SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

NICOLE EL KAROUI
GÉRARD WEIDENFELD

Théorie générale et changement de temps

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 11 (1977), p. 79-108
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1977__11__79_0>

Théorie générale et changement de temps

par Nicole EL KAROUI
Gérard WEIDENFELD

Ce travail prolonge une étude faite par le premier des auteurs sur la théorie générale par rapport aux tribus changées de temps par l'inverse d'un processus croissant adapté, continu, et exposée par MEYER dans le présent volume.

L'essentiel de la généralisation au cas d'un processus adapté quelconque a été fait par le second des auteurs. Toutefois la rédaction de cet article a été commune.

Cet article est divisé en trois parties d'importance inégale. La première n'a rien de probabiliste et essaye de décrire de façon minutieuse les propriétés de l'inverse à droite j_t, d'un processus croissant continu à droite, limité à gauche, défini sur R^+, C_t. C'est assez fastidieux, mais indispensable.

Dans la deuxième partie, on suppose que C_t est un processus croissant aléatoire adapté à une famille $\underline{\underline{F}}_t$, satisfaisant aux conditions habituelles.

Il est alors aisé de montrer que j_t est un $\underline{\underline{F}}_t$ temps d'arrêt. On est alors en mesure de décrire les opérations de projection par rapport aux tribus $\underline{\underline{F}}_{j_t}$, des processus et des mesures aléatoires, en fonction des mêmes opérations par rapport aux tribus $\underline{\underline{F}}_t$. Le corollaire en est évidemment la description de tous les processus $\underline{\underline{F}}_{j_t}$ optionnels et prévisibles, ainsi que de tous les processus croissants $\underline{\underline{F}}_{j_t}$ optionnels et prévisibles.

Dans la troisième partie, on applique l'étude précédente au processus croissant adapté $L_t = \sup\{s \leqslant t , (\omega, s) \in M\}$, où M est un fermé optionnel, dont l'inverse à droite est $D_t = \inf\{s > t ; (\omega, s) \in M\}$, ce qui permet de préciser l'étude commencée par B. MAISONNEUNE dans [3] sur les tribus $\underline{\underline{F}}_{D_t}$.

I - Changements de temps sur R^+.

On considère une fonction de répartition , C_t , définie sur $R+$, à valeurs dans $\overline{R+}$ croissante (non strictement nécessairement) et continue à droite. On prolonge C à $\overline{R}_+$ en posant

$$C_\infty = \lim_{s \uparrow \infty} C_s \quad ,$$

mais on n'exige pas que C_o soit nul, ni que C soit partout finie.

z désignera le premier instant à partir duquel C est infinie, c.à.d.

(1) (1) $z = \inf \{ t \; ; \; t \in R_+ \; , \; C_t = \infty \}$. On a alors $C_z = C_\infty$

La fonction C_t^- définie par $C_t^- = \lim\limits_{\substack{s \uparrow t \\ s<t}} C_s$, pour $t > o$

dans R_+, sera notée B_t , et prolongée en zéro en posant $B_o = o$.

B_t est alors croissante, continue à gauche, pour laquelle $B_\infty = C_\infty$ mais pas nécessairement $B_z = C_z$.

Nous allons associer à C deux changements de temps: le premier j_t est l'inverse à droite de C . Il est défini par :

(2) $j_t = \inf \{ s \; ; \; C_s > t \}$ si t est fini

j_t est alors une fonction croissante, continue à droite, définie sur R_+.

(3) mais prolongée à l'infini, en posant $j_\infty = \lim\limits_{s \uparrow \infty} j_s = z$

(bien faire attention à la convention : j_∞ n'est pas défini à partir de la formule (2). Il serait alors toujours infini). Le second i_t est l'inverse à gauche de C . Il est défini par

(4) $i_t = \sup \{ s \; ; \; C_s < t \}$ si $t \in \overline{R}_+^*$, et $i_o = o$

i_t est une fonction croissante, continue à gauche sur $\overline{R}_+$.

L'identité suivante sera d'un usage fréquent :

(5) $a \leqslant C_b \iff i_a \leqslant b \qquad (a \in R_+ \; , \; b \in \overline{R}_+)$

Elle montre en particulier que i_t peut aussi être défini par :

(6) $i_t = \inf \{ s \mid C_s \geq t \}$ $(t \in R_+)$, ce qui entraîne l'égalité

$i_\infty = z = j_\infty$

Une conséquence importante de cette relation est que

$i_t = \lim_{s \nearrow t} j_t$ $(t \in \overline{R}_+^*)$, et que j_t s'interprète alors

pour t fini comme le $\sup \{ s \mid C_s \leq t \}$

Le couple (i, j) jouit donc de propriétés analogues au couple (B, C). La similitude de notation aidera peut-être à s'en souvenir : i est à la "gauche" de j, de même que B est à gauche de C.

Si l'on étudie à leur tour les inverses de j, on remarque que

(7) $C_t = \inf \{ s \mid j_s > t \}$ est l'inverse à droite de j

(8) $B_t = \inf \{ s \mid j_s \geq t \}$ est l'inverse à gauche de j.

Nous essaierons d'exploiter au maximum cette dualité. En particulier, notons que :

(9) si $\overline{z} = \inf \{ t \mid t \in R_+ , j_t = +\infty \}$, $j_{\overline{z}} = j_\infty = z$ et $\overline{z} = B_\infty = C_\infty$

j_t est fini si et seulement si $t < \overline{z}$.

Par contre la caractérisation de $\{ t \mid i_t < \infty \}$ est moins aisée, car il faut tenir compte de l'extrémité gauche du palier éventuel de C_∞ , à savoir $i_{\overline{z}}$:

(10) $\{i_t < \infty\} = \{t < \overline{z}\} \cup \{t = \overline{z}\} \cap \{i_{\overline{z}} < \infty\}$

Quant à l'identité (5), elle se traduit par :

(11) $a \leq j_b \iff B_a \leq b$, ou encore $j_a < b \iff B_b > a$

Il est clair que les inverses que nous venons d'introduire ne sont pas de véritables fonctions inverses. Nous allons préciser ce fait, en étudiant leurs compositions.

(12) $$D_t = jC_t = \begin{cases} \inf \{s \mid C_s > C_t\} & \text{si } t < z \\ z & \text{si } t \geqslant z \end{cases}$$

D_t est le premier instant de croissance de C après t, arrêté en z.

(13) $z \geqslant D_t \geqslant t \wedge z$ $(t \in \overline{\mathbb{R}}_+)$, et pour que D_t soit fini, il faut et il suffit que z soit fini ou que si z est infini $C_t < C_\infty$
La fonction D_t est continue à droite, limitée à gauche, arrêtée en z.

Regardons maintenant ce qui se passe sur la gauche en définissant :

(14) $$\ell_t = i_{B_t} = \sup \{s \mid C_s < B_t\}$$
$$= \inf \{s \mid C_s \geqslant B_t\}$$

C'est une fonction continue à gauche, qui satisfait à la relation :

(15) $\ell_t \leqslant t \wedge z$ avec égalité si $t > z$

ℓ_t désigne l'extrémité gauche du palier de C en t :
$C_{\ell_t} = C_t$

Que représente l'ensemble $\{D_t > t \wedge z\}$?

D'une part t appartient à un palier de C (nécessairement fini) ; d'autre part, puisque $i_{C_t} = \inf \{s \mid C_s \geqslant C_t\}$ est toujours inférieur à $t \wedge z$, t satisfait à $t < z$ et $jC_t > t \geqslant iC_t$.
C_t est donc un saut de j (lorsque de plus $C_t = \overline{z}$, alors z est un saut de C et $D_t = z$). Nous pouvons résumer ceci dans la relation :

(16) $$1_{\{D_t > t \wedge z\}} = \sum_{s \in R_+} 1_{\{i_s \leq t < j_s\}}$$

Notons que si $t \in [i_s, j_s[$, $D_t = j_s$

De même $\{\ell_t < t \wedge z\} = \{i_{B_t} < t \wedge z \leq j_{B_t}\}$ et

(17) $$1_{\{\ell_t < t \wedge z\}} = \sum_{s \in R_+} 1_{\{i_s < t \leq j_s\}}$$ et si $i_s < t \leq j_s$,

$\ell_t = i_s$.

Notons que les paliers de C correspondent aux sauts de j et réciproquement.

Nous introduisons maintenant deux fonctions $R_t = D_t - t \wedge z$ et $S_t = z \wedge t - \ell_t$ qui mesurent, respectivement, la longueur du palier de C (arrêtée en z) qu'il reste à parcourir après t, et celle parcourue avant t . Pour que R_t soit fini il faut et il suffit que z soit fini ou que $t < i(C_\infty)$ si z est infini. Par contre S_t est fini pour tout t fini. En utilisant la dualité de C et j , il est naturel d'introduire les processus duaux de D, ℓ, R, S :

(18) $$\overline{D}_t = C_{j_t} = \begin{cases} \inf \{s \mid j_s > j_t\} & \text{si } t < \overline{z} \\ \overline{z} & \text{sinon} \end{cases}$$

(19) $$\overline{z} \geq \overline{D}_t > t \wedge \overline{z} \qquad (t \in \overline{R}_+)$$

(20) $$\overline{\ell}_t = B_{i_t} = \begin{cases} \sup \{s \mid j_s < i_t\} & \text{si } i_t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(21) $$\overline{\ell}_t \leq t \wedge \overline{z} \quad \text{avec égalité si } t > \overline{z}.$$

L'ensemble $\{\overline{D}_t > t \wedge \overline{z}\}$ se décrit aisément comme

$\bigcup_{s \in \overline{R}_+} \{B_s \leq t < C_s\}$ et l'ensemble $\{\overline{\ell}_t < t \wedge \overline{z}\}$ s'exprime comme

$\bigcup_{s \in \overline{R}_+} \{B_s < t \leq C_s\}$.

