc aussi

(0.3) $$E\left[|M_\infty - M_{T-}| \mid \mathcal{F}_T\right] \leqslant \|M\|_{BMO}$$

pour tout temps d'arrêt T.

1. INEGALITES PRELIMINAIRES.

Nous commencerons par un lemme purement analytique.

(1.1) LEMME Soit f une fonction décroissante, définie dans R_+, à valeurs dans $[0,1]$, et soient p,q deux éléments de $]1,+\infty[$ tels que $p^{-1}+q^{-1}=1$. Supposons qu'il existe une constante réelle positive k telle que l'on ait

(1.2) $$s\, f(r+s) \leqslant k\, f(r)^{\frac{1}{q}}$$

pour tout couple r,s d'éléments de R_+. On a alors

$$\sup_{t\in R_+} t^p f(t) \leqslant (e\, p\, k)^p$$

DEMONSTRATION. Pour tout $t \geqslant 0$ et pour tout λ tel que $0<\lambda<1$, en appliquant l'inégalité (1.2) au couple $r=\lambda t, s=(1-\lambda)t$, on trouve

$$(1-\lambda)t.f(t) \leqslant k.f(\lambda t)^{\frac{1}{q}}$$

d'où, en multipliant les deux membres par $(\lambda t)^{p-1}=(\lambda t)^{\frac{p}{q}}$,

$$(1-\lambda)\lambda^{p-1}\, t^p\, f(t) \leqslant k\, \left[(\lambda t)^p f(\lambda t)\right]^{\frac{1}{q}}.$$

Posons $g(t)=t^p\, f(t)$. L'inégalité précédente s'écrit alors

$$(1-\lambda)\lambda^{p-1}\, g(t) \leqslant k.g(\lambda t)^{\frac{1}{q}},$$

ou encore

$$g(t) \leqslant c_\lambda g(\lambda t)^{\frac{1}{q}}, \qquad \text{où} \qquad c_\lambda = k(1-\lambda)^{-1}\lambda^{1-p}.$$

En itérant, on obtient, pour tout entier $n \geq 1$,

$$g(t) \leq g(\lambda^n t)^{\frac{1}{q^n}} \cdot \prod_{j=0}^{n-1} c_\lambda^{\frac{1}{q^j}}.$$

Or, t étant fixé, on a, dès que n est assez grand, $g(\lambda^n t) \leq 1$ et donc

$$g(t) \leq \prod_{j=0}^{n-1} c_\lambda^{\frac{1}{q^j}},$$

$$(1.3) \qquad \log g(t) \leq \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{q^j} \log c_\lambda \leq (1-\frac{1}{q})^{-1} \log c_\lambda = \log c_\lambda^p.$$

On vérifie immédiatement que, lorsque λ varie dans $]0,1[$, c_λ atteint son minimum pour $\lambda=\lambda_\theta=\frac{1}{q}$. On a en outre

$$c_{\lambda_\theta} = k\ p\ q^{p-1} = k\ p\ (1+\frac{1}{p-1})^{p-1} \leq k\ p\ e.$$

L'inégalité (1.3) fournit donc, pour $\lambda=\lambda_\theta$, $g(t) \leq (kpe)^p$, ce qui démontre l'assertion.

Le lemme suivant peut être considéré comme une version probabiliste du Lemme 3 de [5] (qui en est un cas particulier).

(1.4) LEMME. Soit M une martingale, et supposons qu'il existe un nombre réel $p>1$ et une constante réelle positive k, tels que l'on ait

$$(1.5) \qquad \left\| E\left[|M_\infty - M_{T-}| \mid \mathcal{F}_T \right] \right\|_p \leq k$$

pour tout temps d'arrêt T. Dans ces conditions, la variable aléatoire $M^* = \sup_t |M_t|$ appartient à M^p, et l'on a

$$\|M^*\|_{M^p} \leq epk.$$

DEMONSTRATION. a) Démontrons d'abord que l'on a

$$(1.6) \qquad \left\| E\left[|M_S-M_{T-}|\,|\,\mathfrak{F}_T\right]\right\|_p \leq k$$

pour tout couple S,T de temps d'arrêt avec $T\leq S$.

