PAUL-ANDRÉ MEYER

Sur un théorème de C. Stricker

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 11 (1977), p. 482-489
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1977__11__482_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1976/77

SUR UN THEOREME DE C. STRICKER

par P.A. Meyer

L'espace probabilisé filtré $(\Omega,\underline{\underline{F}},P,(\underline{\underline{F}}_t)_{t\geq 0})$ satisfait aux conditions habituelles. Soit $(\underline{\underline{G}}_t)$ une filtration contenue dans $(\underline{\underline{F}}_t)$, continue à droite et contenant, elle aussi, tous les ensembles P-négligeables. Stricker vient de démontrer le remarquable théorème suivant, qu'il publiera ailleurs :

<u>Si</u> (X_t) <u>est une semimartingale par rapport à</u> $(\underline{\underline{F}}_t)$ <u>adaptée à</u> $(\underline{\underline{G}}_t)$, <u>alors</u> (X_t) <u>est une semimartingale par rapport à</u> $(\underline{\underline{G}}_t)$.

Le but de cette note est d'énoncer sous une forme explicite un résultat de changement de mesure, qui est implicitement démontré dans le travail de Stricker. Le tout est de choisir une terminologie adéquate ! Il nous faut pour cela deux définitions

DEFINITION 1. <u>Soit</u> (X_t) <u>une semimartingale</u>. <u>Nous dirons que</u> X <u>appartient à</u> $\underline{\underline{H}}^1$ <u>si</u> X <u>s'écrit</u> M+A, <u>où</u> M <u>est une martingale de la classe</u> $\underline{\underline{H}}^1$ <u>et</u> A <u>est un processus à variation intégrable</u>.

Cette classe a été étudiée dans le dernier chapitre du cours de l'an dernier sur les intégrales stochastiques, où l'on se proposait de montrer que l'ensemble des intégrales stochastiques $\Phi\cdot X$, Φ parcourant l'ensemble des processus prévisibles bornés par 1 en module, possède certaines propriétés d'intégrabilité uniforme si et seulement si X appartient à la classe $\underline{\underline{H}}^1$.

Pour la seconde définition, nous poserons $h(t)=t/1-t$ pour $0\leq t<1$, et

(1) $$\overline{\underline{\underline{F}}}_t = \underline{\underline{F}}_{h(t)} \text{ pour } 0\leq t<1 \quad , \quad \overline{\underline{\underline{F}}}_t=\underline{\underline{F}}_{\infty-} \text{ si } t\geq 1$$

DEFINITION 2. <u>Un processus</u> (X_t) <u>est une</u> semimartingale sur $[0,\infty]$ <u>s'il existe une semimartingale</u> $(\overline{X}_t)$ <u>de la famille</u> $(\overline{\underline{\underline{F}}}_t)$ <u>telle que</u> $\overline{X}_t=X_{h(t)}$ <u>pour</u> $0\leq t<1$.

Si X est une semimartingale sur $[0,\infty]$, X admet p.s. une limite finie $X_{\infty-} = \lim_t X_t$, et l'on peut alors choisir $\overline{X}_t=X_{h(t)}$ pour $0\leq t<1$, $\overline{X}_t = X_{\infty-}$ pour $t\geq 1$. Il est clair que cette notion est invariante par changement de mesure (dans la classe d'équivalence de P), comme la notion même de semimartingale. D'autre part, une semimartingale de la classe $\underline{\underline{H}}^1$ est une semimartingale sur $[0,\infty]$.

Nous pouvons maintenant expliciter le théorème de Stricker :

THEOREME. Si (X_t) est une semimartingale sur $[0,\infty]$, il existe une loi Q équivalente à P telle que (X_t) soit, pour la loi Q, une semimartingale de la classe $\underline{\underline{H}}^1$.