Les fonctions $\overline{R}_t$ et $\overline{S}_t$ sont définis respectivement par $\overline{R}_t = \overline{D}_t - t \wedge \overline{z}$ et $\overline{S}_t = \overline{z} \wedge t - \ell_t$. Pour que $\overline{R}_t$ soit fini, il faut et il suffit que t soit strictement inférieur à B_z si $\overline{z} = +\infty$

Si M désigne l'ensemble (fermé) des points de croissance de C , c'est à dire le support de C , on peut encore interpréter les ensembles $\{D_t = t \wedge z\}$ et $\{\ell_t = t \wedge z\}$:

$\{\ell_t = t \wedge z\} = G =$ l'ensemble des points de M, qui sont points d'accumulation à gauche de points de M .

$\{D_t = t \wedge z\} = R =$ l'ensemble des points de M, qui sont points d'accumulation à droite de points de M .

De même on définit $\overline{M}$, $\overline{G}$, $\overline{R}$ à partir de j . Les relations suivantes sont alors immédiates :

(22) $\qquad t \in R \Rightarrow C_t \in \overline{R} \quad , \quad t \in \overline{R} \Rightarrow j_t \in R$

(23) $\qquad t \wedge z \in G \Rightarrow B_{t \wedge z} \in \overline{G} \quad , \quad t \wedge \overline{z} \in \overline{G} \Rightarrow i_{t \wedge \overline{z}} \in G$

<u>Remarque</u> : Le lecteur familier de la théorie des ensembles "aléatoires" admettra que nos notations sont justifiées par le fait que :

$$D_t = \inf \{s \mid s > t \ , \ s \in M\} \wedge z$$

$$\ell_t = \sup \{s \mid s < t \ , \ s \in M\} \wedge z$$

Nous allons maintenant étudier les effets des changements de temps sur les mesures. Si μ est une mesure positive sur $(R_+^*, B_{R_+^*})$ de fonction de répartition k_t , nous lui associons deux mesures sur $(R_+^*, B_{R_+^*})$ définies par les relations :

(24) $$\mu_d(f) = \int_{]o,\infty[} f(j_t) \ 1_{\{o \leq j_t < \infty\}} \ dk_t \qquad (f \in b\, B_{R_+^*})$$

(25) $$\mu_g(f) = \int_{]o,\infty[} f(i_t) \ 1_{\{o < i_t < \infty\}} \ dk_t \qquad (f \in b\, B_{R_+^*})$$

Nous nous proposons de déterminer les fonctions de répartition k^d et k^g de μ_d et μ_g . Utilisant la relation (5) , on obtient :

(26) $$k^g(t) = \int_{]o,\infty[} 1_{\{o<i_s\leq t\}} dk_s = \int_{]o,\infty[} 1_{\{C_o<s\leq C_t\}} dk_s = k_{C_t} - k_{C_o}$$

La relation (26) équivaut alors à la formule de changement de variable :

(27) $$\int_{]o,\infty[} f(i_t)\, 1_{\{o<i_t<\infty\}} dk_t = \int_{]o,\infty[} f(t) d(k_C)_t \quad . \quad f \in (B_{R_+^*})$$

Pour déterminer k^d , on a d'après la relation (12)

$$\mu_d([o,\ t[) = \int_{]o,\infty[} 1_{\{o\leq j_s<t\}} dk_s = \int 1_{\{o\leq s<B_t\}} dk_s = k^-_{B_t}$$

(28) et $$k^d_t = \lim_{s \searrow t} (k^-_{B_s}) = k^-_{C_t}\ 1\{D_t > t \wedge z\} + k_{C_t}\ 1\{D_t = t \wedge z\}$$

est la relation (24) se réécrit

(29) $$\int_{]o,\bar{z}[} f(j_t) dk_t = \int_{]o,z[} f(t) dk^d_t \qquad (f \in b\ B_{R_+^*})$$

Enfin par la dualité de C et j , on obtient aussi les relations :

(30) $$\int_{]o,\infty[} f(B_t)\, 1_{\{o<B_t<\infty\}} dk_t = \int_{]o,\infty[} f(t)\ d(k_j)_t \qquad (f \in B_{R_+^*})$$

et

(31) $$\int_{[o,z[} f(C_t) dk_t = \int_{[o,\bar{z}[} f(t) d\tilde{k}_t \qquad \text{où}$$

$$\tilde{k}_t = \lim_{s \searrow t} (k^-_{i_s}) = k^-_{j_t}\ 1\{\bar{D}_t > t \wedge \bar{z}\} + k_{j_t}\ 1\{D_t = t \wedge \bar{z}\}$$

Il résulte des relations (23) et (24) que l'on peut parfois préciser le support des mesures déduites de k , connaissant le support de k . En particulier nous utiliserons plus tard le fait que :

(33) Si k a son support inclus dans $G_\cap]\!]o, z]\!]$, $k_t = k_{D_t}$ et le processus $k_{\dot{j}}$ a son support inclus dans $\bar{G}_\cap]\!]o, \bar{z}]\!]$. Il satisfait donc à $k_{\dot{j}_{\bar{D}_t}} = k_{\dot{j}_t}$.

En effet, si k est à support dans $G_\cap]\!]o, z]\!]$, ℓ étant l'inverse à gauche de D, l'ensemble $\{s \,;\, t < s \leq D_t\}$ est identique à $\{s \,;\, \ell_s \leq t < s\}$ et n'est donc pas chargé par k.

Le processus $k_{\dot{j}_t} = \bar{k}_t$ a son support inclus dans $\bar{G}_\cap]\!]o, \bar{z}]\!]$ et satisfait donc à $\bar{k}_t = \bar{k}_{\bar{D}_t}$.

En effet $\displaystyle\int 1_{\bar{G}_\cap]o,\bar{z}]^c}(s)\,dk_{\dot{j}_s} = \int 1_{\bar{G}_\cap]o,\bar{z}]^c}(B_s)\,dk_s$

or si $s \in G_\cap]\!]o,z]\!]$, $B_s \in \bar{G}_\cap]\!]o,\bar{z}]\!]$

donc ces intégrales sont nulles.

(34) De même si k a son support inclus dans $R_\cap [\![o, z[\![$, $k_{\bar{t}} = k_{\bar{\ell}_t}$ et le processus $\bar{k}^d_t = \lim\limits_{s \searrow t} k_{\bar{i}_s}$ a son support inclus dans $\bar{R}_\cap [\![o, \bar{z}[\![$ et satisfait donc a $k_{\bar{i}_t} = k_{\bar{i}_{\bar{\ell}_t}}$

La démonstration est analogue à condition de remplacer $\bar{G}$ et B par ($\bar{R}$ et C).

II - Théorie générale du processus changé de temps.

Nous considérons comme donné une fois pour toutes un espace $(\Omega, \underline{\underline{F}}, P)$, muni d'une filtration $(\underline{\underline{F}}_t)_{t \in \bar{\mathbb{R}}_+}$ satisfaisant aux conditions habituelles, à laquelle nous adjoignons une tribu supplémentaire permettant de définir la prévisibilité en o, $\underline{\underline{F}}_{o^-}$.

Si C_t est un processus croissant, continu à droite, $\underline{\underline{F}}$ adapté, tous les résultats de la première partie subsistent, en remplaçant toutes les fonctions qu'on y a définies par des fonctions aléatoires dont nous allons maintenant préciser la mesurabilité.

Tout d'abord, les va $\underline{z\ ,\ j_t\ \text{et}\ i_t}$ <u>sont des temps d'arrêts</u> des tribus $(\underline{\underline{F}}_t)$ (ce que nous noterons $\underline{\underline{F}}$ t. a.) puisque débuts d'ensembles progressivement mesurables.

On peut alors définir les tribus $\underline{\underline{F}}_z$, $\underline{\underline{F}}_{j_t}$ et $\underline{\underline{F}}_{i_t}$. Nous poserons $\overline{\underline{\underline{F}}}_t = \underline{\underline{F}}_{j_t}$ et $\overline{F}_\infty = \mathrm{V}\, \underline{\underline{F}}_t$. La famille $\overline{F}_t$ est croissante c.a.d. et complète. Notons que puisque $j_t \leqslant z$, $\overline{\underline{\underline{F}}}_\infty \subseteq \underline{\underline{F}}_z$.

Le processus j_t est un processus croissant $\overline{\underline{\underline{F}}}$ adapté, c'est donc un processus $\overline{\underline{\underline{F}}}$ optionnel.

