SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

BERNARD MAISONNEUVE

Changement de temps d'un processus markovien additif

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 11 (1977), p. 529-538
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1977__11__529_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1976/77

CHANGEMENT DE TEMPS D'UN PROCESSUS MARKOVIEN ADDITIF

par B. Maisonneuve

Soit (X,S) un processus markovien additif (CINLAR [2]) dont la composante additive S est positive, et soit $C_t = \inf\{r : S_r > t\}$. Dans son article [4], CINLAR exprime la loi du quadruplet

$$Z_t = (X_{C_t -},\ t-S_{C_t -}\ ,\ X_{C_t}\ ,\ S_{C_t} - t\ )$$

en fonction d'un système de Lévy de (X,S) et du potentiel de (X,S).

Nous nous proposons d'abord de donner une démonstration simplifiée des résultats de CINLAR. Nous montrerons ensuite que les processus markoviens additifs fournissent des exemples de systèmes régénératifs (dans un sens légérement élargi) et nous en tirerons la conséquence suivante : si l'ensemble aléatoire $S_{\mathbb{R}_+}$ est p.s. sans point isolé, le processus $(X_{C_t}, S_{C_t} - t)$ est fortement markovien ; lorsque S est une fonctionnelle additive continue du processus X, la composante $S_{C_t} - t$ est nulle si $C_t < \infty$, et on retrouve un résultat connu, à savoir que le processus (X_{C_t}) est fortement markovien. Le paragraphe III est consacré à quelques formules concernant les subordinateurs, et est traité de manière indépendante du reste.

I. DEFINITIONS . HYPOTHESES

1. Soit $(X,S) = (\Omega, \underline{\underline{M}}, \underline{\underline{M}}_t, X_t, S_t, \theta_t, P^x)$ un processus markovien additif (P.M.A.) au sens de CINLAR [2]. On suppose que $X = (\Omega, \underline{\underline{M}}, \underline{\underline{M}}_t, X_t, \theta_t, P^x)$ est un processus de Hunt, à valeurs dans un espace E et à durée de vie infinie. La famille $(\underline{\underline{M}}_t)$ peut être plus grosse que la famille naturelle (dûment complétée) du processus (X_t). On suppose que la quasi-continuité à gauche de X a lieu pour les temps d'arrêt de la famille $(\underline{\underline{M}}_t)$. S est une fonctionnelle additive parfaite à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ et adaptée à $(\underline{\underline{M}}_t)$. Pour tout temps d'arrêt T de $(\underline{\underline{M}}_t)$, tout $t \in \mathbb{R}_+$, toute fonction borélienne positive f sur $E \times \overline{\mathbb{R}}_+$ et tout $x \in E$ on suppose que l'on a

$$E^x[\ f(X_t, S_t) \circ \theta_T \mid \underline{\underline{M}}_T\ ] = E^{X_T}[f(X_t, S_t)] \text{ sur } \{T < \infty\}$$

égalité qui reste vraie si l'on remplace $f(X_t, S_t)$ par une fonction de toute la trajectoire du processus $(X_t, S_t)_{t \geq 0}$.

2. Nous supposerons que le processus S est quasi-continu à gauche par rapport à la famille $(\underline{\underline{M}}_t)$. D'après CINLAR [3], il existe alors un <u>système de Lévy</u> (H,L) pour le P.M.A. $(X,S)^{(*)}$: H est une fonctionnelle additive continue de X (i.e. adaptée à la famille de tribus $(\underline{\underline{F}}_t)$ associée au processus X seul), et L est un noyau de E dans $E\times\overline{\mathbb{R}}_+$; pour toute fonction F borélienne positive sur $E\times\mathbb{R}_+\times E\times\overline{\mathbb{R}}_+$ on a, en posant $J=\{t>0 : X_{t-}\neq X_t \text{ ou } S_{t-}\neq S_t\}$

$$(1)\qquad E^x\Big[\sum_{\substack{s\in J\\ s\leq t}} F(X_{s-},S_{s-},X_s,S_s) \Big]$$

$$= E^x\Big[\int_0^t dH_s \int_{E\times]0,\infty]} L(X_s,dz,du)F(X_s,S_s,z,S_s+u) \Big]$$

Dans cette égalité nous avons posé $F(y,u,y',u')=0$ si $u=+\infty$. D'une manière générale, les fonctions f sur $E\times\mathbb{R}_+$ considérées par la suite seront étendues à $E\times\overline{\mathbb{R}}_+$ en posant $f(y,u)=0$ si $u=+\infty$.