DEMONSTRATION. Nous considérons la semimartingale $(\overline{X}_t)$ obtenue en prolongeant $(X_{h(t)})_{0\leq t<1}$ par $X_{\infty-}$ sur $[1,\infty[$. La v.a. $[\overline{X},\overline{X}]_\infty=[\overline{X},\overline{X}]_1$ est p.s. finie ; au moyen d'un premier changement de mesure nous la rendons intégrable, si nécessaire, sans changer de notation. Alors $(\overline{X}_t)$ est une semimartingale spéciale, et peut s'écrire $\overline{X}_t=\overline{M}_t+\overline{A}_t$, où $\overline{M}$ est une martingale locale, $\overline{A}$ un processus à variation finie prévisible. Comme la v.a. $\int_0^1|d\overline{A}_s|$ est p.s. finie, nous voyons que (après un premier changement de mesure, rappelons le) $X_t= M_t+A_t$, où M est une martingale locale, et A est prévisible, à variation p.s. finie sur $[0,\infty]$ entier.

Maintenant, nous utilisons le fait que $E[[X,X]_\infty]<\infty$. En tout temps d'arrêt prévisible S nous avons $|\Delta X_S|\in L^1$, $\Delta A_S= E[\Delta X_S|\underline{\underline{F}}_{S-}]$, donc $E[\Delta A_S^2]\leq E[\Delta X_S^2]$, et finalement, en sommant sur des temps d'arrêt prévisibles à graphes disjoints épuisant les sauts de A, $E[[A,A]_\infty]\leq E[[X,X]_\infty] < \infty$. Comme $[M,M]\leq 2([X,X]+[A,A])$, nous avons aussi $E[[M,M]_\infty]<\infty$, et la martingale M appartient à $\underline{\underline{M}}^2$. Je suis passé un peu rapidement ici sur les détails, mais ceux-ci figurent dans le travail de Stricker.

Nous posons $Q=N.P$, où N est bornée, strictement positive, d'intégrale 1, et telle que $E[N.\int_0^\infty|dA_s|] < \infty$; nous introduisons la martingale strictement positive $N_t=E[N|\underline{\underline{F}}_t]$. Le théorème de Girsanov nous donne alors la décomposition canonique de la semimartingale X pour la loi Q :

$$X_t = M'_t+A'_t = (M_t - \int_0^t \frac{d\langle M,N\rangle_s}{N_{s-}}) + (\int_0^t \frac{d\langle M,N\rangle_s}{N_{s-}} +A_t)$$

Nous avons

1) $E_Q[\int_0^\infty|dA_s|] = E_P[N.\int_0^\infty|dA_s|] < \infty$ parce que N est bornée.

2) $E_Q[\int_0^\infty\frac{|d\langle M,N\rangle_s|}{N_{s-}}] = E_P[\int_0^\infty\frac{N}{N_{s-}}|d\langle M,N\rangle_s]\overset{1}{=}E_P[\int_0^\infty|d\langle M,N\rangle|_s]\overset{2}{\leq}\|M\|_2\|N\|_2<\infty$

L'égalité $\overset{1}{=}$ vient du fait que le processus $\int_0^t|d\langle M,N\rangle_s|$ est prévisible, et que la projection prévisible du processus N/N_{s-} est égale à 1 . L'inégalité $\overset{2}{\leq}$ est l'inégalité de Kunita-Watanabe ; M est bornée dans L^2 et N est bornée.

Il résulte de 1) et 2) que $E_Q[\int_0^\infty|dA'_s|]<\infty$. D'autre part, nous avons $E_Q[M'^*]\leq E_Q[M^*] + E_Q[\int_0^\infty|d\langle M,N\rangle_s|/N_{s-}]$. Nous avons déjà vu en 2) que la dernière espérance est finie. Quant à $E_Q[M^*]$, c'est $E_P[NM^*]$ qui est finie, car N est bornée et M^* appartient à $L^2(P)$ puisque M est bornée dans L^2 (inégalité de Doob). Donc M' appartient bien à la classe $\underline{\underline{H}}^1$ pour la loi Q, et le théorème est établi.