De même le processus i_t est $\overline{\underline{\underline{F}}}$ adapté cag, donc $\overline{\underline{\underline{F}}}$ prévisible. Si nous appliquons la dualité de C et j, on constate que $\overline{z}$, C_t et B_t sont des $\overline{\underline{\underline{F}}}$ temps d'arrêts et que $\underline{\underline{G}}_t$ définie par $\overline{\underline{\underline{F}}}_{C_t}$ est une famille croissante continue à droite et complète de sous tribus de $\underline{\underline{F}}_\infty$, de plus $\underline{\underline{F}}_t \subseteq \underline{\underline{G}}_t \quad \forall t \in \overline{\mathbb{R}}$.

La va D_t est le début de l'ensemble $\underline{\underline{F}}$ progressivement mesurable $\{C_s > C_t\}$, c'est donc un $\underline{\underline{F}}$ t a. Mais le processus croissant D_t n'est pas $\underline{\underline{F}}$-adapté, il est seulement $\underline{\underline{G}}$-adapté.

De même, $\overline{D}_t$ est un $\overline{\underline{\underline{F}}}$ t. a et le processus croissant $\overline{D}_t = C_{j_t}$ est lui $\overline{\underline{\underline{F}}}$-adapté.

Le processus croissant ℓ_t est $\underline{\underline{F}}$-adapté cag, donc $\underline{\underline{F}}$-prévisible ; et de même $\overline{\ell}_t$ est $\overline{\underline{\underline{F}}}$-prévisible.

L'ensemble M des points de croissance de C est un fermé aléatoire progressivement mesurable donc $\underline{\underline{F}}$ optionnel.

L'ensemble $G = \{(\omega, t) \mid \ell_t = t \wedge z\}$ est lui $\underline{\underline{F}}$-prévisible. Par contre, l'ensemble $R = \{(\omega, t) \mid D_t = t \wedge z\}$ est $\underline{\underline{G}}$-optionnel mais seulement $\underline{\underline{F}}$-progressif.

Dans [ ], MEYER a montré qu'il existait un ensemble R^o contenant R, tel que $R^o - R$ ne contienne aucun graphe de temps d'arrêt. Ce qui entraîne en particulier, que tout processus $\underline{\underline{F}}$-optionnel, nul sur R, est nul sur R^o.

L'ensemble $\bar{M}$ des points de croissance de j est $\bar{\underline{\underline{F}}}$-optionnel.

L'ensemble $\bar{G} = \{(\omega, t), \bar{\ell}_t = t \wedge \bar{z}\}$ est $\bar{\underline{\underline{F}}}$-prévisible et l'ensemble $\bar{R} = \{(\omega, t), \bar{D}_t = t \wedge \bar{z}\}$ est $\bar{\underline{\underline{F}}}$-optionnel, car $\bar{D}_t$ est un processus $\bar{\underline{\underline{F}}}$-optionnel.

Nous sommes maintenant en mesure de "faire de la théorie générale" par rapport aux tribus $\bar{\underline{\underline{F}}}_t$.

---

* Nous remercions P.A. MEYER de nous avoir signalé et aidé à corriger une erreur des précédentes versions, qui utilisaient implicitement le fait que R était optionnel.

Première partie : Projection des processus.

Comme d'habitude en théorie générale nous appelerons $\underline{\underline{\mathcal{O}}}$ la tribu des processus $\underline{\underline{F}}$ optionnels (resp $\overline{\underline{\underline{\mathcal{O}}}}$ celle des processus $\overline{\underline{\underline{F}}}$ optionnels) et $\underline{\underline{\mathcal{P}}}$ la tribu des processus $\underline{\underline{F}}$ prévisibles (resp. $\overline{\underline{\underline{\mathcal{P}}}}$ celle des processus $\overline{\underline{\underline{F}}}$ prévisibles). La projection d'un processus z, mesurable, $\underline{\underline{F}}$- optionnelle est notée z^o (resp. $\overline{\underline{\underline{F}}}$ optionnelle : $z^{\bar{o}}$), celle $\underline{\underline{F}}$- prévisible sera notée z^p (reps $\overline{\underline{\underline{F}}}$-prévisible : $z^{\bar{p}}$).

Remarquons tout de suite, que si z est un processus dépendant d'un paramètre réel u, $z(\omega, t, u)$, $B(R^+) \otimes \underline{\underline{F}} \otimes B(R^+)$ mesurable, il existe un unique processus $B(R^+) \otimes \underline{\underline{\mathcal{O}}}$ mesurable, $z^o(\omega, t, u)$, (resp. $B(R_+) \otimes \underline{\underline{\mathcal{P}}}$ mesurable, $z^p(\omega, t, u)$), qui est pour tout u, la projection $\underline{\underline{F}}$- optionnelle (resp. $\underline{\underline{F}}$ prévisible) de $z(.,.,u)$.

En effet, ces propriétés sont évidentes si z est de la forme $g(u)y(t,\omega)$ et s'étendent aisement par classe monotone à tous les proccessus.

Nous introduirons encore une notation : si $(r_t)_{t\leqslant\infty}$ est un processus croissant à valeurs $\overline{R}_+$, pour tout processus $(Z_t)_{t\leqslant\infty}$ nous désignerons par $r \circ Z$ le processus Z_{r_t} et par $r^u \circ Z$ le processus $Z_{(r_t - u)^+}$

Commençons par établir le petit lemme suivant :

Lemme 1 : a) si z est $\underline{\underline{F}}$-optionnel, $j\circ z$ est $\overline{\underline{\underline{F}}}$-optionnel

b) si z est $\underline{\underline{F}}$-prévisible, $i\circ z$ est $\overline{\underline{\underline{F}}}$-prévisible

c) en particulier, si M est une martingale bornée càdlàg telle que $M_o^- = 0$, les processus $(i\circ M)^-$ et $(j\circ M)^-$, définis respectivement par $(i\circ M^-)_t = M^-_{i(t)}$ et $(j\circ M)^-_t = \begin{cases} \lim\limits_{s \nearrow t} M_{j_s} & \text{si } t > o \\ o & t = o \end{cases}$

$$(joM)^-_t = \sum_u 1_{\{B_u<t\leq C_u\}} M_u + M^-_{i_t} 1_{\{t \notin \cup]B_u, C_u]\}}$$

$$= M_{i_t} 1_{\{\bar{\ell}_t < t \wedge \bar{z}\}} + M^-_{i_t} 1_{\{\bar{\ell}_t = t \wedge \bar{z}\}}$$

sont $\overline{\underline{\underline{F}}}$ prévisibles.

Ces processus peuvent être distincts car i n'est pas strictement croissant.

<u>Démonstration</u> :

a) la tribu $\underline{\underline{O}}$ étant engendrée par les processus z cadlag adaptés, le processus joz est $\overline{\underline{\underline{F}}}$ adapté et cadlag donc appartient à $\overline{\underline{\underline{O}}}$

b) De même la tribu $\underline{\underline{P}}$ étant engendrée par les processus. Z cag adaptés, ioz est $\overline{\underline{\underline{F}}}$ adapté et cag puisque i l'est, donc $ioz \in \overline{\underline{\underline{P}}}$.

c) Il en résulte que ioM^- est $\overline{\underline{\underline{F}}}$ prévisible et puisque joM est $\overline{\underline{\underline{F}}}$ adapté cadlag, le processus $(joM)^-$ est $\overline{\underline{\underline{F}}}$ prévisible. Il est alors naturel de se demander si tous les processus $\overline{\underline{\underline{F}}}$-optionnels (resp. $\overline{\underline{\underline{F}}}$-prévisibles) sont de la forme joz $(z \in \underline{\underline{O}})$ (resp. ioz, $z \in \underline{\underline{P}}$).

Dans le cas général la réponse est négative.

En effet, le processus identité sur R^+, qui est à la fois $\overline{\underline{\underline{F}}}$-prévisible et $\overline{\underline{\underline{F}}}$-optionnel ne peut s'écrire sous la forme $z_{j(t)}$ si j n'est pas strictement croissant.

D'autre part, le fait que i_t ne soit pas strictement croissant montre, si on se refère au lemme 1.c), que les processus de $\overline{\underline{\underline{P}}}$ ne s'expriment pas uniquement à l'aide de ceux de $\underline{\underline{P}}$. Nous allons voir qu'on peut toutefois décrire complètement les tribus $\overline{\underline{\underline{O}}}$ et $\overline{\underline{\underline{P}}}$.

Les propriétés suivantes des temps d'arrêts des tribus $\overline{\underline{\underline{F}}}$ sont fondamentales.

Proposition 2 :

a) Si $\bar{T}$ est un $\bar{\underline{\underline{F}}}$ ta, $j_{(\bar{T})}$ est un $\underline{\underline{F}}$-ta et $\bar{T}$ est $\underline{\underline{F}}_{j_{\bar{T}}}$ mesurable.

b) Si $\bar{T}$ est un $\bar{\underline{\underline{F}}}$ ta prévisible, $i_{\bar{T}}$ est un $\underline{\underline{F}}$-ta, (ce qui n'est pas nécessairement lecas si $\underline{\underline{T}}$ n'est pas prévisible) et $\bar{T}$ est $F_{i_{\bar{T}}}$ - mesurable.

Le ta. défini par $\bar{T}_1 = \begin{cases} \bar{T} & \text{si } \bar{S}_{\bar{T}} = o \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$, est $\bar{\underline{\underline{F}}}$-prévisible

et $i_{\bar{T}_1}$ est prévisible.

c) Si T est un $\underline{\underline{G}}$-ta, C_T est un $\bar{\underline{\underline{F}}}$ ta et T est $\bar{\underline{\underline{F}}}_{C_T}$ mesurable.