3. Soit A la partie <u>continue</u> de S. D'après CINLAR [3], A est une fonctionnelle additive de X. Quitte à remplacer H_t par H_t+A_t+t et à modifier le noyau L, nous pouvons supposer que $A\underline{\leq}H$, donc que $dA_t=a(X_t)dH_t$ où a est une fonction borélienne sur E comprise entre 0 et 1. Quitte ensuite à effectuer le changement de temps strictement croissant $\tau_t=H_t^{-1}$ sur le processus (X,S), on peut supposer que $H_t=t$. Ce changement de temps n'affecte pas le quadruplet

$$(X_{C_t-}\ ,\ S_{C_t-}\ ,\ X_{C_t}\ ,\ S_{C_t})$$

où $C_t=\inf\{r : S_r>t\}$, et où par convention $X_{\infty-} = X_\infty = \partial$, ∂ étant un point hors de E. Nous poserons $E_\partial = E\cup\{\partial\}$.

4. Pour en finir avec les notations, nous définissons le <u>potentiel</u> de (X,S) :

$$U(x,f) = E^x\Big[\int_0^\infty f(X_t,S_t)dt \Big] ,\ x\in E$$

pour toute fonction f borélienne positive sur $E\times\mathbb{R}_+$ (rappelons que par convention $f(x,+\infty)=0$). Pour $t=+\infty$ la formule (1) peut donc s'écrire

$$(2)\qquad E^x\Big[\Sigma_{s\in J} F(X_{s-},S_{s-},X_s,S_s)\Big]$$

$$= \int_{E\times\mathbb{R}_+} U(x,dy,ds)\int_{E\times]0,\infty]} L(y,dz,du)F(y,s,z,s+u).$$

(*) On trouvera en appendice une nouvelle démonstration de ce résultat.

II. LOI DU QUADRUPLET $Z_t=(X_{C_t-},t-S_{C_t-},X_{C_t},S_{C_t}-t)$.

<u>Proposition 1</u> . <u>Pour tout</u> $x\in E$, <u>tout</u> $t\geq 0$ <u>et toute fonction borélienne positive</u> f <u>sur</u> $E\times\mathbb{R}_+\times E\times\overline{\mathbb{R}}_+$ <u>on a</u>

$$(3)\quad E^x[f(Z_t)I_{\{S_{C_t}>t\}}] =$$
$$= \int_{E\times[0,t]} U(x,dy,ds)\int_{E\times]t-s,\infty]} L(y,dz,du)f(y,t-s,z,s+u-t)$$

<u>Démonstration</u>. Sur $\{S_{C_t}>t\}$ on a $C_t>0$, car $S_0=0$, et on a aussi $C_t<\infty$, de sorte que le premier membre de (3) est bien défini. On a

$$f(Z_t)I_{\{S_{C_t}>t\}} = \sum_{s\in J} f(X_{s-},t-S_{s-},X_s,S_s-t)I_{\{S_{s-}\leq t,S_s>t\}} \ .$$

En effet, tous les termes de la sommation sont nuls, sauf si $S_{s-}\leq t$ et $S_s>t$, c'est à dire si $s=C_t$ et si $S_{C_t}>t$. L'égalité (3) n'est autre que l'égalité (2) écrite pour $F(y,s,y',s')=f(y,t-s,y',s'-t)I_{\{s\leq t,s'>t\}}$.

C.Q.F.D.

<u>Remarque</u>. Le même argument permet d'établir que

$$E^x[f(Z_t)I_{\{S_{C_t-}<t\}}]=\int_{E\times[0,t[}U(x,dy,ds)\int_{E\times[t-s,\infty]}L(y,dz,du)f(y,t-s,z,s+u-t)$$

(on convient que $f(y,s,\partial,s')=0$, de sorte que $f(Z_t)=0$ si $C_t=+\infty$).

