RENZO CAIROLI

Une représentation intégrale pour les martingales fortes

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 12 (1978), p. 162-169
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1978__12__162_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités

UNE REPRESENTATION INTEGRALE POUR LES MARTINGALES FORTES

par R. Cairoli

Soit $W = \{W_z,\ z \in \mathbb{R}_+^2\}$ un processus de Wiener à deux paramètres, défini sur un espace probabilisé complet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et, pour tout $z \in \mathbb{R}_+^2$, soit $\mathcal{F}_z$ la tribu engendrée par $\{W_\zeta,\ \zeta \prec z\}$ et par les ensembles négligeables de $\mathcal{F}$. Comme d'habitude, $(s,t) \prec (s',t')$ signifie ici $s \leq s'$ et $t \leq t'$.

Nous dirons qu'un processus est adapté, s'il est adapté à la famille $\{\mathcal{F}_z,\ z \in \mathbb{R}_+^2\}$. Nous poserons $\mathcal{F}_{s\infty} = \bigvee_{t \in \mathbb{R}_+} \mathcal{F}_{st}$, $\mathcal{F}_{\infty t} = \bigvee_{s \in \mathbb{R}_+} \mathcal{F}_{st}$ et $\mathcal{F}_\infty = \bigvee_{z \in \mathbb{R}_+^2} \mathcal{F}_z$. Nous désignerons en outre par R_{st} le rectangle $[0,s] \times [0,t]$ et par $\mathcal{B}$ la tribu borélienne de $\mathbb{R}$.

Suivant [1], nous dirons qu'un processus $M = \{M_z,\ z \in \mathbb{R}_+^2\}$ est une martingale forte, s'il est nul sur les axes, adapté, intégrable et si

$$(1) \qquad E\{M_{s't'} - M_{st'} - M_{s't} + M_{st} \mid \mathcal{F}_{s\infty} \vee \mathcal{F}_{\infty t}\} = 0$$

pour tout $(s,t) \prec (s',t')$.

Il a été démontré dans [1] (théorème 8.1) que toute martingale forte de carré intégrable est représentable sous la forme d'une intégrale stochastique, par rapport à W, d'un processus adapté. Dans le présent article, nous étendons cette représentation aux martingales fortes dont le carré n'est pas intégrable. Comme l'intégrale stochastique d'un processus adapté est continue (cf. [4], [5]), un corollaire du résultat est que les martingales fortes admettent une version continue. Cette conclusion ne paraît pas surprenante, compte tenu du récent résultat dû à J.B. Walsh (cf. [3]), selon lequel toute martingale forte relative à une famille croissante de tribus continue à droite admet une version continue à droite.

L'instrument de base est la représentation intégrale donnée dans [2]. Nous allons d'abord l'étendre aux 2-martingales locales. Par 2-martingale locale nous entendons un processus $M = \{M_z, z \in \mathbb{R}_+^2\}$ nul sur les axes et tel que, pour tout $s \in \mathbb{R}_+$ fixé, $\{M_{st}, t \in \mathbb{R}_+\}$ est une martingale locale ordinaire relative à $\{\mathcal{F}_{\infty t}, t \in \mathbb{R}_+\}$.

<u>Théorème 1</u>. Soit $M = \{M_z, z \in \mathbb{R}_+^2\}$ une 2-martingale locale adaptée et mesurable. Il existe un processus $\alpha = \{\alpha(z;s): z \in \mathbb{R}_+^2, s \in \mathbb{R}_+\}$ tel que

(a) $(z;s;\omega) \longrightarrow \alpha(z;s;\omega)$ est $\mathcal{B}^2 \times \mathcal{B} \times \mathcal{F}$-mesurable,

(b) $\alpha(u,v;s)$ est $\mathcal{F}_{sv}$-mesurable si $u \leq s$ et $= 0$ si $u > s$,

(c) pour tout $(s,t) \in \mathbb{R}_+^2$, $\int_{R_{st}} \alpha^2(\zeta;s)d\zeta < \infty$ p.s.,

et pour lequel on a

(d) $$M_{st} = \int_{R_{st}} \alpha(\zeta;s)dW_\zeta,$$

pour tout $(s,t) \in \mathbb{R}_+^2$.