Si T est un $\underline{\underline{G}}$-ta prévisible ou seulement un $\underline{\underline{F}}$ ta, B_T est un $\bar{\underline{\underline{F}}}$ ta.

Le ta $T_1 = \begin{cases} T & \text{si } S_T = o \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$ est $\underline{\underline{G}}$ prévisible si T est $\underline{\underline{G}}$ prévisible

et alors B_{T_1} est $\bar{\underline{\underline{F}}}$ prévisible.

Démonstration :

Seuls les points a) et b) sont à justifier. Si $\bar{T}$ est un temps fixe a) et b) ont déjà été énoncés.

Supposons $\bar{T}$ étagé : $\bar{T} = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{\bar{A}_i} & \text{si } \omega \in \cup \bar{A}_i \text{ , } \bar{A}_i \in \bar{\underline{\underline{F}}}_{\alpha_i} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$

$$j_{\bar{T}} = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} j_{\alpha_i} 1_{\bar{A}_i} & \text{si } \omega \in \cup \bar{A}_i \\ z & \text{sinon} \end{cases}$$ est un $\underline{\underline{F}}$-ta et la va $j_{\bar{T}}$

est $F_{j_{\bar{T}}}$ mesurable car $\bar{\underline{\underline{F}}}_{\alpha_i} \subseteq \underline{\underline{F}}_z \; \forall i$

Soit maintenant une suite de ta étagés $\bar{T}_n$, qui décroit vers $\bar{T}$: $j_{\bar{T}_n}$ décroit vers $j_{\bar{T}}$, qui est donc un $\bar{\underline{\underline{F}}}$ ta et la propriété de mesurabilité est conservée, par suite de la continuité à droite des tribus $\underline{\underline{F}}_t$.

Il reste à montrer b) : Soit $\bar{S}_n$ une suite de $\bar{\underline{\underline{F}}}$ ta annonçant $\bar{T}$, $i(\bar{T}) = \lim\limits_{n \to \infty} j_{\bar{S}_n}$ est un $\underline{\underline{F}}$ ta et $\bar{T} = \lim \bar{S}_n$ est donc $= \underline{\underline{F}}_{i_{\bar{T}}}$ - mesurable.

Supposons maintenant que $\bar{S}_{\bar{T}} = o$, $\bar{T}$ est alors point d'accumulation de points de croissance à gauche de j sur $\{\bar{T} \leqslant \bar{z}\}$, ce qui entraîne que $j_{\bar{S}_n} < i_{\bar{T}}$ et $i_{\bar{T}} = \lim j_{\bar{S}_n}$ sur l'ensemble $\{\bar{T} \leqslant \bar{z}\} \cap \{\bar{T} < \infty\}$

qui d'après l'égalité (11) contient $\{i(\bar{T}) < \infty\}$. Ceci prouve le résultat énoncé.

Corollaire 3 :

Si Y_t est un processus $\underline{\underline{F}}$ adapté, $\sum\limits_n Y_{T_n} 1_{]B_{T_n}, C_{T_n}]}(t)$ est $\bar{\underline{\underline{F}}}$ prévisible, et $\sum\limits_n Y_{T_n} 1_{[B_{T_n}, C_{T_n}[}(t)$ est $\bar{\underline{\underline{F}}}$ optionnel.

En effet, d'après la relation (12) si $A \in \underline{\underline{F}}_{T_n}$

$A \cap \{B_{T_n} < s\} = A \cap \{T_n < j(s)\} \in \bar{\underline{\underline{F}}}_s$. Donc Y_{T_n} est $\bar{\underline{\underline{F}}}_{B_{T_n}}$ mesurable.

Corollaire 4 :

a) Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une v.a. $\bar{T}$ $\bar{\underline{\underline{F}}}_\infty$ mesurable soit un $\bar{\underline{\underline{F}}}$ t.a. est que $j_{\bar{T}}$ soit un $\underline{\underline{F}}$ t.a. et que $\bar{T}$ soit $\underline{\underline{F}}_{j_{\bar{T}}}$ mesurable.

b) Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une v.a. $\bar{T}$, $\bar{\underline{\underline{F}}}_\infty$ mesurable, inférieure à $\bar{z}$, soit un $\bar{\underline{\underline{F}}}$ t.a. prévisible est que :

1) $i_{\bar{T}}$ soit un $\underline{\underline{F}}$-t.a., tel que $\bar{T}$ soit $\underline{\underline{F}}_{i_{\bar{T}}}$ mesurable.

2) le t.a. S défini par $i_{\bar{T}}$ si $\bar{\ell}_T = \bar{T} \wedge \bar{z}$, z si $\bar{\ell}_T < T \wedge \bar{z}$ est $\underline{\underline{F}}$-prévisible.

Démonstration :

Les conditions nécessaires résultent immédiatement de la proposition 2. Etablissons les conditions suffisantes.

a) On a $1_{\{\bar{T}\leq t\}} = 1_{\{j_{\bar{T}}\leq t\}}\, 1_{\{\bar{R}_{\bar{T}}=o\}} + \sum_n 1_{\{\bar{T}\leq t\}}\, 1_{]B_{T_n},\, C_{T_n}[}(\bar{T})$

et d'après le corollaire 3, le processus $1_{\{\bar{T}\leq t\}}$ est $\underline{\underline{F}}$ optionnel.

b) Soit (U_n) une suite de $\underline{\underline{F}}$.t.a annonçant S . La suite C_{U_n} croit strictement vers $B_{i_{\bar{T}}}$ sur l'ensemble $\ell_{\bar{T}} = \bar{T}$, car alors $i_{\bar{T}}$ est point d'accumulation à gauche de points de M . Mais sur cet ensemble $B_{i_{\bar{T}}} = \bar{T}$. Par suite, la suite de $\bar{\underline{\underline{F}}}$.t.a C_{U_n} croit strictement vers $\bar{T}$ sur $\bar{\ell}_{\bar{T}} = \bar{T}$. Par ailleurs :

$$1\{\bar{\ell}_{\bar{T}} < \bar{T}\} = \sum_n 1\{B_{T_n} < \bar{T} \leq C_{T_n}\}$$

$$= \sum_n 1\{i_{\bar{T}} = \bar{T}_n\}\, 1\{B_{T_n} < \bar{T} \leq C_{T_n}\}$$

$\bar{T}$ étant $F_{i_{\bar{T}}}$ mesurable, il existe un processus optionnel Y F.q $Y_{i_{\bar{T}}} = \bar{T}$

Par suite le processus :

$1\{\bar{\ell}_{\bar{T}} < \bar{T} \leq t\} = \sum_n 1\{B_{T_n} < Y_{T_n} \leq C_{T_n}\}\, 1\{Y_{T_n} \leq t\}$ est $\bar{\underline{F}}$ prévisible,

d'après le corollaire 3, ce qui prouve que la v.a T_2, définie par $T_2 = \bar{T}$ si $\ell_{\bar{T}} < \bar{T}$, $= +\infty$ sinon, est un $\bar{\underline{\underline{F}}}$.t.a prévisible. Il existe donc une suite $(\bar{T}_n)$ qui annonce T_2, en croissant strictement vers $\bar{T}$ sur $\ell_{\bar{T}} < \bar{T}$ La suite $C_{U_n} 1\{\bar{\ell}_{\bar{T}} = \bar{T}\} + \bar{T}_n\, 1\{\bar{\ell}_{\bar{T}} < \bar{T}\}$ annonce donc $\bar{T}$ qui est bien $\bar{\underline{\underline{F}}}$ prévisible.

Corollaire 5 :

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une v.a $\bar{T}$ $\bar{\underline{\underline{F}}}_\infty$ mesurable, inférieure à $\bar{z}$ soit un $\bar{\underline{\underline{F}}}$.t.a totalement inacessible est que :

a) le graphe de $i_{\bar{T}}$ soit disjoint de tout graphe de temps d'arrêt $\underline{\underline{F}}$-prévisible.

b) $\{\ell_{\bar{T}} < \bar{T}\}$ est vide p.s.

Démonstration :

Il suffit d'établir la condition nécessaire b), le reste découlant de la caractérisation des F t.a. prévisibles du corollaire 4.

Or $1_{\{\ell_{\bar{T}} < \bar{T}\}} = \sum_n 1_{]B_{T_n}, C_{T_n}]}(\bar{T})$ et si $P\{\ell_{\bar{T}} < \bar{T}\} > o$,

il existe n tel que $P\{B_{T_n} < \bar{T} \leqslant C_{T_n}\} > o$; C_{T_n} étant $\bar{\underline{\underline{F}}}$-prévisible

on aurait aussi $P\{B_{T_n} < T < C_{T_n}\} > o$ et $U = T$ sur $\{B_{T_n} < T < C_{T_n}\}$

$+\infty$ sinon

serait un $\tilde{\underline{\underline{F}}}$ t.a. prévisible tel que $P(T = U) > o$,

car U est $\underline{\underline{F}}_{i_U}$-mesurable : en effet, $i_U = j_U = j_T$, sur $j_T < z$ et T est $\underline{\underline{F}}_{j_T}$-mesurable.