Au paragraphe III nous déduirons de la proposition 1 quelques formules concernant les subordinateurs. La proposition 2 qui suit renseigne sur ce qui se passe sur l'ensemble $\{S_{C_t}=t\}$. Rappelons que a désigne la densité de $A=S^c$ par rapport à $(H_t)=(t)$.

<u>Proposition</u> 2. <u>Soit</u> x <u>un point de</u> E.

1) <u>Pour toute fonction</u> g <u>positive bornée sur</u> E, <u>la mesure</u> $U(x,ag,.)$ (c'est à dire l'application $B\mapsto\int U(x,dy,dt)a(y)g(y)I_B(t)$) <u>est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et admet pour densité</u>

$$(4)\quad u_t(x,g) = E^x[g(X_{C_t})I_{\{S_{C_t}=t\}}] \qquad (g(\partial)=0) \ .$$

2) <u>Pour presque tout</u> t (au sens de Lebesgue) <u>on a</u> $X_{C_t-}=X_{C_t}\in\{a>0\}\cup\{\partial\}$ <u>et</u> $S_{C_t-}=t$ P^x-<u>p.s. sur l'ensemble</u> $\{S_{C_t}=t\}$.

<u>Démonstration</u> . Soit G une fonction positive sur $E\times E$ et soit h une fonction positive sur $\mathbb{R}_+$. On a

$$\int_0^\infty a(X_s)G(X_s,X_s)h(S_s)ds = \int_0^\infty G(X_{s-},X_s)h(S_s)dA_s$$
$$= \int_0^\infty G(X_{s-},X_s)h(S_s)I_{\{\Delta S_s=0\}}dS_s \quad (\Delta S_s=S_s-S_{s-})$$
$$= \int_{S_0}^{S_\infty} G(X_{C_t-},X_{C_t})h(S_{C_t})I_{\{\Delta S_{C_t}=0\}}dt \ .$$

Dans cette dernière intégrale on peut remplacer S_∞ par $+\infty$ car $C_t=+\infty$ pour $t\geqq S_\infty$ et $G(\partial,\partial)=0$ par convention ; on peut aussi remplacer la condition $\Delta S_{C_t}=0$ par $S_{C_t}=t$, car il n'y a qu'un ensemble dénombrable de t pour lesquels les deux conditions diffèrent. D'autre part $S_0=0$, donc en prenant les espérances des membres extrêmes, il vient

$$(5)\quad \int_{E\times\mathbb{R}_+} U(x,dy,dt)a(y)G(y,y)h(t)=\int_0^\infty h(t)dtE^x[G(X_{C_t-},X_{C_t})I_{\{S_{C_t}=t\}}]$$

En prenant $G(y,y')=g(y')$ dans (5), on trouve que $U(x,ag,dt)=u_t(x,g)dt$ Il résulte aussi de (5) que, pour presque tout t, $X_{C_t-}=X_{C_t}\in\{a>0\}\cup\{\partial\}$ P^x-p.s. sur $\{S_{C_t}=t\}$. On a aussi, pour presque tout t, $S_{C_t-}=t$ P^x-p.s. sur $\{S_{C_t}=t\}$ à cause du théorème de Fubini et du fait que $\{\,t : S_{C_t-}<t,\ S_{C_t}=t\}$ est dénombrable. C.Q.F.D.

Des propositions 1 et 2 découle le théorème suivant, qui constitue le résultat principal de CINLAR [4].

<u>Théorème</u> 1. <u>Pour tout</u> $x\in E$, <u>on a pour presque tout</u> $t\geqq 0$ <u>et toute fonction</u> f <u>borélienne positive sur</u> $E\times\mathbb{R}_+\times E\times\overline{\mathbb{R}}_+$

$$(6)\quad E^x[f(Z_t)] = \int_{\{a>0\}} u_t(x,dy)f(y,0,y,0) + \int_{E\times[0,t[} U(x,dy,ds)\int_{E\times]t-s,\infty]} L(y,dz,du)f(y,t-s,z,s+u-t)$$

<u>De plus cette égalité vaut pour tout</u> t <u>si</u> $f(.,.,.,0)\equiv 0$.