<u>Démonstration</u>. Les martingales de carré intégrable relatives à $\{\mathcal{F}_{\infty t},\ t \in \mathbb{R}_+\}$ admettent une version continue (cf. [2]), donc aussi chacune des martingales locales $\{M_{st},\ t \in \mathbb{R}_+\}$, $s \in \mathbb{R}_+$. En posant, pour tout $(s,t) \in \mathbb{R}_+^2$,

$$\tilde{M}_{st} = \begin{cases} \lim\limits_{\substack{v \to t \\ v \in \mathbb{Q}}} M_{sv} & \text{si la limite existe,} \\ 0 & \text{autrement,} \end{cases}$$

nous obtenons donc une version $\tilde{M}$ de M qui est mesurable et telle que, pour s fixé, $t \to \tilde{M}_{st}$ est p.s. continue. Cette version sera encore notée par M. Posons, pour chaque n,

$$T_s^n(\omega) = \begin{cases} \inf\{t : |M_{st}(\omega)| \geq n\} & \text{si } \{\ \} \neq \emptyset, \\ \infty & \text{si } \{\ \} = \emptyset, \end{cases}$$

et, pour chaque m,

$$T_s^{nm}(\omega) = \begin{cases} \frac{j}{2^m} & \text{si } \frac{j-1}{2^m} < T_s^n(\omega) \leq \frac{j}{2^m},\ j = 0,1,2,\ldots, \\ \infty & \text{si } T_s^n(\omega) = \infty. \end{cases}$$

A noter que T_s^n est un temps d'arrêt relatif à la famille $\{\mathcal{F}_{st},\ t \in \mathbb{R}_+\}$ et que $T_s^{nm}(\omega)$ converge en décroissant vers $T_s^n(\omega)$ quand $n \to \infty$. Posons

$$M_{st}^n(\omega) = \begin{cases} \lim\limits_{m \to \infty} M_{s,T_s^{nm}(\omega) \wedge t}(\omega) & \text{si la limite existe,} \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

Le processus M^n ainsi défini est adapté et mesurable. En outre, pour s fixé,

$$t \longrightarrow M^n_{st} \quad \text{est indistinguable de} \quad t \longrightarrow M_{s,T^n_s \wedge t},$$

ce qui implique, en particulier, que M^n est une 2-martingale de carré intégrable. D'après le théorème 1.3 de [2], il existe donc un processus $\alpha_n = \{\alpha_n(z;s) \colon z \in \mathbb{R}^2_+,\ s \in \mathbb{R}_+\}$ vérifiant (a) et (b), tel que $E\{\int_{R_{st}} \alpha^2_n(\zeta;s)d\zeta\} < \infty$ et que

$$M_{s,T^n_s \wedge t} = M^n_{st} = \int_{R_{st}} \alpha_n(\zeta;s)dW_\zeta, \tag{2}$$

pour tout $(s,t) \in \mathbb{R}^2_+$. Nous allons maintenant vérifier que les α_n peuvent être collés ensemble de manière à produire le processus α cherché. A cet effet, remplaçons t par $T^{n-1}_s \wedge t$ dans (2) et faisons ensuite la même substitution dans (2), écrite pour $n-1$ à la place de n. Du fait que $T^{n-1}_s \leq T^n_s$, les premiers membres des deux relations obtenues coïncident, donc les deux derniers aussi et nous en concluons que, pour s fixé, p.s.

$$\alpha_n(\zeta;s) = \alpha_{n-1}(\zeta;s) \text{ pour p.t.(presque tout) } \zeta \in R_{s,T^{n-1}_s}.$$

Posons alors

$$\begin{aligned} \alpha(u,v;s) &= \alpha_1(u,v;s) && \text{si} \quad v \leq T^1_s, \\ &= \alpha_n(u,v;s) && \text{si} \quad T^{n-1}_s < v \leq T^n_s,\ n \geq 2, \\ &= 0 && \text{autrement.} \end{aligned}$$

Compte tenu du fait que T^n_s converge en croissant p.s. vers l'infini, quand $n \to \infty$, il est facile de voir que le processus α ainsi défini répond aux exigences du théorème.