Théorème 6 :

Considérons un processus Z positif, $B(R^+)\otimes\bar{\underline{\underline{F}}}_\infty$ mesurable arrêté à z, défini pour $\{t = \infty\}$

a) Pour obtenir la projection $\bar{\underline{\underline{F}}}$-optionnelle de Z, $\overline{Z^\circ}$, on peut procéder de la manière suivante :

On construit le processus $y(\omega, t, u) = (Z_{(C_{t-u})\vee B_t})(\omega)$ si $t<z(\omega)$

$= Z_{(B_{t+u})\wedge C_t}$ si $t \geqslant z(\omega)$

puis on prend sa projection $\underline{\underline{F}}$ optionnelle, $y^\circ(\omega, t, u)$

Le processus $y^\circ(., j_t, R_t)1\{j_t<z\} + y^\circ(.j_t, t\wedge C_z - B_z)1\{t\wedge C_z \geqslant B_z\}$ est la projection $\bar{\underline{\underline{F}}}$ optionnelle de Z.

De plus, tout processus Z , $\underline{\underline{\bar{F}}}$ optionnel , nul sur $t \geq \bar{z}$, se représente à l'aide d'un unique processus y, $\underline{\underline{O}} \otimes B(R^+)$ - mesurable, nul si $t > z$, satisfaisant aux conditions suivantes :

Le processus $y(., t, o)$ est nul sur le complémentaire de R° enveloppe optionelle de l'ensemble $R = \{D_t = t \wedge z\}$, ainsi que sur $t \geq z$.

Le processus $y(\omega, t, u)$, pour $u > o$ est nul sur l'ensemble $\{(\omega, t) ; \Delta C_t(\omega) < u\}$

b) Pour obtenir la projection $\underline{\underline{\bar{F}}}$ prévisible, on procède de même : on forme le processus
$$X(\omega,t,u) = (Z_{C_{t_\wedge}(B_t+u)})(\omega) \quad \text{si } t \leq z(\omega)$$
$$= Z_{C_\infty}(\omega) \quad \text{si } t > z(\omega)$$

puis on prend ses projections $\underline{\underline{F}}$ optionnelle X° et $\underline{\underline{F}}$-prévisible X^p

Le processus $X^p(.i_t,o)\, 1\{\bar{S}_t = o\} + X^\circ(.i_t,\bar{S}_t)\, 1\{\bar{S}_t > o\}$

est la projection $\underline{\underline{\bar{F}}}$-prévisible de Z.

De plus, tout processus Z , $\underline{\underline{\bar{F}}}$ prévisible, nul si $t > \bar{z}$, se représente à l'aide d'un unique processus $B(R^+) \otimes \underline{\underline{F}}_z \otimes B(R^+)$ mesurable y satisfaisant aux conditions suivantes :

$y(.t,o)$ est $\underline{\underline{F}}$- prévisible, nul sur $\{\ell_t < t \wedge z\}$

$y(.t,u)$ est $\underline{\underline{F}}$-optionnel, nul sur $\{\Delta C_t \leq u\}$ si u est stricement positif.

<u>Démonstration</u> :

Remarquons tout d'abord qu'il suffit d'établir le théorème (sauf pour l'unicité) lorsque Z est de la forme $f(t \wedge \bar{z})M$, où $M \in b\underline{\underline{\bar{F}}}_\infty$ et $f \in bB(R^+)$, le théorème de classe monotone permettant alors de conclure.

Nous notons M_t la version cadlag de $E(M/\underline{\underline{F}}_t)$ et M_t^- sa version cag.

a) Le processus $y(\omega,t,u)$ vaut alors :

$$y(\omega\ t,u) = f(C_t - u \vee B_t)\ M \qquad \text{si} \quad t < z$$

$$= f(B_t + u_\Lambda C_t)\ M \qquad \text{si} \quad t \geq z$$

et $y^\circ(\omega,t,u) = f(C_t - u_\vee B_t)M_t\ 1\{t<z\} + f(B_t + u_\Lambda C_\infty)M\ 1\{t \geq z\}$

car $B_t\ 1\{t \geq z\}$, C_∞ et M sont $\underline{\underline{F}}_z$ mesurable. Plus précisément, il existe un processus que nous noterons M_t° tel que $M = M_z^\circ$

Le processus

$$y^\circ(\omega,j_t,\overline{R}_t) = f(C_{j_t} - \overline{R}_t \vee B_t)M_{j_t} = f(t\Lambda\overline{z})M_{j_t} \qquad \text{si} \quad j_t < z$$

$$y^\circ(\omega,j_t,t_\Lambda C_z - B_z) = f(B_{j_t} + (t_\Lambda C_z - B_z)_\Lambda\ C_\infty)M = f(t_\Lambda C_z)M \qquad \text{si} \quad j_t = z$$

est manifestement $\overline{\underline{\underline{F}}}$ - optionnel.

De plus si T est un $\overline{\underline{\underline{F}}}$ - t.a , $T\Lambda\overline{z}$ est $\underline{\underline{F}}_{j_t}$ mesurable.

$$E(T<+\infty f(T\Lambda\overline{z})M) = E[\,j_T<z\ ; f(T\Lambda z)M_{j_t}\,] + E[B_z\leq T<C_\infty ;\ f(t\Lambda\overline{z})M] + E[C\leq T<+\infty\ f(C_\infty)M]$$

$$= E[T<+\infty\quad y^\circ(\omega,j_t,\overline{R}_t)] \qquad \text{, où on convient que}$$

$\overline{R}_t = t\Lambda\overline{z} - B_z$ si $B_z \leq t < C_\infty$, ce qui prouve le résultat.

b) La projection $\overline{\underline{\underline{F}}}$ - prévisible du processus Z est égale à

$$f(t\Lambda\overline{z}) \lim_{s\uparrow t} M_{j_s}^\circ = f(t\Lambda\overline{z})\ M_{i_t}^p\ 1\{\overline{S}_t = o\} + f(t\Lambda\overline{z})M_{i_t}^\circ\ 1\{\overline{S}_t > o\} \qquad \text{si} \quad t \leq \overline{z}$$

$$= f(\overline{z})\ M \qquad \text{si } t > \overline{z}.$$

ce qui s'écrit encore

$$\overline{Z}_t^p = f(B_{i_t+o}\ \Lambda C_{i_t})M_{i_t}^p\ 1\{\overline{S}_t = o\} + f(B_{i_t} + \overline{S}_t \Lambda C_{i_t})M_{i_t}^\circ\ 1\{\overline{S}_t > o\} \qquad \text{si} \quad i_t \leq z$$

$$= f(C_z)M_z^\circ\ 1\{z < i_t\}$$

Le résultat sur la projection prévisible est alors établi.

c) Il reste à établir les résultats d'unicité.

Dans le cas optionnel, formons $(\omega,(C_t-u)\vee B_t)$ si $t < z$. C'est un processus de la forme $y[\omega,j_{B_t}, C_{j_{B_t}}-(C_t-u)\vee B_t]$ où y est $\underline{\underline{\mathcal{O}}}\otimes B(R^+)$ - mesurable.

Le processus $y(\omega,t,o)\, 1\{D_t=t\}\, 1\{u = o\} + y(\omega,j_{B_t}, u)\, 1\{\Delta C_t > u\}$ est égal à $1\{u = o\}1\{D_t = t\}\, Z(\omega,C_t) + 1\{\Delta C_t \geqslant u > o\}\, Z[\omega,C_t - u]$ et est unique, car si deux processus optionnels coïncident sur $\{D_t = t\}$ ils coïncident sur R° . Il satisfait aux conditions du théorème car

$$1\{C_{j_t}=t\}\, Z(\omega,C_{j_t})\, 1\{j_{C_{j_t}}=j_t\} + 1\{C_{j_t}>t\}\quad 1\{C_{j_t}>C_{j_t}-t+B_{j_t}\}Z(\omega,t)=Z(\omega,t)$$

si $j_t < z$

Si $t = z$ $\quad j_{B_{z+u\wedge C_z}} = z$ et $z(\omega,B_z+u\wedge C_z) = y^\circ(\omega,z,B_z + u\wedge C_z - B_z)$

De même la v.a. $y^\circ(\omega,z, u)\, 1\{\Delta C_z \geqslant u\}$ égale à $z(\omega,u + B_z)$ satisfait à $1\{j_t=z\}\, y^\circ(\omega,z,t\wedge\bar{z} - B_z)\, 1\{\Delta C_z \geqslant t\wedge\bar{z} - B_z\} = z(\omega,t)\, 1\{j_t = z\}$

La démonstration dans le cas prévisible est tout à fait analogue, bien que plus simple.

<u>Corollaire 7</u> :

a) Si T est un $\underline{\underline{\bar{F}}}$ t.a. les tribus $\underline{\underline{\bar{F}}}_{T\wedge\bar{z}}$ et $\underline{\underline{F}}_{j_T}$ sont égales

b) Si T est un $\underline{\underline{G}}$ t.a. les tribus $\underline{\underline{G}}_{T\wedge z}$ et $\underline{\underline{\bar{F}}}_{C_T}$ coïncident c.a.d. $\underline{\underline{G}}_T = \underline{\underline{F}}_{D_T}$.