<u>Démonstration</u>. D'après la proposition 2 on a pour presque tout t

$$E^x[f(Z_t)I_{\{S_{C_t}=t\}}] = E^x[f(X_{C_t},0,X_{C_t},0)I_{\{a>0\}}(X_{C_t})I_{\{S_{C_t}=t\}}]$$
$$= \int_{\{a>0\}} u_t(x,dy)f(y,0,y,0)\ .$$

L'égalité (6) résulte alors de la proposition 1. Si $f(.,.,.,0)\equiv 0$ $E^x[f(Z_t)]=E^x[f(Z_t)I_{\{S_{C_t}>t\}}]$ et d'après la proposition 1 l'égalité (6) a lieu pour tout t. C.Q.F.D.

Nous prions le lecteur de se reporter à l'article de CINLAR pour la question"from almost all to all", à laquelle est fournie une réponse dans certains cas particuliers.

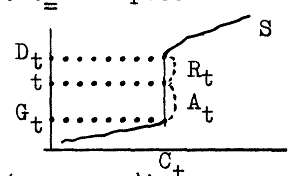
III. SUBORDINATEURS

Lorsque la composante S du processus (X,S) est croissante et que sa composante X est constante, le processus S est un processus à accroissements indépendants et positifs, c'est à dire un subordinateur. Les formules que nous allons présenter ici pour les subordinateurs découlent immédiatement de la proposition 1 précédente ou de la proposition (5.4) de [9]. Nous préférons en donner une démonstration directe, étant donnée la simplicité de celle-ci.

Soit donc S un subordinateur défini sur un espace $(\Omega,\underline{\underline{F}},P)$. On suppose que $S_0=0$ et que S n'est pas identiquement nul. On note λ la mesure de Lévy de S et U le potentiel de S : $Uf = E[\int_0^\infty f(S_t)dt]$ ($f\geq 0$, $f(+\infty)=0$). On note M le fermé droit aléatoire $S_{\mathbb{R}_+}$ et pour tout $t\geq 0$ on pose

$$D_t = \inf\{s>t \ : \ s\in M\}\ , \quad R_t=D_t-t$$

$$G_t = \sup\{s\leq t \ : \ s\in M\}\ , \quad A_t=t-G_t$$



Avec la même notation C_t que précédemment ($C_t=\inf\{u \ : \ S_u>t\}$), on a $D_t=S_{C_t}$ si $C_t<\infty$, donc p.s. (car $S_\infty = +\infty$ p.s.) et $G_t=S_{C_t-}$ si $R_t>0$, tandis que $G_t=t$ si $R_t=0$. La distribution du couple (A_t,R_t) est fournie par le théorème suivant.

<u>Théorème</u> 2. <u>Pour tout</u> $t\geq 0$ <u>et toute fonction</u> f <u>borélienne positive sur</u> $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$

$$(7)\qquad E[f(A_t,R_t)] = f(0,0)\Big(1-\int_{[0,t]}U(ds)\lambda(]t-s,\infty])\Big) + \int_{[0,t]}U(ds)\int_{]t-s,\infty]}\lambda(du)f(t-s,s+u-t)\ .$$

<u>Démonstration</u>. Sur l'ensemble $\{S_{C_t}>t\}$, C_t est un instant de saut de S : c'est l'instant s tel que $S_{s-}\leq t$ et $S_s>t$. Par suite (c'est l'argument de la proposition 1)

$$E[f(A_t,R_t)I_{\{R_t>0\}}] = E[f(t-S_{C_t-},S_{C_t}-t)I_{\{S_{C_t}>t\}}]$$

$$= E[\sum_s f(t-S_{s-},S_s-t)I_{\{S_{s-}\leq t,\,S_s>t\}}]$$

$$= E[\int_0^\infty ds\int_{]0,\infty]}\lambda(du)f(t-S_s,S_s+u-t)I_{\{S_s\leq t,\,S_s+u>t\}}]$$

$$= \int_{[0,t]} U(ds) \int_{]t-s,\infty]} \lambda(du) f(t-s, s+u-t).$$

Pour $f\equiv 1$ cette égalité montre que

(8) $$P\{R_t=0\} = 1 - \int_{[0,t[} U(ds)\lambda(]t-s,\infty]) .$$

On en déduit (7), en remarquant que $A_t=0$ p.s. sur $\{R_t=0\}$.