Théorème 2. Si $M = \{M_z, z \in \mathbb{R}_+^2\}$ est une martingale forte, il existe un processus $\varphi = \{\varphi(z), z \in \mathbb{R}_+^2\}$ adapté et mesurable, tel que $\int_{R_z} \varphi^2(\zeta)d\zeta < \infty$ p.s. pour tout $z \in \mathbb{R}_+^2$ et pour lequel on a

$$M_z = \int_{R_z} \varphi(\zeta)dW_\zeta, \tag{3}$$

pour tout $z \in \mathbb{R}_+^2$.

Démonstration. Les martingales relatives à la famille $\{\mathcal{F}_z, z \in \mathbb{R}_+^2\}$ étant continues en probabilité, elles admettent une version mesurable, d'après le théorème de Doob. Quitte à redéfinir M_{st} comme au début de la démonstration du théorème 1, nous pouvons donc supposer que M est mesurable et que $t \to M_{st}$ est p.s. continue pour s fixé. En particulier, M est alors une 2-martingale locale adaptée et mesurable et il existe, d'après le théorème 1, un processus α vérifiant (a) – (d). Posons, pour $s < s'$ fixés et pour chaque n,

$$T^n = \begin{cases} \inf\{t: \int_{R_{st}} \alpha^2(\zeta;s)d\zeta \vee \int_{R_{s't}} \alpha^2(\zeta;s')d\zeta \geq n\} & \text{si } \{\ \} \neq \emptyset, \\ \infty & \text{si } \{\ \} = \emptyset. \end{cases}$$

Alors T^n est un temps d'arrêt relatif à la famille $\{\mathcal{F}_{\infty t}, t \in \mathbb{R}_+\}$ et, d'après (d), qui est encore valable lorsque t est remplacé par un temps d'arrêt borné relatif à cette famille, si $t < t'$ et r est quelconque,

$$M_{r,T^n\wedge t'} - M_{r,T^n\wedge t} = \int_{R_{r,T^n\wedge t'} - R_{r,T^n\wedge t}} \alpha(\zeta;r)dW_\zeta. \tag{4}$$

D'autre part, toujours pour $s < s'$ fixés, (1) implique que

$\{M_{s't} - M_{st},\ t \in \mathbb{R}_+\}$ est une martingale relative à la famille $\{\mathcal{F}_{s\infty} \vee \mathcal{F}_{\infty t},\ t \in \mathbb{R}_+\}$, donc, d'après le théorème d'arrêt de Doob,

$$(5) \qquad E\{M_{s',T^n\wedge t'} - M_{s,T^n\wedge t'} - M_{s',T^n\wedge t} + M_{s,T^n\wedge t} \mid \mathcal{G}_t\} = 0,$$

où $\mathcal{G}_t$ est la tribu des $F \in \mathcal{F}_\infty$ tels que $F \cap \{T^n \wedge t \leq v\} \in \mathcal{F}_{s\infty} \vee \mathcal{F}_{\infty v}$ pour tout $v \in \mathbb{R}_+$. Par conséquent, en introduisant l'expression du deuxième membre de (4) dans (5), nous obtenons

$$(6) \qquad E\{\int_{R_{s',T^n\wedge t'} - R_{s',T^n\wedge t}} \alpha(\zeta;s')dW_\zeta - \int_{R_{s,T^n\wedge t'} - R_{s,T^n\wedge t}} \alpha(\zeta;s)dW_\zeta \mid \mathcal{G}_t\} = 0.$$

