MARC YOR

À propos d'un lemme de Ch. Yoeurp

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 11 (1977), p. 493-501
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1977__11__493_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités

1975/76

A PROPOS D'UN LEMME DE Ch. YOEURP

Marc YOR

L'utilisation, en [3] en particulier, d'un lemme dû à Ch. YOEURP, s'est montrée très féconde (1). En fait, ce lemme n'est qu'une autre formulation d'un résultat classique de la théorie générale des processus. Ce résultat joue d'ailleurs un rôle central dans toutes les questions de projection duale prévisible.

0. - Soit $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,P)$ espace de probabilité filtré, vérifiant les conditions habituelles. $\underline{\underline{L}}$ désigne l'ensemble des martingales locales, $\underline{\underline{V}}$ (resp. $\underline{\underline{V}}_p$) l'ensemble des processus continus à droite et limités à gauche, adaptés (resp. prévisibles), à variation finie sur tout compact, $\underline{\underline{S}}$ (resp. $\underline{\underline{S}}_p$) l'ensemble des semi-martingales (resp. spéciales) ([2]) .

Signalons les caractérisations suivantes des éléments de $\underline{\underline{S}}_p$:

<u>LEMME</u> : Soit $X\in\underline{\underline{S}}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes

1) $X\in\underline{\underline{S}}_p$, c'est-à-dire $X = X_0 + M + A$, où $M\in\underline{\underline{L}}$, $A\in\underline{\underline{V}}_p$

2) Le processus $\left(\sum\limits_{0<s\leq .}(\Delta X_s)^2\right)^{1/2}$ est localement intégrable.

3) Le processus $X^* = \sup\limits_{s\leq .}|X_s|$ est localement intégrable.

4) Si $X = X_0 + N + B$, où $N\in\underline{\underline{L}}$, $B\in\underline{\underline{V}}$, le processus B^* est localement intégrable.

---

(1) C'est également le point crucial de la démonstration donnée par J. VAN SCHUPPEN et E. WONG du théorème de Girsanov généralisé.

Démonstration :

1) $\Longleftrightarrow$ 2) figure en [2]

2) $\Longrightarrow$ 3) On a $(\Delta X)^* \leq (\sum_{0<s\leq .} (\Delta X_s)^2)^{1/2}$ ce qui entraîne que $(\Delta X)^*$ est localement intégrable.

D'autre part, $X^* \leq (\Delta X)^* + (X_-)^*$. Or, le processus X_- est localement borné : si $T_n = \mathrm{Inf}(t \geq 0, |X_t| \geq n)$, $|X_{(t\wedge T_n)^-}| \leq n$, et les temps d'arrêt T_n croissent vers $+\infty$ P p.s.

3) $\Longrightarrow$ 2) On a l'inégalité :

$$(\sum_{0<s\leq t} (\Delta X_s)^2)^{1/2} \leq (\sum_{0\leq s<t} (\Delta X_s)^2)^{1/2} + 2\, X_t^* \ .$$

Le processus croissant $(\sum_{0\leq s<t} (\Delta X_s)^2)^{1/2}$ est prévisible, et donc localement borné, d'où 2).

3) $\Longleftrightarrow$ 4) : pour toute $N \in \underline{\underline{L}}$, le processus N^* est localement intégrable.

1. - On rappelle, par la proposition suivante, que les processus prévisibles à variation finie sont naturels (selon l'ancienne terminologie) ([1], T27, p. 105).

La notation H.U (resp. H*U) désigne l'intégrale stochastique (resp. de Stieltjes) de H par rapport à U .

Proposition 1 : Soit M martingale bornée, et $A \in \underline{\underline{V}}_p$.

Alors, $(M*A)^3 = M_-*A$

Démonstration :

$^3M = M_-$ et $(M*A)^3 = {}^3M*A$.

De là, découle le lemme de Yoeurp :

Proposition 2 : Soit $M \in \underline{\underline{L}}$, $A \in \underline{\underline{V}}_p$.

Alors, $[M,A] \in \underline{\underline{L}}$ et $[M,A] = \Delta A.M$.