L'argument précédent fournit une démonstration rapide de la formule (8), qui figure dans le travail de MEYER sur le problème de convolution de CHUNG [10] . En prenant dans le théorème 2 une fonction f ne dépendant que de la première variable, on obtient aussi le résultat suivant, dû à HOROWITZ [6] :

<u>Corollaire</u> 1 . <u>Pour tout</u> $t\geq 0$ <u>et toute fonction</u> f <u>borélienne positive sur</u> $\mathbb{R}_+$ <u>on a</u>

(8) $$E[f(A_t)] = f(0)(1-\int_{[0,t]} U(ds)\lambda(]t-s,\infty]) + \int_{[0,t]} U(ds) f(t-s)\lambda(]t-s,\infty]).$$

Enfin, de (7) on déduit facilement la formule de KINGMAN exprimant l'intégrale

$$\int_0^{\infty} e^{-qt} E[e^{-aA_t - rR_t}]dt \qquad (a,r,q > 0)$$

en fonction uniquement de la transformée de Laplace de S_1 (voir [7] ; voir également GETOOR [5] pour une démonstration plus probabiliste de cette formule).

IV. PROCESSUS MARKOVIENS ADDITIFS ET SYSTEMES REGENERATIFS

Revenons à la situation générale d'un P.M.A. (X,S) dont la composante S est croissante. Nous utiliserons les notations du paragraphe I, ainsi que les notations $M=S_{\mathbb{R}_+}$, D_t, R_t du paragraphe III. Nous poserons aussi

$$\hat{X}_t = (X_{C_t}, R_t) \quad , \quad \hat{E} = (E\times\mathbb{R}_+)\cup(E_\partial\times\{+\infty\})$$

Le processus $\hat{X}$ prend ses valeurs dans $\hat{E}$. On a alors le résultat suivant:

<u>Théorème</u> 3 . <u>Si l'ensemble</u> M <u>est p.s. sans point isolé</u>, <u>les noyaux</u> $\hat{P}_t$ <u>définis sur</u> $\hat{E}$ <u>par</u>

$$\hat{P}_t((x,r),f) = f(x,r-t) \quad \underline{\text{si}}\ t<r \quad , \quad \hat{P}_t((x,r),f) = E^x[f(\hat{X}_{t-r})] \ \underline{\text{si}}\ t\geq r$$

<u>forment un semi-groupe de Markov et le processus</u> $\hat{X}$ <u>est fortement markovien relativement à la famille</u> $(\underline{\underline{M}}_{C_t})$ <u>et au semi-groupe</u> $(\hat{P}_t)$, <u>pour chaque mesure</u> P^x.

<u>Remarque</u>. L'hypothèse " M est p.s. sans point isolé" est satisfaite si le processus S est continu. Alors $S_{C_t}=t$ si $C_t<\infty$ et le théorème précédent se réduit au caractère fortement markovien du processus changé de temps (X_{C_t}). L'hypothèse est également satisfaite si S est strictement croissant sur $[0,C_\infty[$. On peut aussi avoir un mélange de ces deux situations.