Avant de donner une application de ce théorème, voici quelques compléments. Soit X un processus càdlàg. adapté. Si X n'est pas une semimartingale de la classe $\underline{\underline{H}}^1$, nous poserons $\|X\|_{\underline{\underline{H}}^1} = +\infty$. Si X appartient à la classe $\underline{\underline{H}}^1$, nous considérons la décomposition canonique X=M+A (M martingale, A processus à variation intégrable prévisible nul en 0) et nous posons

(2) $$\|X\|_{\underline{\underline{H}}^1} = \|M\|_{\underline{\underline{H}}^1} + E[\int_0^\infty |dA_s|]$$

Considérons d'autre part une subdivision finie $\tau=(t_0,\dots,t_n)$ avec $0\leq t_0 < t_1 \dots < t_n < \infty$. Si les variables aléatoires X_{t_i} ne sont pas toutes intégrables, nous posons $\mathrm{Var}_\tau(X)=+\infty$. Si elles sont toutes intégrables, nous posons

(3) $$\mathrm{Var}_\tau(X) = E[\ \Sigma_{i<n} |E[X_{t_{i+1}} - X_{t_i} \,|\, \underline{\underline{F}}_{t_i}]| + |X_{t_n}|\,]$$

et nous disons que X est une <u>quasimartingale</u> si $\mathrm{Var}(X)=\sup_\tau \mathrm{Var}_\tau(X) < \infty$. Un théorème classique (Fisk, Orey, Rao...) affirme qu'une quasimartingale est différence de deux surmartingales positives, et donc est une semimartingale (en fait, une semimartingale jusqu'à l'infini). Nous aurons besoin de la remarque évidente que $\mathrm{Var}(X) \leq \|X\|_{\underline{\underline{H}}^1}$ pour tout processus X comme ci-dessus.

APPLICATION A UN THEOREME DE JACOD

Considérons un espace mesurable $(\Omega, \underline{\underline{F}}^\circ)$, une famille croissante de tribus $(\underline{\underline{F}}_t^\circ)$, continue à droite (mais non complétée, puisqu'il n'y a pas de mesure), et un processus càdlàg. adapté (X_t). Nous laissons ce processus fixé dans toute la suite, et nous disons brièvement qu'une loi P sur $(\Omega, \underline{\underline{F}}^\circ)$ est une <u>loi de semimartingale</u> pour exprimer que (X_t) est une semimartingale par rapport à la famille complétée habituelle $(\underline{\underline{F}}_t^P)$, et pour la loi P. Un remarquable théorème de Jacod affirme que

<u>L'ensemble des lois de semimartingales est convexe</u> .

J'ai eu connaissance de ce théorème par Yor, et je remercie J. Jacod de m'avoir autorisé à en publier ici une démonstration rapide au moyen du théorème de Stricker. Une esquisse de la démonstration originale de Jacod paraîtra dans un article de J. Mémin, C.R. des journées de Metz sur le contrôle, à paraître aux Lecture Notes in M.

Nous allons prouver en fait un résultat plus fort :

<u>Soit</u> (P_n) <u>une suite de lois de semimartingales</u>, <u>et soit</u> P <u>une loi absolument continue par rapport à la mesure</u> $\Sigma_n P_n$; <u>alors</u> P <u>est une loi de semimartingale</u>.

Quitte à arrêter X à t fini, nous pouvons supposer que X est une martingale jusqu'à l'infini pour les lois P_n . Nous ne changeons rien à l'énoncé en remplaçant P_n par une loi équivalente, donc le théorème de Stricker nous permet de supposer que X appartient à la classe $\underline{\underline{H}}^1$ pour chacune des lois P_n . La variation totale Var (X,P_n) de X pour la loi P_n est donc finie. Choisissons des coefficients $\lambda_n>0$ tels que

$$\Sigma_n \lambda_n=1 \quad , \quad \Sigma_n \lambda_n \mathrm{Var}(X,P_n) < \infty$$

et posons $P=\Sigma_n \lambda_n P_n$. Nous allons montrer que $\mathrm{Var}(X,P)<\infty$, et cela établira le théorème. En effet, X sera une quasimartingale pour la loi P, donc une semimartingale jusqu'à l'infini pour la loi P, donc aussi (d'après Jacod-Mémin, Z. für W-theorie, 35, 1976, p.1-37 ; voir aussi dans ce volume les « compléments au cours sur les i.s.») pour toute loi Q absolument continue par rapport à P. Après quoi, on se rappelle qu'on a arrêté X à t fini sans changer de notation, et l'on fait tendre t vers l'infini.