Grâce à l'hypothèse (1.5), il suffit pour cela de démontrer la relation

$$E\left[|M_S-M_{T-}|\,|\,\mathfrak{F}_T\right] \leq E\left[|M_\infty-M_{T-}|\,|\,\mathfrak{F}_T\right] \quad \text{p.s.},$$

ou encore la relation non conditionnelle

$$E\left[|M_S-M_{T-}|\right] \leq E\left[|M_\infty-M_{T-}|\right].$$

Or cette dernière relation est évidente puisque le processus $X_t=M_{S+t}-M_{T-}$ est une martingale par rapport à la filtration $\mathfrak{G}_t=\mathfrak{F}_{S+t}$.

b) Etant donnés les nombres réels positifs r,s, considérons maintenant les temps d'arrêt T,S ainsi définis:

$$T=\inf\{t:|M_t|>r\}, \qquad S=\inf\{t:|M_t|>r+s\}.$$

On a alors $|M_{T-}|\leq r$, et par conséquent

$$\{M^*>r+s\}\subset\{|M_S|\geq r+s\}\subset\{|M_S-M_{T-}|\geq s\},$$

d'où

$$s\, I_{\{M^*>r+s\}} \leq |M_S-M_{T-}|\,.\,I_{\{M^*>r\}}.$$

Il en résulte, compte tenu du fait que l'ensemble $\{M^*>r\}=\{T<\infty\}$ appartient à $\mathfrak{F}_T$,

$$\begin{aligned} s.P\{M^*>r+s\} &\leq E\left[E\left[|M_S-M_{T-}|\,|\,\mathfrak{F}_T\right] I_{\{M^*>r\}}\right] \\ &\leq \left\|E\left[|M_S-M_{T-}|\,|\,\mathfrak{F}_T\right]\right\|_p \left\|I_{\{M^*>r\}}\right\|_q. \end{aligned}$$

La relation (1.6) entraîne donc

$$s.P\{M^*>r+s\} \leqslant k.P\{M^*>r\}^{\frac{1}{q}} ,$$

ce qui, grâce au lemme (1.1) (appliqué à la fonction $f(r)=P\{M^*>r\}$), démontre l'assertion.

(1.7) REMARQUE. Dans la partie b) de la démonstration, on n'a exploité que la relation (1.6). Le lemme reste donc valable pour un processus (M_t) quelconque (à trajectoires càdlàg) possédant la propriété (1.6).

(1.8) REMARQUE. Le lemme (1.4) permet notamment d'obtenir une démonstration très simple de l'inégalité de JOHN-NIRENBERG. Remarquons à cet effet que, si X est une variable aléatoire positive, on a, pour tout nombre réel positif λ,

$$E\left[e^{\lambda X}\right]= \int_{\Omega} dP(\omega) \int_{-\infty}^{X(\omega)} \lambda\, e^{\lambda t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, e^{\lambda t} \quad P\{X>t\}\, dt$$

$$\leqslant 1+ \lambda \sum_{n=0}^{\infty} e^{\lambda(n+1)}\, P\{X>n\}.$$

Soit maintenant M une martingale telle que

$$\sup_T \left[E\, |M_\infty-M_{T-}|\,|\, \mathfrak{F}_T\right] \leqslant k.$$

En appliquant le lemme (1.4), on trouve, pour tout $r\geqslant 0$ et pour tout $p>1$,

$$r^p.P\{M^*>r\} \leqslant (epk)^p.$$

En particulier, pour $r=p=n$,

$$P\{M^*>n\} \leq (ek)^n.$$

Or la série

$$\sum_{n=2}^{\infty} e^{\lambda(n+1)}(ek)^n = e^{\lambda} \sum_{n=2}^{\infty} (e^{\lambda+1}k)^n$$

converge pour $k<e^{-1}$ et λ assez petit. Si ces conditions sont remplies, on a donc l'inégalité de JOHN-NIRENBERG:

$$E\left[e^{\lambda M}\right] \leq c(\lambda,k)$$

(cf., pour plus de détails, [2], chap.III).

L'inégalité suivante peut être considérée comme l'analogue "faible" de l'inégalité classique de DOOB (cf. [6], p. 27).

(1.9) LEMME. Pour toute martingale M et pour tout nombre réel $p>1$, on a

$$\| M \|_{M^p} \leq q. \| M_\infty \|_{M^p} ,$$

où q désigne l'exposant conjugué de p.