<u>Démonstration</u>. Rappelons d'abord que si S est continu on a $C_{t+s} = C_t + C_s \circ \theta_{C_t}$ sur $\{C_t<\infty\}$ (ce qui implique $X_{C_{t+s}} = X_{C_s}\circ\theta_{C_t}$ sur $\{C_t<\infty\}$ et la propriété de Markov de (X_{C_t})). Mais dans le cas général, l'égalité $C_{t+s} = C_t + C_s\circ\theta_{C_t}$ ne vaut que si $R_t=0$, de sorte que les propriétés d'homogénéité

$$X_{C_{t+s}} = X_{C_s}\circ\theta_{C_t} \quad , \quad \theta_{C_{t+s}} = \theta_{C_s}\circ\theta_{C_t} \quad , \; M_{t+s} = M_s\circ\theta_{C_t}$$

ne valent que sur $\{R_t=0\}$. On a posé $M_t=1$ si $t\in M$, 0 sinon. Par ailleurs, pour tout temps d'arrêt T de la famille $(\underline{\underline{M}}_{C_t})$, C_T est un temps d'arrêt de (M_t) et l'on a

$$E[f\circ\theta_{C_t} \mid \underline{\underline{M}}_{C_T}] = E^{X_{C_T}}[f] \quad \text{p.s. sur } \{C_T<\infty\} \; ,$$

donc p.s. sur $\{R_T=0\}$, pour toute fonction f mesurable positive de la trajectoire du processus (X,S).

Si l'ensemble M est p.s. sans point isolé, on a p.s. $M = \{\, t : S_{C_t}=t\}$, de sorte que M est progressivement mesurable par rapport à la famille $(\underline{\underline{M}}_{C_t})$. De plus, l'ensemble $\{\, t : R_t=0\}$ est, dans ce cas, le fermé droit minimal d'adhérence $\overline{M}$. Le système $(\Omega,\underline{\underline{M}},\underline{\underline{M}}_{C_t},X_{C_t},\theta_{C_t},P^x \,;\, M)$ est alors un système régénaratif dans un sens élargi (les propriétés d'homogénéité n'ont lieu qu'en des instants privilégiés). Le théorème II.1 de [8] s'étend facilement à de tels systèmes et montre que le processus $(X_{C_{D_t}},R_t) = (X_{C_t},R_t)$ est fortement markovien, de semi-groupe $(\hat{P}_t)$.

V. APPENDICE

Dans ce paragraphe, nous allons montrer que, convenablement adaptée, la méthode de BENVENISTE et JACOD [1] permet d'obtenir facilement l'existence d'un système de Lévy pour un processus markovien additif (X,S). Nous continuerons de faire les mêmes hypothèses sur (X,S), bien que la positivité de S n'ait plus ici d'importance (nous pourrions même supposer que S est à valeurs dans $\mathbb{R}^n$).

Pour toute fonction f mesurable positive sur $E\times E\times\overline{\mathbb{R}}_+$ définissons la fonctionnelle additive A^f en posant

$$A_t^f = \sum_{0<s\leqq t} f(X_{s-},X_s,\Delta S_s) .$$

La première étape consiste à montrer qu'<u>il existe une fonction</u> φ <u>sur</u> $E\times E\times\overline{\mathbb{R}}_+$, <u>strictement positive sur l'ensemble</u> $D=\{(x,y,u) : x\neq y \text{ ou } u>0\}$ <u>telle que</u> A^φ <u>ait un 1-potentiel borné</u> (le 1-potentiel de A^φ est par définition $E^\cdot[\int_0^\infty e^{-t}dA_t^\varphi]$).

Posons (d est une distance sur E compatible avec la topologie)

$D_n = \{(x,y,u) : d(x,y)\geqq 1/n \text{ ou } u\geqq 1/n\}$, $n\geqq 1$,

$T_n = \mathrm{Inf}\{t>0 : (X_{t-},X_t,\Delta S_t)\in D_n\}$, T_n^k = k-ième itéré de T_n ,

$D_{nm} = D_n\cap\{(x,y,u) : E^y[e^{-T_n}] \leqq 1-1/m\}$, $n,m \geqq 1$,

$T_{nm} = \inf\{t>0 : (X_{t-},X_t,\Delta S_t)\in D_{nm}\}$, T_{nm}^k = k-ième itéré de T_{nm} .