<u>Démonstration</u> :

Tout élément de la tribu $\underline{\underline{F}}_{j_T}$ est de la forme Z_{j_T} où Z est optionnel arrêté à z , car $j_T \leqslant z.$, et tout élément de $\underline{\underline{\bar{F}}}_T$ est de la forme $y(\omega,j_T\, .C_{j_T}-T\wedge\bar{z})\, 1\{j_T < z\} + y(\omega,z,T\wedge\bar{z} - B_z)\, 1\{j_T \geqslant z\}$ v.a. qui est manifestement $\underline{\underline{F}}_{j_T}$ mesurable car $T\wedge\bar{z}$ est $\underline{\underline{F}}_{j_T}$ mesurable.

Corollaire 8 :

a) Si T est $\bar{\underline{\underline{F}}}$ t.a. prévisible, inférieur ou égal à $\bar{z}$, de graphe contenu dans $\{\bar{\ell}_T = T\}$ les tribus $\bar{\underline{\underline{F}}}_T^-$ est $\underline{\underline{F}}_{i_T}^-$ coïncident.

b) Si S est un $\underline{\underline{G}}$ t.a. prévisible inférieur ou égal à z de graphe contenu dans $\{\ell_T = T\}$, les tribus $\bar{\underline{\underline{F}}}_{B_S}^-$ et G_S^- coïncident, ce qui entraîne que $\underline{\underline{G}}_S^- = \underline{\underline{F}}_{\ell_S}$

Démonstration :

Si T est un $\bar{\underline{\underline{F}}}$ t.a. prévisible, tout élément de $\bar{\underline{\underline{F}}}_T^-$ est de la forme, $\bar{Z}_T$ où $\bar{Z} \in b\underline{\underline{\mathcal{P}}}$ si de plus $\{\bar{\ell}_T = T\wedge \bar{z}\}$, alors il existe $y \in b\underline{\underline{\mathcal{P}}}$. t.q. $\bar{Z}_T = y_{i_T}$

La tribu $\bar{\underline{\underline{F}}}_T^-$ est donc incluse dans $\underline{\underline{F}}_{i_T}^-$

La réciproque est évidente.

Remarque :

On a toujours $\bar{\underline{\underline{F}}}_T^- \subseteq \underline{\underline{F}}_{i_T}$ si T est un $\bar{\underline{\underline{F}}}$.t.a. prévisible.

Projection duale des mesures dont le support est inclus dans l'ensemble $\{\bar{S}_t > o\}$ ou $\{\bar{R}_t > o\}$

Nous nous intéressons maintenant aux projections duales des processus croissants par rapport aux tribus $\bar{\underline{\underline{F}}}_t$.

Tous les processus considérés satisfaisant à $\bar{K}_{\bar{z}} = \bar{K}_{\bar{z}}^- = \bar{K}_\infty$

Dans un premier théorème, nous étudierons les projections prévisibles (resp. optionnelles) des processus croissants dont le support est inclus dans $\{\bar{\ell}_s = s\wedge\bar{z}\}$ (resp. $\bar{D}_s = s\wedge\bar{z}$).

Théorème 9 :

a) Si $\overline{K}_t$ est un processus croissant, satisfaisant à $\overline{K}_{\bar{z}} = \overline{K}_\infty$ $\overline{K}_o = o$, qui ne croit que sur l'ensemble $\{\overline{\ell}_S = S\} = \overline{G}$, la projection duale $\overline{\underline{\underline{F}}}$-prévisible de $\overline{K}$, notée ${}^p\overline{K}$ s'obtient de la manière suivante : on regarde le processus croissant $K_t = \overline{K}_{C_t}$ qui satisfait identiquement à $K_t = K_{D_t}$ (cf. (33)) . Sa projection duale $\underline{\underline{F}}$-prévisible, ${}^pK_t$, satisfait à la même relation. Le processus croissant ${}^pK_{j_t}$ est alors égal au processus ${}^pK_{i_t}$. Il est donc $\overline{\underline{\underline{F}}}$-prévisible et c'est la projection prévisible duale de $\overline{K}_t$.

b) Si $\overline{K}_t$ ne croit que sur l'ensemble $\{\overline{D}_t = t\}$, on regarde le processus croissant continu à gauche $\overline{K}_{B_t^-}$. Appelant K , le processus rendu continu à droite, et ${}^\circ K$ sa projection optionnelle, on vérifie que ${}^\circ K_{t^-} = {}^\circ K_{\ell_t^-}$. Le processus ${}^\circ K_{i_t^-}$, égal à ${}^\circ K_{j_t^-}$, rendu continu à droite est la projection duale $\overline{\underline{\underline{F}}}$ - optionnelle de $\overline{K}$.

Démonstration :

a) La projection $\underbrace{}_{\text{duale}}$ $\overline{\underline{\underline{F}}}$ prévisible $\underbrace{}_{\text{d'un processus croissant } \overline{K}}$ est l'unique processus croissant $\overline{\underline{\underline{F}}}$ prévisible, ${}^p\overline{K}$, satisfaisant pour tout $\overline{\underline{\underline{F}}}$.t.a. $\overline{T}$, à

$$E(\overline{K}_\infty - \overline{K}_{\overline{T}}) = E({}^p\overline{K}_\infty - {}^p\overline{K}_{\overline{T}})$$

Or $\overline{K}_{\overline{T}} = \overline{K}_{\overline{D}_{\overline{T}}} = \overline{K}_{C_{j_{\overline{T}}}}$, à cause de l'hypothèse sur le support de $\overline{K}$

$$E(\overline{K}_\infty - \overline{K}_{\overline{T}}) = E\,(\overline{K}_\infty - \overline{K}_{C_{j(\overline{T})}}) = E(K_\infty - K_{j(\overline{T})}) \quad \text{où } K_t = \overline{K}_{C_t}$$

$j(\overline{T})$ est un $\underline{\underline{F}}$.t.a., par suite, $= E({}^pK_\infty - {}^pK_{j_T})$

or $K_t = \overline{K}_{C_t} = \overline{K}_{C_{j_{C_t}}} = \overline{K}_{C_{D_t}} = K_{D_t}$

D_t étant un $\underline{\underline{F}}$.t.a. , on a encore ${}^pK_t = {}^pK_{D_t}$, car $E\int_{]t.D_t]} d^pK_S = E\int_{]t.D_t]} dK_S = 0$

et ${}^pK_{j_t} = {}^pK_{j_{C_{j_t}}} = {}^pK_{j_{C_{i_t}}} = {}^pK_{i_t}$ car $t \leq C_{i_t} \leq C_{j_t}$

Le processus ${}^pK_{j_t} = {}^pK_{i_t}$ est donc $\overline{\underline{\underline{F}}}$-prévisible, et satisfait à

$$E(\overline{K}_\infty - \overline{K}_{\overline{T}}) = E({}^pK_{j_\infty} - {}^pK_{j_{\overline{T}}}).$$

b) La projection $\underline{\underline{\bar{F}}}$ optionnelle duale d'un processus croissant est l'unique processus croissant $\underline{\underline{\bar{F}}}$-adapté satisfaisant pour tout $\underline{\underline{\bar{F}}}$.t.a. , $\bar{T}$, à :

$$E(\bar{K}_\infty - \bar{K}_{\bar{T}}^-) = E(°\bar{K}_\infty - °\bar{K}_{\bar{T}}^-)$$

Or d'après l'hypothèse faite sur les supports $\bar{K}_t^- = \bar{K}_{\bar{\ell}_t}^- = \bar{K}_{B_{i_t}}^- = \bar{K}_{B_{j_t}}^-$

car $B_{j_t} \leq t$ d'où $E(\bar{K}_\infty - \bar{K}_{\bar{T}}^-) = E(\bar{K}_\infty - \bar{K}_{B_{i(\bar{T})}}^-) = E(\bar{K}_\infty - \bar{K}_{B_{j(\bar{T})}}^-)$

Une difficulté certaine apparait ici, du fait que $i_{\bar{T}}$ n'est par un $\underline{\underline{F}}$.t.a. en général. Comme $i_{\bar{T}}$ est majoré par le $\underline{\underline{F}}$-temps d'arrêt $j_{\bar{T}}$, nous introduisons le temps d'arrêt S, défini comme le P-ess inf de tous les temps d'arrêt qui majorent i_T, le processus $1\{S \leq t\}$ est est alors manifestement la projection optionnelle de $1\{i_T \leq t\}$ et $E(\bar{K}_\infty - \bar{K}_{B_{i_{\bar{T}}}}^-) = E(\bar{K}_\infty - \bar{K}_{B_S}^-) = E(\bar{K}_\infty - \bar{K}_{B_{j_{\bar{T}}}}^-)$.

Notons $°H$ la projection duale optionnelle du processus croissant H, défini par $H_t^- = \bar{K}_{B_t}^-$

$$E(\bar{K}_\infty - \bar{K}_{B_{i_{\bar{T}}}}^-) = E(°H_\infty - °H_S^-) = E(°H_\infty - °H_{j_{\bar{T}}}^-) = E(°H_\infty - °H_{i_{\bar{T}}}^-)$$

car $\{S \leq t\}$ est la projection optionnelle de $\{i_T \leq t\}$.