DEMONSTRATION. Etant donné le nombre réel $r\geq 0$, considérons le temps d'arrêt $T=\inf\{t:|M_t|>r\}$, et désignons par A l'ensemble $\{M^*>r\}=\{T<\infty\}$. On a alors

$$r.P(A) \leq E\left[|M_T| I_A\right] \leq E\left[|M_\infty| I_A\right] \leq q\| M_\infty\|_{M^p} P(A)^{\frac{1}{q}} \qquad \text{(cf.(0.2))}$$

Il en résulte

$$r.P(A)^{\frac{1}{p}} \leq q \| M_\infty\|_{M^p} ,$$

ce qui démontre l'assertion.

2. LE THEOREME D'INTERPOLATION.

Considérons un opérateur U défini dans l'espace des variables aléatoires étagées sur $(\Omega,\mathcal{F},P)$, à valeurs dans l'espace $L^1(\Omega,\mathcal{F},P)$. On dit que U est <u>sous-linéaire</u> s'il vérifie la relation

$$|U(X+Y)| \leq |U(X)|+|U(Y)|$$

pour tout couple X,Y de variables aléatoires étagées.

On dit que U est de <u>type</u>(p,q)<u>faible</u> (p,q étant deux éléments de $[1,\infty]$) si, pour toute variable aléatoire étagée X appartenant à L^p, la transformée U(X) appartient à M^q et vérifie la relation

$$\|U(X)\|_{M^q} \leq k\|X\|_p$$

où k est une constante réelle positive indépendante de X. La plus petite des constantes possédant cette propriété est appelée la norme (p,q)faible de U.

Si l'on remplace, dans la définition précédente, M^q par L^q, on obtient la notion d'opérateur de type(p,q)<u>fort</u>.

Soient p_1,p_2,q_1,q_2 des éléments de $[1,+\infty]$ avec $p_i \leq q_i$ $(i=1,2)$, $q_1<q_2$. Etant donné t avec $0<t<1$, considérons le couple p,q déterminé par

$$\frac{1}{p} = \frac{t}{p_1} + \frac{1-t}{p_2} \qquad \frac{1}{q} = \frac{t}{q_1} + \frac{1-t}{q_2} .$$

Le théorème classique d'interpolation de MARCINKIEWICZ (cf. [10], pag.112) affirme que, si U est un opérateur sous-linéaire qui, pour chaque $i=1,2$, est de type(p_i,q_i)faible, avec une norme égale à k_i, alors U est de type (p,q)fort avec une norme k qui dépend seulement de t,k_i,p_i,q_i.

En utilisant ce résultat, ainsi que les inégalités du paragraphe précédent, on peut démontrer le théorème suivant:

(2.1)THEOREME.Soit U un opérateur linéaire défini dans l'espace des variables aléatoires étagées, à valeurs dans L^1. Supposons que l'on ait

(2.2) $$\|U(X)\|_{M^{q_1}} \leq k_1 \|X\|_{p_1}$$

(2.3) $$\|U(X)\|_{BMO} \leq k_2 \|X\|_{p_2}$$

où p_1,q_1,p_2 sont des éléments de $[1,+\infty]$ tels que $p_1 \leq q_1 < +\infty, q_1 > 1$, et où k_1,k_2 sont des constantes positives indépendantes de X.

Dans ces conditions, pour tout élément t de $]0,1[$, l'opérateur U est de type(p,q)fort, où les nombres p,q sont determinés par les relations

$$\frac{1}{p} = \frac{t}{p_1} + \frac{1-t}{p_2}, \qquad \frac{1}{q} = \frac{t}{q_1} .$$

En outre la norme(p,q)forte de U dépend seulement de t,p_i,q_i,k_i

DEMONSTRATION.Pour simplifier l'écriture on supposera $p_1=q_1$ et $p_2=+\infty$. Dans le cas général il suffira de faire des modifications purement formelles.

Soit T un temps d'arrêt.On désignera par $U_{T-}(X)$ (resp.U^{*}) l'opérateur qui,a toute variable aléatoire X étagée,associe la variable aléatoire M_{T-} (resp.M^{*}),où M désigne la martingale projection optionnelle du processus $(t,\omega)\mapsto U(X)(\omega)$.

On désignera en outre par $U^T(X)$ l'opérateur (sous-linéaire) ainsi défini:

$$U^T(X)=E\left[|U(X)-U_{T-}(X)|\,|\,\mathcal{F}_T\right] .$$

L'hypothèse (2.3) entraîne alors (cf.(0.3))

$$\|U^T(X)\|_{\infty}\leq\|U(X)\|_{BMO}\leq k_2\,\|X\|_{\infty}.$$

On a en outre

$$(2.4)\qquad |U^T(X)|\leq E\left[|U(X)|\,|\,\mathcal{F}_T\right]+|U_{T-}(X)|$$

$$\leq E\left[|U(X)|\,|\,\mathcal{F}_T\right]+U^{*}(X).$$

En appliquant le lemme (1.9),on trouve d'autre part

$$\|U^{*}(X)\|_{M^{p_1}}\leq p_1(p_1-1)\,\|U(X)\|_{M^{p_1}},$$

ainsi qu'une inégalité analogue concernant $E\left[|U(X)|\,|\,\mathcal{F}_T\right]$.