Soit f_t^n une densité de P_n sur $\underline{\underline{F}}_t^o$ par rapport à P sur $\underline{\underline{F}}_t^o$. Nous avons $E_n[|X_t|] \leq \mathrm{Var}(X,P_n)$, donc $\Sigma_n \lambda_n E_n[|X_t|] < \infty$, et X_t est P-intégrable pour tout t. Ensuite, nous avons pour toute v.a. Z positive

$$E[Z|\underline{\underline{F}}_t^o] = \Sigma_n \lambda_n f_t^n E_n[Z|\underline{\underline{F}}_t^o]$$

donc aussi pour Z P-intégrable, par différence

$$|E[Z|\underline{\underline{F}}_t^o]| \leqq \Sigma_n \lambda_n f_t^n |E_n[Z|\underline{\underline{F}}_t^o]|$$

et en intégrant

$$E[|E[Z|\underline{\underline{F}}_t^o]|] \leqq \Sigma_n \lambda_n E_n[|E_n[Z|\underline{\underline{F}}_t^o]|]$$

Mais alors on en déduit $\mathrm{Var}(X,P) \leqq \Sigma_n \lambda_n \mathrm{Var}(X,P_n)<\infty$, et nous avons terminé.

EXTENSION DU THEOREME DE JACOD AUX SOMMES CONTINUES

Soit $(I,\underline{\underline{I}},\mu)$ un espace probabilisé complet, et soit $(P_\iota)_{\iota\in I}$ une famille mesurable de lois de semimartingales. Peut on affirmer que toute loi absolument continue par rapport à $\int P_\iota \mu(d\iota)$ est une loi de semimartingale ? Il est bien clair que la démonstration précédente doit s'étendre, à condition de savoir choisir mesurablement une mesure $\overline{P}_\iota$ équivalente à P_ι pour laquelle X appartient à la classe $\underline{\underline{H}}^1$. Il est clair aussi que cela exige de la technique de théorie de la mesure : nous allons utiliser les limites médiales de Mokobodzki, présentées dans le séminaire VII, p.198-204[1].

Nous allons supposer que pour tout t>0 la tribu $\underline{\underline{F}}_{t-}^o$ est séparable .

1. Je profite de cette occasion pour corriger plusieurs petites erreurs: p.198 ligne 6 du texte, après Notations et rappels , ajouter convexe compact métrisable ; p.199 ligne 9, supprimer s.c.s. , ligne 17 remplacer atomique par absolument continue.

Nous désignons par $(t_i^n)=\tau_n$ la n-ième subdivision dyadique de $\bar{\mathbb{R}}$, dont les points sont $t_i^n = i2^{-n}$ pour $i=0,1,\ldots 2^{2n}$, et $t_i^n=+\infty$ pour $i>2^{2n}$. Nous supposons enfin que X est une <u>semimartingale jusqu'à l'infini</u>, ce qui n'est pas une restriction : on peut toujours se ramener à ce cas par arrêt à t fini.

Pour tout $\iota\in I$, le processus X étant une semimartingale pour P_ι, les sommes

$$S_n = \sum_i (X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})^2$$

ont une limite en probabilité pour la loi P_ι, qui est une version de $[X,X]_\infty$. Si nous posons sur Ω

$$[X,X]_\infty = \lim \text{méd}_{n\to\infty} S_n$$

nous obtenons une fonction <u>universellement mesurable</u> sur $(\Omega,\underline{\underline{F}}^\circ)$, qui pour chaque ι est une version de $[X,X]_\infty$ au sens usuel pour la mesure P_ι. Dans ces conditions, nous pouvons faire un premier changement de loi en remplaçant P_ι par

$$P_\iota^1 = \frac{N_\iota}{1+X^*+[X,X]_\infty} P_\iota$$

où N_ι est une constante de normalisation, et cette famille de lois est toujours $\underline{\underline{I}}$-mesurable.