Le processus croissant $°\bar{K}$ défini par $°\bar{K}_t^- = °H_{i_t}$ est alors la projection duale $\underline{\underline{\bar{F}}}$-optionnelle de $\bar{K}$ et satisfait manifestement à $°\bar{K}_{\ell_t}^- = °\bar{K}_t^-$

Il reste à étudier les projections des processus croissants, dont les mesures associées ont un support inclus dans $\{\bar{\ell}_t < t \wedge \bar{z}\}$ ou $\{\bar{D}_t > t \wedge \bar{z}\}$.

<u>Théorème 10</u> :

a) Si $\bar{K}_t$ est un processus croissant, satisfaisant à $\bar{K}_{\bar{z}}^- = \bar{K}_\infty$ et $\bar{K}_0 = 0$, qui ne croit que sur l'ensemble $\{\bar{\ell} < \wedge \bar{z}\}$

On considère les processus croissants

$$K_t^u = \sum_n 1\{T_n \leq t\} (\bar{K}_{C_{T_n \wedge u}} - \bar{K}_{B_{T_n \wedge u}}).$$

Les projections optionnelles des processus $(K_{C_{t\wedge u}} - K_{B_{t\wedge u}})$ permettent de définir une mesure de transition $N(\omega,t,du)$ de $\underline{\underline{\mathcal{O}}}$ vers $B(R^+)$ de support contenu dans $]\!] B_t, C_t]\!]$ telle que les processus

$\sum_n 1\{T_n \leq t\}\, N(\omega, T_n,]o,u])$ soient les projections optionnelles duales de K_t^u. La projection duale prévisible de $\bar{K}_t$ est alors égale à

$$^{P}\bar{K}_t = \sum_n N[\omega, T_n,]B_{T_{n\wedge t}}, C_{T_{n\wedge t}}]]$$

b) De même pour le cas optionnel, si $\bar{K}$ ne charge que $\{\bar{D}_t > t\wedge\bar{z}\}$ $H_t^{u-} = \sum_n 1\{T_n < t\}\, (\bar{K}^-_{C_{T_{n\wedge u}}} - \bar{K}^-_{B_{T_{n\wedge u}}})$, admet une projection duale $\underline{\underline{F}}$-optionnelle définie par $\sum_n 1\{T_n < t\}\, N(\omega, T_n,]o,u])$, où N est une transition de $\underline{\underline{O}}$ vers $B(R^+)$ de support inclus dans $[B_t, C_t[$

Le processus $^{o}\bar{K}_t^-$ est alors égal à

$$^{o}\bar{K}_t^- = \sum_n N(\omega, T_n, [B_{T_{n\wedge t}}, C_{T_{n\wedge t}}[)$$

Démonstration :

Tous les processus prévisibles sur $\{\bar{I}_t < t\wedge\bar{z}\}$ sont de la forme

$$\bar{Z}_t = \sum_n 1_{]B_{T_n}, C_{T_n}]}\, Z(\omega, T_n, t - B_{T_n}) \quad \text{où } Z \in \underline{\underline{O}}\otimes B(R^+)$$

Par suite si $\bar{\mu}_{\bar{K}}$ désigne la mesure sur les $\bar{\underline{\underline{F}}}$-prévisibles associées à $\bar{K}$, elle induit sur $\underline{\underline{O}}\otimes B(R^+)$ une mesure $\mu_{\bar{K}}$ définie par

$$\bar{\mu}_{\bar{K}}(Z) = \sum_n E\int Z(\omega, T_n, t - B_{T_n})\, 1_{]B_{T_n}, C_{T_n}]}(t)\, d\bar{K}_t = \mu_{\bar{K}}(Z)$$

Considérons pour u fixé, les mesures aléatoires

$$K_t^u = \sum_n 1\{T_n \leq t\}\, (K_{C_{T_{n\wedge u}}} - K_{B_{T_{n\wedge u}}})$$

T_n étant une suite de $\underline{\underline{F}}$.t.a. , la projection duale optionnelle de cette mesure est égale à $^{o}K_t^u = \sum_n 1\{T_n \leq t\}\, \Psi^u_{T_n}$

$$\text{ou} \quad \Psi_t^u = (K_{C_{t\wedge u}} - K_{B_{t\wedge u}})^{\bullet}.$$

Si u croit, les projections optionnelles sont croissantes et peuvent être choisies continues à droite ; on définit ainsi une mesure de transition de $\underline{\underline{O}}$ vers R^+, notée $N(t, \omega, du)$ satisfaisant à :

$E[\,N(T,\ \omega,\ f)\ ,\ T < +\infty\,] = E\int 1_{]B_T,\,C_T]}(u)\ f(u)\ dK_u$, si T est un $\underline{\underline{F}}$. t.a,

et même plus généralement si $Z \in \underline{\underline{\mathcal{O}}} \otimes B(R^+)$

$E(T < +\infty \int Z(T,\ \omega,\ u)\ N(T,\ \omega,\ du)) = E\{T < +\infty, \int Z(T,\omega,u)\ 1_{]B_T,\,C_T]}(u)\ dK_u$

En particulier,

Si $Z(s,\omega,u) = 1\{u \notin]B_s,\ C_s]\}$, il vient $E(T < +\infty \int 1_{]B_T,\,C_T]^c}(u)\ N(T,\omega,du) = 0$

$$\mu_{\bar{K}}(Z) = \sum_n E\int Z(\omega,\ T_n,\ t - B_{T_n})\ 1_{]B_{T_n},\,C_{T_n}]}(t)\ N(T_n,\ \omega,\ dt)$$

Le processus croissant, défini par ${}^{P}\bar{K}_t = \sum_s N[\,s,\omega,[\,o,t]\,]$

est associé à mesure $\bar{\mu}_{\bar{K}}$.

$$\text{Or}\quad {}^{P}\bar{K}_t = \sum_n 1_{]B_{T_n} < t \leqslant C_{T_n}]}\,[\,N(T_n,\omega,t) - N(T_n,\omega,\ B_{T_n})\,]$$

$$+ \sum_{T_n} 1\{C_{T_n} < t\}\ [\,N(T_n,\omega,C_{T_n}) - N(T_n,\omega,B_{T_n})\,]$$

est la somme de deux processus prévisibles. Il est prévisible et c'est la projection duale prévisible de $\bar{K}_t$.

b) Le cas optionnel se traite sensiblement de la même façon.

Si Z est un processus $\underline{\underline{F}}$-optionnel, nul sur $\bar{D}_t = t\wedge\bar{z}$, Z se représente de façon unique à l'aide d'un processus $y \in \underline{\underline{\mathcal{O}}} \otimes B(R^+)$

$$Z_t = y(\omega,\ j_t,\ \bar{R}_t)\ 1\{j_t < z\} + y(\omega,\ z,\ t\wedge z - B_z\}\ 1\{j_t = z\}$$

Si nous notons encore $\bar{\mu}_{\bar{K}}$, la mesure sur les processus $\underline{\underline{F}}$-optionnels associés à $\bar{K}$, c.à.d.

$$\bar{\mu}_{\bar{K}}(Z) = E(\sum_n \int y(\omega,\ T_n,\ C_{T_n} - t\}\ 1\{T_n < z\}\ dK_t\ 1\{B_{T_n} \leqslant t < C_{T_n}\}$$

$$+ E(\int y(\omega,\ z,\ t\wedge\bar{z} - B_z\}\ 1\{B_z \leqslant t < C_z\}\ dK_t$$

nous définissons ainsi sur $\underline{\underline{\mathcal{O}}} \otimes B(R^+)$ une mesure $\mu_{\bar{K}}$

u étant fixé, les processus $H_t^u = \sum_n 1\{T_n \leq t\}\, 1\{T_n < z\}\, (K^-_{C_{t\wedge u}} - K^-_{B_{t\wedge u}})$

$$+ 1\{z \leq t\}\, (K^-_{u\wedge z} - K_{Bz})$$

ont une projection duale optionnelle égale à

$${}^{o}H_t^u = \sum_n 1\{T_n \leq t\}\, 1\{T_n < z\}\ \Psi_t^u + 1\{z \leq t\}\ \bar{\Psi}_z^u$$

où $\Psi_t^u = (K^-_{C_{t\wedge u}} - K^-_{B_{t\wedge u}})^{\circ}$ et $\bar{\Psi}_z^u = (K^-_{u\wedge z} - K^-_{B_z})^{\circ}$

Le même procédé de régularisation permet de construire une transition de $\underline{\underline{O}}$ vers $B(R^+)$, $N(t, \omega, du)$, telle que $\Psi_t^u = N(t,\omega,[o,u[)$

On montre alors aimément que

$E(N(T, \omega, f), T < +\infty) = E \int 1_{[B_T(u) C_T[}\ f(u)\, dK_u$, pour tout $\underline{\underline{F}}$ t a T,

relation qui s'étend à tous les éléments de $\underline{\underline{O}} \otimes B(R^+)$ et qui permet d'établir que $N(t, \omega, du)$ a son support dans $[B_t, C_t[$ et que

$$\bar{\mu}_{\bar{K}}(Z) = \sum_n E \int Z(\omega, T_n, C_{T_n} - t\}\, 1\{B_{T_n} \leq t < C_{T_n}\}\, N(T_n, \omega, dt)$$

$$+ E \int Z(\omega, z, t\wedge z - B_z)\ 1\{B_z \leq t < C_z\}\ N(z, \omega, dt)$$

On conclut alors comme en a) en vérifiant que le processus

${}^{\circ}\bar{K}_t^{+} = \sum_s N(., s, [o, t])$ est continu à droite . Or il est égal à

$$= \sum_n 1\{B_{T_n} \leq t < C_{T_n}\}\ N(T_n, [B_{T_n}, t])$$

$$+ \sum_n 1\{C_{T_n} \leq t\}\ N(T_n, [B_{T_n}, C_{T_n}[)$$

Cette décomposition prouve donc qu'il est $\underline{\underline{F}}$-adapté.