Il en résulte

$$\|U^T(X)\|_{M^{p_1}}\leq 4p_1(p_1-1)^{-1}\,\|U(X)\|_{M^{p_1}}\leq 4k_1p_1(p_1-1)^{-1}\,\|X\|_{p_1}.$$

Soit maintenant p tel que $p_1<p<\infty$. Puisque l'opérateur U^T est à la fois de type (p_1,p_1)faible et de type (∞,∞)faible,le théorème de Marcinkiewicz entraîne qu'il est de type (2p,2p)-

fort:

$$\| U^T(X) \|_{2p} \leq k \| X \|_{2p},$$

où la constante k ne dépend pas de T.

D'après le lemme (1,4),on a donc

$$\| U(X) \|_{M^{2p}} \leq 2epk \| X \|_{2p},$$

de sorte que U est de type (2p,2p)faible. Une nouvelle application du théorème de Marcinkiewicz fournit alors

$$\| U(X) \|_p \leq k' \| X \|_p.$$

(2.5)REMARQUE.La démonstration précédente ne s'étend pas aux opérateurs sous-linéaires.En effet,si U est un opérateur sous-linéaire,il en est de même de U_{T-}:mais la différence $U-U_{T-}$ n'est pas forcément sous-linéaire.

On remarquera que,dans l'énoncé précédent,l'exposant q_1 est assujetti à la condition $q_1>1$. Pour $q_1=1$,on a un résultat un peu plus faible:

(2,6)THEOREME.Soit U un opérateur linéaire défini dans l'espace des variables aléatoires étagées,à valeurs dans L^1.On suppose que l'on a

$$\| U(X) \|_1 \leq k_1 \| X \|_1,$$
$$\| U(X) \|_{BMO} \leq k_2 \| X \|_{p_2},$$

avec $1<p_2\leqslant\infty$. Dans ces conditions,pour tout élément t de $]0,1[$, l'opérateur U est de type (p,q)fort,où $\frac{1}{p}=t+\frac{1-t}{p_2}$, $\frac{1}{q}=t$.

DEMONSTRATION.La démonstration est tout à fait analogue à celle du théorème (2.1). Seule la vérification du fait que U^T est de type (1,1)faible exige un argument légèrement différent.

On a encore

$$|U^T(X)|\leqslant E\left[\,|U(X)|\,|\,\mathfrak{F}_T\right]+U^*(X).$$

Or le premier terme appartient évidemment à L^1.

Pour le deuxième terme,on a,d'après l'inégalité de DOOB (cf. [6],pag.25)

$$\|U^*(X)\|_{M^1}\leqslant\|U(X)\|_1\leqslant k_1\|X\|_1.$$

La conclusion en résulte immédiatement.

3.LE CAS DES MARTINGALES DYADIQUES.

Dans l'espace R^d considérons un cube Q,par exemple unitaire:

$$Q=\{x:0\leqslant x_i\leqslant 1,\ i=1,..,d\}.$$

Soit f une fonction intégrable sur Q,et posons

$$f_{Q_0}=\frac{1}{\mathrm{mes}(Q_0)}\int_{Q_0}f(x)\,dx$$

pour tout cube Q_0 contenu dans Q.

On dit que la fonction f est <u>à oscillation moyenne bornée</u> au sens de l'Analyse (cf. [5]) si l'on a

$$(3.1) \qquad \sup_{Q_\theta} \frac{1}{\mathrm{mes}(Q_\theta)} \int_{Q_\theta} |f(x)-f_{Q_\theta}|dx < +\infty$$

Les fonctions f possédant cette propriété forment un espace vectoriel que l'on désigne par $\mathcal{BMO}$, et que l'on munit de la norme ainsi définie

$$(3.2) \qquad \| f \|_{\mathcal{BMO}} = \sup_{Q_\theta} \frac{1}{\mathrm{mes}(Q_\theta)} \int_{Q_\theta} |f(x)-f_{Q_\theta}|dx + \| f \|_{L^1(Q)} .$$