Ensuite, nous pouvons décomposer X relativement à la loi P_ι^1 en

$$X = M^\iota + A^\iota$$

où M^ι est une martingale de carré intégrable pour P_ι^1 et A^ι est un processus prévisible nul en 0, à variation finie sur $[0,+\infty]$ entier. Tout le problème consiste à démontrer que la mesure positive σ-finie sur $\underline{\underline{F}}^\circ_{\infty-}$

$$\mu_\iota(B) = E_\iota^1[I_B.\int_0^\infty |dA_s^\iota|]$$

dépend mesurablement du paramètre ι. Car la tribu $\underline{\underline{F}}^\circ_{\infty-}$ étant séparable, nous choisirons alors une version de la densité

$$\alpha_\iota = \mu_\iota / P_\iota^1 \quad \text{sur } \underline{\underline{F}}^\circ_{\infty-}$$

dépendant mesurablement de (ι,ω), de sorte que nous aurons $\alpha_\iota = \int_0^\infty |dA_s^\iota|$ P_ι^1-p.s. pour tout ι, et il nous restera seulement à poser

$$\bar{P}_\iota = \frac{N_\iota^1}{1+\alpha_\iota} P_\iota^1 \qquad (N_\iota^1 \text{ constante de normalisation })$$

pour obtenir des lois équivalentes aux P_ι, dépendant mesurablement de ι, et pour lesquelles X appartient à la classe $\underline{\underline{H}}^1$. De plus, si nous considérons la nouvelle décomposition de X par rapport à $\bar{P}_\iota$

$$X = \bar{M}^\iota + \bar{A}^\iota$$

nous avons
$$\mathrm{Var}(X,\overline{P}_\iota) = \overline{E}_\iota[\int|d\overline{A}^\iota_s|]$$
et le même résultat que nous avons utilisé ci-dessus - et que nous démontrerons un peu plus loin - entraîne que $\mathrm{Var}(X,P_\iota) = v_\iota$ dépend mesurablement de ι. Nous choisissons alors une fonction mesurable $\lambda_\iota>0$ sur I, telle que
$$\int\lambda_\iota\mu(d\iota) = 1 \quad , \quad \int\lambda_\iota v_\iota\mu(d\iota) < \infty$$
et nous posons $Q=\int\lambda_\iota\overline{P}_\iota\mu(d\iota)$; cette mesure est équivalente à $\int P_\iota\mu(d\iota)$, X est une quasi-martingale pour Q, donc une semimartingale pour Q, et enfin une semimartingale pour P.

<u>Il reste donc seulement à vérifier que</u>, <u>pour</u> $B\in\underline{\underline{F}}^o_{\infty-}$

$$\iota \longmapsto E^1_\iota[I_B.\int_0^\infty|dA^\iota_s|] \tag{4}$$

<u>est fonction</u> $\underline{\underline{I}}$<u>-mesurable de</u> ι.

<u>Nous allons commencer par traiter le cas où</u> $B=\Omega$. Nous omettons l'indice ι, considérons une semimartingale X pour une loi P, qui s'écrit X= M+A où M est une martingale uniformément intégrable, A un processus prévisible à variation finie sur tout $[0,\infty]$, nul en 0, et tel que A_t soit intégrable pour tout t. Montrons que

$$E[\int_0^\infty|dA_s|] = \mathrm{Var}_-(X,P) \underset{\text{déf.}}{=} \sup_n E[\sum_i|E[X_{t^n_{i+1}}-X_{t^n_i}|\underline{\underline{F}}^o_{t^n_i-}]|]^{1} \tag{5}$$

A cet effet, nous considérons sur $\mathbb{R}^*_+\times\Omega$ la tribu $\mathcal{P}^o_n$ engendrée par les processus (Y_t) de la forme

$$Y_t(\omega) = \sum_i Y^i(\omega)I_{]t^n_i,t^n_{i+1}]}(t), \quad Y^i \ \underline{\underline{F}}^o_{t^n_i-}\text{-mesurable} \tag{6}$$