Mais en raison du choix de T^n et des propriétés de l'intégrale stochastique,

$$E\{\int_{R_{s',T^n\wedge t'} - R_{s,T^n\wedge t'} - (R_{s',T^n\wedge t} - R_{s,T^n\wedge t})} \alpha(\zeta;s')dW_\zeta \mid \mathcal{G}_t\} = 0,$$

ce qui fait que (6) s'écrit aussi sous la forme

$$E\{\int_{R_{s,T^n\wedge t'} - R_{s,T^n\wedge t}} (\alpha(\zeta;s') - \alpha(\zeta;s))dW_\zeta \mid \mathcal{G}_t\} = 0,$$

ou encore (cf. lemme 9.6 de [1])

$$\int_{R_{s\infty}} E\{I_{\{T^n\wedge t < v \leq T^n\wedge t'\}} (\alpha(u,v;s') - \alpha(u,v;s)) \mid \mathcal{G}_t\} dW_{uv} = 0.$$

Il s'ensuit que, pour p.t. $(u,v) \in R_{s\infty}$,

$$(7) \qquad E\{I_{\{T^n\wedge t < v \leq T^n\wedge t'\}} (\alpha(u,v;s') - \alpha(u,v;s)) \mid \mathcal{G}_t\} = 0.$$

Considérons un $(u,v) \in R_{s\infty}$ tel que $v > 0$ et que (7) vaille pour tout t et t' appartenant à un ensemble dénombrable dense de $\mathbb{R}_+$

et faisons tendre t en croissant et t' en décroissant, le long de cet ensemble, vers v. Nous obtenons

$$E\{I_{\{v \leq T^n\}}(\alpha(u,v;s') - \alpha(u,v;s)) \mid \mathcal{G}_v\} =$$

$$= I_{\{v \leq T^n\}}(\alpha(u,v;s') - \alpha(u,v;s)) = 0.$$

En faisant tendre alors n vers l'infini, il en résulte que, pour $s < s'$ fixés,

$$\alpha(\zeta;s') = \alpha(\zeta;s) \quad \text{pour p.t. } \zeta \in R_{s\infty},$$

d'où nous concluons que, pour p.t. $(u,v) \in \mathbb{R}_+^2$, $\alpha(u,v;s)$ est une fonction p.s. essentiellement constante de $s > u$. Posons, pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}_+^2$

$$\varphi(u,v) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} n \displaystyle\int_u^{u+1/n} \alpha(u,v;r)dr & \text{si l'intégrale et la limite existent,} \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

Le processus φ ainsi défini est adapté et mesurable et nous avons, pour p.t. $(u,v) \in \mathbb{R}_+^2$,

$$\alpha(u,v;s) = \varphi(u,v) \quad \text{pour p.t. } s > u. \tag{8}$$

Par conséquent, pour p.t. $s \in \mathbb{R}_+$, l'égalité dans (8) a lieu pour p.t. $(u,v) \in R_{s\infty}$ et nous voyons donc que, grâce à la propriété (c) du théorème 1,

$$\int_{R_z} \varphi^2(\zeta)d\zeta < \infty \quad \text{p.s. pour tout } z \in \mathbb{R}_+^2.$$

De plus, si s est hors de l'ensemble exceptionnel, l'égalité p.p.

des intégrants α et φ implique

$$M_{st} = \int_{R_{st}} \alpha(\zeta;s)dW_\zeta = \int_{R_{s,t}} \varphi(\zeta)dW_\zeta, \tag{9}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. Mais le premier et le dernier membre sont continus en probabilité, donc ils coïncident pour tout $(s,t) \in \mathbb{R}_+^2$ et le théorème est démontré.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. Cairoli et J.B. Walsh : Stochastic integrals in the plane, Acta mathematica, 134, 1975, p. 111-183.

[2] R. Cairoli et J.B. Walsh : Martingale representations and holomorphic processes, Annals of Probability, 5, 1977, p. 511-521.

[3] J.B. Walsh : Right continuity of martingales. A paraître.

[4] E. Wong et M. Zakai : An extension of stochastic integrals in the plane, Annals of Probability, 5, 1977.

[5] E. Wong et M. Zakai : The sample function continuity of stochastic integrals in the plane. A paraître.

Département de mathématiques
Ecole polytechnique fédérale
Avenue de Cour 61
1007 Lausanne, Suisse