Particularisons maintenant les hypothèses du paragraphe 0. Prenons $\Omega=Q$ et désignons par P la mesure de Lebesgue sur Q; pour tout entier $n\geqslant 0$, désignons par $\mathcal{F}^\circ_n$ la tribu engendrée sur Q par les cubes dyadiques de la forme

$$(3.3) \qquad Q_\theta = \{ x: k_i \leqslant 2^n x_i < k_i+1, \ i=1,..,d \},$$

où les k_i sont des entiers tels que $0\leqslant k_i<2^n$. Désignons en outre par $\mathcal{F}_n$ la tribu engendrée par $\mathcal{F}^\circ_n$ et les parties négligeables de Q, et posons

$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_n$ pour $n\leqslant t<n+1$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\infty = \bigvee_t \mathcal{F}_t$.

Il est bien connu que, dans le cas particulier envisagé, une martingale M appartient à BMO s'il existe une constante réelle k telle que l'on ait

$$(3.4) \qquad E\left[|M_\infty - M_n| \,|\, \mathcal{F}_n\right] \leqslant k$$

pour tout n. En outre la norme de M dans BMO est équivalente à la somme de la norme de M dans L^1 et de la borne inférieure des constantes k qui vérifient la relation (3.4).

Par conséquent une fonction f intégrable sur Q appartient à BMO si elle vérifie la condition (3.1), où la borne supérieure est prise lorsque Q_θ parcourt l'ensemble des cubes contenus dans Q de la forme particulière (3.3).

L'espace $\mathcal{BMO}$ est donc contenu dans l'espace BMO. On vérifie d'autre part que l'inclusion est stricte: en effet, pour d=1, et $Q=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ on peut démontrer (cf. [3] ,pag.205) que la fonction f définie par

$$f(t)=\begin{cases} \log t & \text{pour } t>0 \\ 0 & \text{pour } t=0 \\ -\log(-t) & \text{pour } t<0 \end{cases}$$

appartient à BMO mais qu'elle n'appartient pas à $\mathcal{BMO}$.

Notre théorème (2.1) contient donc comme cas particulier le théorème de G.Stampacchia ([1]), dont il constitue une généralisation effective.

4.APPLICATIONS

Revenons maintenant au cas général et considérons une contraction linéaire V sur $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$. En accord avec la terminologie de [3], on dira que V est un <u>opérateur de contraction sur les martingales</u> si, pour tout temps d'arrêt T, les deux conditions suivantes sont remplies:

(4.1) $\quad E\left[V(H)\,|\,\mathcal{F}_T\right] = V(E\left[H|\,\mathcal{F}_T\right])$ p.s.

(4.2) $\quad I_A V(H)=V(I_A H)$ si $A\in\mathcal{F}_T$ et si $E\left[H|\,\mathcal{F}_T\right]=0$ p.s.

Avec les notations du paragraphe 2, l'égalité (4.1) peut s'écrire sous la forme

$$V_T(H)=V(H_T) \quad \text{p.s.}$$

La condition (4.2) entraîne d'autre part, pour tout élément A de $\mathcal{F}_T$,

$$\int_A (V(H-H_T))^2 dP = \int V(I_A(H-H_T))^2\, dP \leq \int_A (H-H_T)^2 dP$$

Par conséquent, si V est un tel opérateur, on a

$$(4.3) \qquad E\left[(V(H)-V_T(H))^2 \mid \mathfrak{F}_T\right] \leq E\left[(H-H_T)^2 \mid \mathfrak{F}_T\right].$$

Remarquons d'autre part que, pour toute martingale M de carré intégrable et pour tout temps d'arrêt T, on a

$$E\left[(M_\infty-M_{T-})^2 \mid \mathfrak{F}_T\right] = E\left[(M_\infty-M_T)^2 \mid \mathfrak{F}_T\right] + (\Delta_T M)^2$$

où $\Delta_T M = M_T - M_{T-}$.

Il en résulte que, si l'opérateur V de contraction sur les martingales vérifie, pour tout temps d'arrêt T, la condition supplémentaire

$$(4.4) \qquad \|\Delta_T V(H)\|_\infty \leq \|\Delta_T H\|_\infty ,$$

alors il vérifie aussi l'inégalité

$$(4.5) \qquad \|V(H)\|_{BMO} \leq \|H\|_{BMO} ,$$

de sorte qu'il est de type (p,p)fort pour $2 \leq p < +\infty$. (cf.théor.(2.1)).