Les tribus $\mathcal{P}^o_n$ croissent, et engendrent la tribu $\mathcal{P}^o$ engendrée aussi par les processus (Y_t) sur $\mathbb{R}^*_+\times\Omega$, adaptés à la famille $(\underline{\underline{F}}^o_{t-})$ et continus à gauche. Nous considérons la mesure sur $\mathcal{P}^o$
$$\mu(Y) = E[\int_0^\infty Y_s|dA_s|\ ] \qquad (\ Y\ \mathcal{P}^o\text{-mesurable et } \geqq 0\ )$$
qui est positive et σ-finie[2] et la mesure non positive, dominée par μ
$$\lambda(Y) = E[\int_0^\infty Y_s dA_s\ ]$$

---

1. On convient que $X_\infty=0$. On notera la légère différence entre $\mathrm{Var}_-(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$, le remplacement de $\underline{\underline{F}}^o_t$ par $\underline{\underline{F}}^o_{t-}$ étant rendu nécessaire par le fait que ce sont les tribus $\underline{\underline{F}}^o_{t-}$ qui sont séparables. Mais nous verrons en fait que $\mathrm{Var}(X)=\mathrm{Var}_-(X)$.

2. Du fait que le processus $\int_0^t|dA_s|$ est prévisible. D'ailleurs cela ne servira pas.

Supposons d'abord que $E[\int|dA_s|]<\infty$, i.e. que λ soit bornée. Il existe une densité prévisible des mesures dA_s par rapport aux mesures $|dA_s|$, prenant ses valeurs dans l'ensemble $\{-1,1\}$, et que l'on peut supposer $\mathcal{P}^o$-mesurable. Notons la Δ ; on a $\lambda=\Delta.\mu$. Soit aussi Δ_n la densité de λ par rapport à μ sur la tribu $\mathcal{P}^o_n$. D'après le théorème de convergence des martingales, les Δ_n forment une martingale qui converge vers Δ p.s. et dans L^1 . Donc les $|\Delta_n|$ forment une sousmartingale qui converge vers $1=|\Delta|$ μ-p.s. et dans $L^1(\mu)$, donc $\int|\Delta_n|\mu$ tend en croissant vers $\int\mu = E[\int|dA_s|]$. Or qu'est ce que $\int|\Delta_n|\mu$? On a

$$(\Delta_n)_t = E[A_{t^n_{i+1}}-A_{t^n_i}|\underline{\underline{F}}_{t^n_i-}]/E[\int_{t^n_i+}^{t^n_{i+1}}|dA_s|\,|\underline{\underline{F}}_{t^n_i-}] \text{ si } t^n_i<t\leq t^n_{i+1}$$

et l'on peut remplacer A par X puisque M est une martingale. Donc $\int|\Delta_n|\mu$ est exactement la somme figurant dans (5), et l'on voit que celle ci croît en n (on pourrait donc remplacer $\sup_n$ par $\lim_n$) et que sa limite est $E[\int|dA_s|]$

Si l'on avait remplacé $\mathcal{P}^o_n$ par une tribu un peu plus grande, en exigeant dans (6) que Y^i soit $\underline{\underline{F}}^o_{t^n_i}$ -mesurable, le résultat aurait été le même, mais on aurait obtenu les sommes définissant Var(X) et non $\mathrm{Var}_-(X)$.

Il nous reste à exclure la possibilité que $E[\int|dA_s|]=+\infty$, $\mathrm{Var}_-(X)<\infty$. Or c'est très simple : en reprenant le raisonnement classique pour Var(X), mais qui marche aussi bien pour $\mathrm{Var}_-(X)$, on voit que si $\mathrm{Var}_-(X)<\infty$, X est différence de deux surmartingales positives, donc le processus prévisible de sa décomposition canonique est intégrable.