III - Un exemple important.

La situation que nous allons décrire complète les travaux de B. MAISONNEUVE sur le balayage, dans une optique "théorie générale".

Considérons un fermé aléatoire M optionnel. On pose $L_t(\omega) = \sup \{s \leq t \;,\; (s, \omega) \in M\}$ $\quad L_t$ est fini p $\quad t$ fini.
C'est un processus croissant, $\underline{\underline{F}}$-adapté continu à droite, dont l'inverse à droite est $D_t = \inf \{s \;;\; L_s > t\} = \inf \{s > t \;;\; (\omega, s) \in M\}$

Les tribus $\underline{\underline{F}}_{D_t}$ sont encore notées $\underline{\underline{G}}_t$.

Nous pouvons établir tous les résultats de théorie générale par rapport aux tribus $\underline{\underline{G}}_t$ en utilisant l'étude précédente. Remarquons que

$$\begin{aligned} L_{D_t} &= D_t \qquad \text{si} \quad D_t < +\infty \\ &= L_\infty \qquad \text{si} \quad D_t = +\infty \end{aligned}$$

Les processus $\ell_t = \sup \{s < t \;,\; (s, \omega) \in M\}$ est continu à gauche et $L_t^- = \ell_t$. De même l'inverse à gauche de L_s est $D_t^- = \inf \{s \geq t \; (\omega, s) \in M\}$

Le processus $\ell_{D_t^-} = \sup \{s < D_t^- \;,\; (\omega, s) \in M\}$ est égal à ℓ_t car si $t < u < D_t^-$, $(\omega, u) \notin M$. On a donc $\overline{D}_t = D_{t \wedge L_\infty}$ et $\overline{\ell}_t = \ell_t$

L'ensemble $\{\overline{D}_t > t_\wedge L_\infty\}$ est alors égal à $\bigcup_s [\ell_s, L_s[\; = \bigcup_s [D_{\ell_s}^-, D_{\ell_s}[$

et l'ensemble $\{\ell_t < t\} = \bigcup_s]\ell_s, L_s]$

Les proposition 2 et corollaires 3, 4,5 s'énoncent alors ainsi.

Proposition 11 :

Soit T une v.a. $\underline{\underline{G}}_\infty$-mesurable, inférieure à L_∞

a) Une condition nécessaire et suffisante pour que T soit un $\underline{\underline{G}}$.t.a. est que D_T soit un $\underline{\underline{F}}$.t.a. et T soit $\underline{\underline{F}}_{D_T}$ - mesurable.

b) Une condition nécessaire et suffisante pour que T soit $\underline{\underline{G}}$.t.a. prévisible est que :

- D_T^- soit un $\underline{\underline{F}}$.t.a. et T soit $\underline{\underline{F}}_{D_T^-}$-mesurable

- le temps d'arrêt S , défini par $S = T$ si $\ell_T = T$, $+\infty$ sinon est $\underline{\underline{F}}$ prévisible.

c) Une condition nécessaire et suffisante pour que T soit un $\underline{\underline{G}}$.t.a. totalement inaccessible est que :

- l'ensemble $[\![T]\!]$ soit disjoint du graphe de tout temps d'arrêt F-prévisible.

- $\{\ell_T = T\}$ p.s.

Théorème 12 :

Soit Z un processus $B(R^+) \otimes \underline{\underline{\overline{F}}}_\infty$- mesurable, arrêté à L_∞, positif.

a) Pour obtenir la projection $\underline{\underline{G}}$-optionnelle de Z, on construit $y(\omega, t, u) = Z_{L_{t-u} \vee \ell_t}$, puis sa projection $\underline{\underline{F}}$-optionnelle $y°$

Le processus $y°(\omega, D_t, D_t - t) \, 1\{t < L_\infty\} + y°(\omega, L_\infty, t \wedge L_\infty - L_\infty) \, 1\{t \geq L_\infty\}$ est la projection $\underline{\underline{G}}$-optionnelle de Z .

De plus si Z est $\underline{\underline{G}}$-optionnel, nul si $t > L_\infty$, $Z(\omega, t) = y°(\omega, D_t , D_t - t)$. Le processus $\underline{\underline{F}}$- optionnel, $y°(\omega, t, o) \, 1_{R°}(t) + y°(\omega, t, u) \, 1\{L_t - \ell_t \geq u\}$ est unique.

b) Pour la projection $\underline{\underline{G}}$-prévisible, on forme $X(\omega,t,u) = Z_{(\ell_t+u) \wedge L_t}$ et on regarde sa projection $\underline{\underline{F}}$-prévisible X^p, sa projection $\underline{\underline{F}}$-optionnelle $X°$.

Le processus
$X^p(\omega,\ell_t,o)\ 1\{\ell_t = t\} + X^\circ(\omega,D_t^-,\ t - \ell_t)\ 1\{t > \ell_t\}$ est la projection.
$\underline{\underline{G}}$-prévisible de Z . Notons que il est $\underline{\underline{F}}$-adapté, et même $\underline{\underline{F}}$-prévisible si $\{\ell_t = t\}$

De plus, si Z est $\underline{\underline{G}}$-prévisible nul si $t > L_\infty$, le processus $X^p(\omega,t,o)\ 1\{\ell_t = t\} + X^\circ(\omega,t,u)\ 1\{L_t - \ell_t > u\}$ est unique.

Théorème 13 :

Soit K un processus croissant $\underline{\underline{G}}_\infty$-mesurable satisfaisant à $K_{L_\infty}^- = K_{L_\infty} = K_\infty$.

a) Si K a son support inclus dans l'ensemble $\{t = \ell_t\}$ alors K satisfait à $K_t = K_{D_{t\wedge L_\infty}} = K_{D_t}$ car $K_{L_\infty} = K_\infty$

$= K_{L_t}$ car $D_{L_t} \leq D_t$

La projection duale $\underline{\underline{G}}$-prévisible est alors égale à sa projection duale $\underline{\underline{F}}$-prévisible et est évidemment à support dans $\{t = \ell_t\}$

b) Si K ne croit que sur l'ensemble $\{t\wedge L_\infty = D_{t\wedge L_\infty}\}$
K satisfait à $K_t^- = K_{\ell_t}^- = K_{D_t}^- = K_{D_t^-}^-$ car $\ell_{D_t} \leq t$.

Sa projection duale $\underline{\underline{G}}$-optionnelle est alors identique à sa projection duale $\underline{\underline{F}}$-optionnelle et est évidemment à support dans $\{t\wedge L_\infty = D_{t\wedge L_\infty}\}$

c) Si K a sont support inclus dans $\{\ell_s < s\}$

On regarde la projection $\underline{\underline{F}}$-optionnelle du processus $[K_{L_{t\wedge u}} - K_{\ell_{t\wedge u}}]$ qui définit une mesure de transition de $\underline{\underline{\mathcal{O}}}$ vers $B(R^+)$, notée

$N(\omega,\ t,\ du)$ à support dans l'ensemble $]\ell_t,\ L_t]$

Le processus croissant $\sum_s 1\{\ell_s < L_s\} N(\omega, s,]\ell_{s\wedge t}, L_{s\wedge t}])$ est la projection duale $\underline{\underline{G}}$-prévisible de K.

d) Si K a son support inclus dans l'ensemble $\{D_{t\wedge L_\infty} > t\wedge L_\infty\}$ (soit encore $\{D_t > t\}$ puisque K ne charge pas $[L_\infty, +\infty[$)

On regarde la projection $\underline{\underline{F}}$-optionnelle du processus $(K^-_{L_{s\wedge u}} - K^-_{\ell_{s\wedge u}})$ qui est un processus croissant en u , continu à gauche permettant de définir une transition N^1 de $\underline{\underline{O}}$ vers $B(R^+)$ par $N^1(u, s, [o, u[= (K^-_{L_{s\wedge u}} - K^-_{\ell_{s\wedge u}})^\circ$ de support inclus dans $[\ell_s, L_s[$

La projection duale $\underline{\underline{G}}$-optionnelle de K est alors égale à

$$\overline{{}^\circ K}^-_t = \sum_s N(\omega, s, [\ell_{s\wedge t}, L_{s\wedge t}[.)$$

BIBLIOGRAPHIE

(1) C. DELLACHERIE : Capacités et processus stochastiques
Springer_Verlag 1972.

(2) N. EL KAROUI et P.A. MEYER :
Changement de temps en théorie générale
(ce volume.)

(3) B. MAISONNEUVE : Systèmes régénératifs.
Astérisque n° 15 . S.M.F. 1974

(4) B. MAISONNEUVE et P.A. MEYER :
Ensembles aléatoires markoviens homogènes
Séminaire de Probabilités de Strasbourg
Lectures Notes n° 381 .1974