Démonstration :-Si M est une martingale bornée, on a, d'après la proposition 1 : $(\Delta M*A)^3 = 0$, c'est-à-dire que $[M,A] = \Delta M*A$ est une martingale locale (d'ailleurs localement bornée).

-Pour toute $M \in \underline{\underline{L}}$, on a, d'après l'inégalité de Schwarz : $|[M,A]| < [M,M]^{1/2} [A,A]^{1/2}$.

Par arrêt, on peut supposer $M \in \underline{\underline{H}}^1$, et $\int_0^\infty |dA_s|$ borné (car le processus $\int_0^{\cdot} |dA_s|$ est prévisible). Il existe alors une suite de martingales bornées $M^{(n)}$ convergeant dans $\underline{\underline{H}}^1$ vers M , et donc les variables $[M^{(n)},A]_t$ convergent dans L^1 , uniformément en t , vers $[M,A]_t$: $[M,A]$ est donc une martingale locale si $M \in \underline{\underline{L}}$.

-Enfin, les deux martingales locales $[M,A]$ et $\Delta A.M$, sont sommes compensées de sauts, ont même sauts, et sont donc égales.

De plus, la proposition 2 permet de caractériser les processus de $\underline{\underline{V}}_p$ parmi les semi-martingales (spéciales).

Cela nécessite tout d'abord quelques remarques sur la définition d'intégrales stochastiques optionnelles par rapport à une semi-martingale.

Soit $U \in \underline{\underline{S}}$, nulle en 0, et admettant les décompositions (non canoniques) $U = M' + A' = M'' + A''$, où $M', M'' \in \underline{\underline{L}}$, et $A', A'' \in \underline{\underline{V}}$.

Si H est un processus optionnel localement borné, on peut définir tout aussi naturellement

$$(H.U)' = H.M' + H*A'$$
$$(H.U)'' = H.M'' + H*A''$$

Remarquons que $A'' - A' = M' - M'' \in \underline{\underline{L}}$ et que :

$$\begin{aligned}(H.U)' - (H.U)'' &= H.(M'-M'') + H*(A'-A'') \\ &= H.(M'-M'') - H*(M'-M'').\end{aligned}$$

Or, d'après [2] (ou [3], proposition 3),

$$H.(M'-M'') = H*(M'-M'') - (H*(M'-M''))^3$$

D'où : $$(H.U)' - (H.U)'' = (H*(M'-M''))^3 .$$

Si l'on note $H.U$ l'un quelconque des processus du type $(H.U)'$ (ou $(H.U)''$) obtenus précédemment à partir d'une décomposition de U, $H.U$ est donc défini à un processus de $\underline{\underline{V}}_p$ près. En utilisant cette notation (d'application multivoque), remarquons que si N est une martingale locale,

$$[H.U,N] - H* [U,N] \in \underline{\underline{L}} \quad \text{: en effet,}$$
$$[(H.U)',N] = [H.M',N] + H*[A',N] \text{ , et}$$
$$[H.M',N] - H*[M',N] \in \underline{\underline{L}} .$$

Enfin, si la filtration $(\mathcal{F}_t)$ est quasi-continue à gauche, on a :

$$\Delta(H.U) = H \times \Delta U \text{ , et donc } [H.U \,;\, H.U] = H^2 * [U,U].$$

<u>Proposition 3</u> : Les seules semi-martingales spéciales U , nulles en 0 , telles que : pour toute M martingale bornée, $[U,M]\in\underline{\underline{L}}$, sont les processus de $\underline{\underline{V}}_p$.

De plus, si la filtration $(\mathcal{F}_t)$ est quasi-continue à gauche, on peut supprimer l'adjectif "spéciales".

<u>Démonstration :</u>

- Soit $U = N+B$ la décomposition canonique de $U\in\underline{\underline{S}}_p$ ($N\in\underline{\underline{L}}$, $B\in\underline{\underline{V}}_p$) vérifiant la condition. Si $M\in\underline{\underline{L}}$, $[U,M] = [N,M] + [B,M]$. D'après la proposition 2, si M est une martingale bornée, on a donc $[N,M]\in\underline{\underline{L}}$; ceci est encore vrai si M est localement bornée, donc pour $M = N^{(n)} = 1_{|\Delta N|<n}.N$ (martingale locale dont les sauts sont bornés). Or, $[N,N^{(n)}]$ et $1_{|\Delta N|<n}*[N,N]$ diffèrent d'une martingale locale. $1_{|\Delta N|<n}*[N,N]$ est donc une surmartingale positive, nulle en 0, donc nulle. En faisant tendre n vers $+\infty$, on en déduit $N = 0$, et donc $U = B\in\underline{\underline{V}}_p$.