Passons maintenant à la formule (4), dans le cas général. Introduisons la martingale positive bornée par 1

(7) $$b^\iota_t = E^1_\iota[I_B|\underline{\underline{F}}^o_t]$$

- pour l'instant nous laissons ι fixe, nous n'avons pas à choisir de version bien définie. La mesure associée à $|dA^\iota_s|$ commutant avec la projection prévisible, nous avons

$$E^1_\iota[I_B.\int|dA^\iota_s|] = E^1_\iota[\int b^\iota_{s-}|dA^\iota_s|]=E^1_\iota[\int|b^\iota_{s-}dA^\iota_s|]$$

Introduisons la semimartingale

(8) $$Y^\iota_t = \int_0^t b^\iota_{s-}dX_s \quad \text{(intégrale stochastique}/P^1_\iota)$$

et rappelons nous que pour la mesure P^1_ι , X s'écrit $M^\iota+A^\iota$, où la martingale M^ι est de carré intégrable ; donc $b^\iota_-\cdot Y^\iota$ admet la décomposition canonique $b^\iota_-\cdot M^\iota+ b^\iota_-\cdot A^\iota$, et nous pouvons lui appliquer la discussion précédente , ce qui nous donne

$$E^1_\iota[I_B.\int|dA^\iota_s|] = \sup_n E^1_\iota[\textstyle\sum_i |E^1_\iota[Y^\iota_{t^n_{i+1}}-Y^\iota_{t^n_i}|\underline{\underline{F}}^o_{t^n_i-}]|\ ]$$

Maintenant, nous sommes pratiquement au bout :

a) Comme les tribus $\underline{\underline{F}}^o_{t-}$ sont séparables, nous construisons pour s rationnel une version β^ι_s de $E^1_\iota[I_B|\underline{\underline{F}}^o_{s-}]$, fonction mesurable de (ι,ω), puis nous posons ($t>0$)

$$\beta^{\iota n}_t = \beta^\iota_{t^n_i} \quad \text{où } t^n_i \text{ est le dernier point de } \tau_n \text{ tel que } t^n_i<t$$

$$b^\iota_{t-} = \lim\sup_n \beta^{\iota n}_t \quad ; \text{ nous poserons } b^\iota_{t-}=H^\iota_t \ .$$

b) Au moyen d'un argument de classes monotones , nous démontrons que si $(\iota,(t,\omega)) \longmapsto H^\iota_t(\omega)$ est une fonction réelle bornée, $\underline{\underline{I}}\times P^o$-mesurable, comme celle que l'on vient de construire ci-dessus, alors il existe pour tout t une fonction $(\iota,\omega)\longmapsto Y^\iota_t(\omega)$ possédant les propriétés suivantes :

- pour tout ι, on a $Y^\iota_t = \int_0^t H^\iota_t dX_t \quad P^1_\iota$-p.s.
- $(\iota,\omega)\longmapsto Y^\iota_t(\omega)$ est mesurable pour la complétion universelle de $\underline{\underline{I}}\times\underline{\underline{F}}^o_t$

[C'est évident pour les processus de la forme $a(\iota)b(t,\omega)$, où b est prévisible élémentaire ; ensuite, il faut utiliser les limites médiales à chaque étape du raisonnement par classes monotones].

c) Laissons fixes n et i, et posons $Z^\iota = Y^\iota_{t^n_{i+1}} - Y^\iota_{t^n_i}$. Alors la famille de mesures $\iota\longmapsto Z^\iota.P^1_\iota$ est $\underline{\underline{I}}$-mesurable. Je laisse les détails de côté.

d) Il existe alors (par le théorème de Doob sur les densités, la tribu $\underline{\underline{F}}^o_{t^n_i-}$ étant séparable) une version U^ι de $E^1_\iota[Z^\iota|\underline{\underline{F}}^o_{t^n_i-}]$ qui est mesurable en (ι,ω) .

e) Alors $\iota\longmapsto E^1_\iota[U^\iota|]$ est $\underline{\underline{I}}$-mesurable. Nous revenons à (9), et c'est fini.

Ces techniques sont incroyablement lourdes et ennuyeuses. Pourtant, il faudra bien revoir un jour tout cela en détail, afin d'étendre aux semimartingales la théorie des intégrales stochastiques dépendant d'un paramètre, qui a été développée par Catherine Doléans-Dade autrefois dans le cas des <u>martingales</u>.