Si l'on a des conditions qui assurent l'inégalité

$$(4.6) \qquad \|V(H)\|_{M_1} \leq c\|H\|_1$$

(par exemple, dans le cas discret, si l'on a $\|V(M_n-M_{n-1})\|_1 \leq \|M_n-M_{n-1}\|_1$ cf. [3] pag.207) l'opérateur V est (compte tenant du théorème classique de Marcinkiewicz) de type (p,p)-fort pour $1<p\leq 2$.

Dans le cas particulier des martingales dyadiques, on vérifie facilement que les propriétés (4.1) et (4.2) suffisent dejà à assurer les propriétés (4.5) et (4.6). On peut alors conclure que tout opérateur de contraction sur les martingales est du type (p,p)-fort pour $1<p<+\infty$.

Considérons maintenant, dans le cas discret, l'opérateur U ainsi défini: soit e_n une suite de nombres tels que $e_n^2=1$, et soit

$$(4.7) \qquad U(M)=\sum_{n=0}^{\infty} e_n m_n ,$$

où $m_0=M_0$, $m_n=M_n-M_{n-1}$.

Puisque les accroissements de la martingale M sont orthogonales, on reconnaît immédiatement que U est une isométrie de L^2 dans L^2 et de BMO dans BMO. On déduit alors du théorème (2.1) l'inégalité

$$(4.8) \qquad \|U(M)\|_p \leqslant c_p \|M\|_p$$

pour $2\leqslant p<+\infty$. D'autre part l'opérateur U est auto-adjoint dans L^2; on a donc aussi, pour $1<p\leqslant 2$:

$$(4.9) \qquad \|U(M)\|_p \leqslant c_q \|M\|_p$$

où q désigne l'exposant conjugué de p.

Appliquons ce résultat aux bases de Haar.

Considérons, sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, une base de Haar (m_n) associée à un système de Haar $(\mathfrak{F}_n)$ (voir [11], pag.51)

On sait que (m_n) est une base orthonormale de $L^2(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ et que toute fonction f appartenant à $L^p(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ $(1\leqslant p<+\infty)$ peut s'écrire sous la forme

$$(4.10) \qquad f = \sum_{n\geqslant 0} a_n m_n ,$$

où la série converge p.s. et dans L^p.

En appliquant les inégalités (4.8),(4.9) à la martingale $M_n = \sum_{k\leq n} a_k m_k$,on trouve alors que pour $1<p<+\infty$ la base de Haar (m_n) est une base <u>inconditionnelle</u> de L^p,c'est-à-dire que dans la représentation (4.10) on a convergence dans L^p de la série $\sum_n e_n a_n m_n$ pour tout choix des signes $e_n=\pm 1$.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] CAMPANATO S. Su un teorema di G.Stampacchia. Ann.Scuola Norm.Sup.Pisa 20(1966) pag.649-652.

[2] GARSIA A. Martingale inequalities. Seminar notes.Benjamin 1973.

[3] HERZ C. Bounded mean oscillation and regulated martingales. Trans.Amer.Math.Soc.193(1974) pag.199-215

[4] HERZ C. H_p spaces of martingales,0<p<1. Z.Warscheinlichkeitstheorie verw.Geb. 28(1974) pag.189-205.

[5] JOHN H. et NIRENBERG L.On fonctions of bounded mean oscillation. Comm.pure Applied Math. 14 (1961) pag.415-426.

[6] MEYER P.A. Martingales and stochastic integrals I.Lecture Notes in Mathematics 284 (1972) Springer-Verlag.Berlin-Heidelberg-New York.

[7] MEYER P.A. Un cours sur les intégrales stochastiques. Lecture Notes in Math.511. Springer-Verlag. Berlin-Heidelberg-New York.

[8] STAMPACCHIA G. The spaces $L^{p,\lambda}$,$N^{p,\lambda}$ and interpolation. Ann.Scuola Norm. Sup.Pisa 19 (1965) pp.443-462

[9] STROOCK D. Applications of Fefferman-Stein type interpolation to Probability theory and analysis. Comm.Pure Appl.Math. 26 (1973) pag.477-495.

[10] ZYGMUND A. Trigonometric series.Cambridge University Press 1959.

[11] NEVEU J. Martingales à temps discret.Masson et C^{ie}.Paris 1972.

Maurizio Pratelli
Istituto di Matematica.
Via Derna,1.
56100 PISA. Italie.