- Supposons maintenant la filtration $(\mathcal{F}_t)$ quasi-continue à gauche et $U\in\underline{\underline{S}}$ vérifiant la condition. On a alors, pour tout $k > 0$, si M est une martingale bornée :

$$[1_{|\Delta U|\leq k}.U \ ; \ M] \ (= 1_{|\Delta U|\leq k}*[U,M]) = [U \ ; \ 1_{|\Delta U|\leq k}.M]\in\underline{\underline{L}} \qquad (1)$$

Or, d'après le rappel sur les semi-martingales spéciales, $U^{(k)}=1_{|\Delta U|<k}.U$ est une semi-martingale spéciale, et donc d'après le début de la démonstration $U^{(k)}\in\underline{\underline{V}}_p$, ainsi que $[U,U] = \lim\uparrow_k [U^{(k)},U^{(k)}]$, qui est donc un processus localement borné. Toujours d'après le début de la démonstration, $U\in\underline{\underline{S}}_p$ implique alors $U\in\underline{\underline{V}}_p$.

---

(1) Je remercie Ch. Yoeurp de m'avoir signalé l'utilisation abusive, dans une première rédaction, de la notation $1_{|\Delta U|\leq k}.U$.

2. - Remarquons qu'une fois de plus, l'hypothèse de quasi-continuité à gauche (faite sur un processus, ou une filtration) permet d'améliorer un résultat. Indiquons au passage quelques conséquences d'une telle hypothèse :

Proposition 4 : Soit $X = X_o + M + A$ la décomposition canonique d'une semi-martingale spéciale.

X est quasi-continue à gauche si, et seulement si, M l'est et A est continu.

Démonstration : Par arrêt, on peut supposer M^* et $\int_0^\infty |dA_s|$ intégrables. Soit T temps d'arrêt prévisible. Alors, si X est quasi-continu à gauche, on a

$$0 = E(\Delta X_T | \mathcal{F}_{T-}) = \Delta A_T \quad \text{sur} \quad (T < \infty) .$$

Ceci entraîne la continuité de A , et donc la quasi-continuité à gauche de M . Inversement, le résultat découle de l'égalité $\Delta X = \Delta M$ •

Cette proposition permet d'étendre la formule d'Ito obtenue en (3) à toute $X \in \underline{\underline{S}}_p$, quasi-continue à gauche, et vérifiant la propriété d'intégrabilité voulue.

Une remarque voisine m'a été signalée par P.A. MEYER : Si la filtration $(\mathcal{F}_t)$ est quasi-continue à gauche, l'intégration stochastique optionnelle laisse stable l'espace $\underline{\underline{S}}_p$, et transforme une décomposition canonique en décomposition canonique, c'est-à-dire que si $X = X_o + M + A \in \underline{\underline{S}}_p$ $(M \in \underline{\underline{L}}, A \in \underline{\underline{V}}_p)$, et H est un processus optionnel localement borné, $H.X = H_o.X_o + H.M + H*A$ est la décomposition canonique de $H.X \in \underline{\underline{S}}_p$. Il suffit de montrer que le processus $H*A$ est prévisible. Or, c'est un processus cadlag, adapté, n'admettant que des temps de saut prévisibles, et tel que $(H*A)_T \, I_{(T<\infty)} \in \mathcal{F}_{T-}$ si T est prévisible. D'après T.31, p.85, de [1] , $H*A$ est prévisible.

3. - On revient maintenant à la proposition 3. On va montrer qu'elle "contient" la notion de projection duale prévisible d'un processus $A \in \underline{\underline{V}}$: ceci ne constitue aucunement une reconstruction de A^3 (car on a utilisé plus ou moins explicitement l'existence de projections duales prévisibles pour obtenir la proposition 3) , mais montre bien, à mon avis, l'importance du lemme de Ch. Yoeurp (proposition 2).