Les T_n^k , T_{nm}^k sont des temps d'arrêt de $(\underline{\underline{M}}_t)$. On a

$$E^\cdot[e^{-T_{nm}^{k+1}}] \leqq E^\cdot[e^{-T_{nm}^k}e^{-T_n\circ\theta_{T_{nm}^k}}] = E^\cdot[e^{-T_{nm}^k}E^{X_{T_{nm}^k}}[e^{-T_n}]]$$

$$\leqq (1-\frac{1}{m})E^\cdot[e^{-T_{nm}^k}]$$

Par suite le 1-potentiel de $A^{I_{D_{nm}}}$, qui s'écrit $\sum_{k=1}^{\infty} E^\cdot[e^{-T_{nm}^k}]$, est borné. Pour un choix convenable des constantes strictement positives a_{nm}, la fonction $\varphi = \sum_{n,m} a_{nm}I_{D_{nm}}$ possède les propriétés désirées (x).

Pour une fonction g borélienne positive et bornée sur $E\times\mathbb{R}_+$, on note K^g la fonctionnelle additive définie par

(x) Cette méthode est empruntée à des notes non publiées de BENVENISTE et JACOD sur les systèmes de Lévy des processus de Markov.

$$K_t^g = \sum_{\substack{s\in J \\ s\leq t}} \varphi(X_{s-},X_s,\Delta S_s)g(X_s,\Delta S_s) \ .$$

K^g est une fonctionnelle additive quasi-continue à gauche relativement à la famille $(\underline{\underline{M}}_t)$, compte tenu des hypothèses de quasi-continuité à gauche faites sur (X,S) ; son 1-potentiel est borné. Notons H^g la projection duale prévisible de K^g, relativement à la famille $(\underline{\underline{F}}_t)$: H^g est une fonctionnelle additive de X, continue, de 1-potentiel borné. Par définition on a pour tout processus $(\underline{\underline{F}}_t)$-prévisible et positif Z

$$E^{\bullet}[\sum_{s\in J} Z_s\varphi(X_{s-},X_s,\Delta S_s)g(X_s,\Delta S_s) \ ] = E^{\bullet}[\int_0^{\infty} Z_s dH_s^g \ ] \ .$$

En prenant Z_s de la forme $h(X_{s-})$ dans cette égalité, on voit que $H^g \ll H = H^1$ (grâce au fait que $\varphi>0$ sur D). D'où l'existence d'une fonction borélienne bornée L_g^* telle que $H^g = L_g^* \cdot H$. Par un argument classique on obtient un noyau L^* de E dans $E\times\overline{\mathbb{R}}_+$ tel que $L^*g = L^*g$ H-p.p. pour tout g. Il suffit alors de poser

$$\begin{aligned} L(x,dy,du) &= \frac{1}{\varphi(x,y,u)} L^*(x,dy,du) \quad \text{si } (x,y,u)\in D \ , \\ &= 0 \text{ sinon} \ . \end{aligned}$$

Le couple (H,L) est un système de Lévy de (X,S).

REFERENCES

[1] A. BENVENISTE, J. JACOD. Systèmes de Lévy des processus de Markov. Invent. Math. 21, 183-198 (1973).

[2] E. CINLAR. Markov additive processes II. Z. Wahrsch. verw. Geb. 24, 94-121 (1972).

[3] E. CINLAR. Lévy systems of Markov additive processes. Z. Warsch. verw. Geb. 31, 175-185 (1975).

[4] E. CINLAR. Entrance-exit distributions for Markov additive processes. Stochastic systems : Modeling, Identification and Optimization. Ed. R. Wets, North-Holland Co, 1976.

[5] R.K. GETOOR. Some remarks on a paper of Kingman. Adv. Appl. Prob. 6, 757-767 (1974).

[6] J. HOROWITZ. Semilinear Markov processes, subordinators and renewal theory. Z. Wahrsch. verw. Geb. 24 (1972).

[7] J.F.C. KINGMAN. Homecomings of Markov processes. Adv. Appl. Prob. 5, 66-102 (1973).

[8] B. MAISONNEUVE. Systèmes régénératifs. Astérisque 15, Soc. Math. de France (1974).

[9] B. MAISONNEUVE. Entrance-exit results for semi-regenerative processes. Z. Warsch. verw. Geb. 32, 81-94 (1975).

[10] P.A. MEYER. Processus à accroissements indépendants et positifs. Séminaire de probabilités III, Lecture Notes in Math. 88, Springer (1969).