Soit donc $A \in \underline{\underline{V}}$, tel que $E(\int_0^\infty |dA_s|)^2 < \infty$. L'application $M \to E(\sum_{s>0} (\Delta M_s)(\Delta A_s))$ est alors continue sur $\underline{\underline{M}}_2$ (espace de Hilbert des martingales de carré intégrable, nulles en 0), car

$$|E(\sum_{s>0} (\Delta M_s)(\Delta A_s))| \leq E(M_\infty^2)^{1/2} \, (E(\sum_{s>0} (\Delta A_s)^2))^{1/2} .$$

Il existe donc $\tilde{A} \in \underline{\underline{M}}_2$ telle que :

$$\forall M \in \underline{\underline{M}}_2 \ , \ E([M,A]_\infty) = E([M,\tilde{A}]_\infty) .$$

En remplaçant M par $H.M$, avec $H = \phi_s \, 1_{]s,t]}$, $\phi_s \in b(\mathcal{F}_s)$ et $s < t$, on déduit que $[M, A - \tilde{A}]$ est une martingale pour toute $M \in \underline{\underline{M}}_2$. D'après la première partie de la proposition 3, on a donc $\hat{A} = A - \tilde{A} \in \underline{\underline{V}}_p$, et donc $A - \hat{A} = \tilde{A} \in \underline{\underline{M}}$, propriété caractéristique de la projection duale prévisible de A . D'où $\hat{A} = A^3$.

4. - On donne maintenant une dernière application du lemme de Yoeurp , en présentant une construction du type Lebesgue de l'intégrale stochastique optionnelle (au lieu d'une présentation par dualité)[1].

1. J'ai appris de P.A.Meyer que K.A.Yen est parvenu à une construction analogue.

Soit $M \in \underline{\underline{H}}^1$. - Si T est un temps d'arrêt, on définit :

(1) $$1_{[\![0,T[\![}\cdot M = M_{t\wedge T} - \left((\Delta M_T)\, 1_{(T\leq t)} - B_t\right)$$

où $B = ((\Delta M_T)\, 1_{T\leq \cdot})^3$.

D'après le lemme de Yoeurp, pour toute martingale bornée N, $[1_{[\![0,T[\![}\cdot M, N] - 1_{[\![0,T[\![} * [M,N] = [B,N]$ est une martingale locale, et $1_{[\![0,T[\![}\cdot M$ est donc l'intégrale stochastique optionnelle de P.A. MEYER. La formule (1) a d'ailleurs été obtenue par M. Pratelli ([4], p. 416).

- La définition de H.M s'étend par linéarité à tout processus

$$H = \sum_{i=1}^{n} 1_{A_i}\, 1_{[\![S_i,S_{i+1}[\![} = \sum_{i=1}^{n} 1_{[\![(S_i)_{A_i},(S_{i+1})_{A_i}[\![}$$

où les S_i sont des t.a., $S_i \leq S_{i+1}$, et $A_i \in \mathcal{F}_{S_i}$.

- En utilisant pour ces processus optionnels élémentaires l'inégalité obtenue en [2] (p. 343) (par dualité!)

$$||H.M||_{\underline{\underline{H}}^1} \leq c\, E\left(\int_0^\infty H_s^2\, d[M,M]_s\right)^{1/2}, \text{ avec } c \text{ constante}$$

universelle, la définition de H.M se prolonge par densité et continuité

à tout H optionnel tel que $E\left(\int_0^\infty H_s^2\, d[M,M]_s\right)^{1/2} < \infty$.

REFERENCES

(1) C. DELLACHERIE
Capacités et processus stochastiques. Springer.

(2) P.A. MEYER
Un cours sur les intégrales stochastiques.
Séminaire de Probabilités X - Springer.

(3) M. YOR
Sur les intégrales stochastiques optionnelles et une suite remarquable de formules exponentielles.
Séminaire de Probabilités X - Springer.

(4) M. PRATELLI
Espaces fortement stables de martingales de carré intégrable.
Séminaire de Probabilités X - Springer.