PAUL-ANDRÉ MEYER

Notes sur les intégrales stochastiques

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 11 (1977), p. 446-481

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1977__11__446_0>

NOTES SUR LES INTEGRALES STOCHASTIQUES . I
INTEGRALES HILBERTIENNES

(P.A. Meyer)

Après le cours sur les intégrales stochastiques de l'an dernier, le sujet est très loin d'être épuisé, mais il devient impossible de présenter les diverses questions dans un ordre rationnel. C'est pourquoi les chapitres seront remplacés par des "notes" plus ou moins longues, couvrant chacune un seul sujet.

J'avais résolu de ne jamais parler du cas vectoriel, pensant que le cas de la dimension finie était évident, et le cas de la dimension infinie trop difficile pour moi. Mais en Octobre 1975, un exposé de L. GALTCHOUK au séminaire de Strasbourg nous a persuadés que, si M est une martingale à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, X un processus prévisible à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, on doit définir l'intégrale stochastique $\int_0^t X_s.dM_s$ d'une manière qui n'exige pas l'existence des termes de la somme $\int_0^t X_s^1 dM_{1s} + \ldots + \int_0^t X_s^n dM_{ns}$. Le joli théorème de représentation obtenu par GALTCHOUK fournit donc la motivation de cet exposé.

Cependant, je profite de cette occasion pour exposer un peu de la théorie des intégrales stochastiques en dimension infinie (je me borne au cas hilbertien, bien que METIVIER[1] ait abordé le cas banachique). J'essaie d'utiliser aussi peu d'analyse fonctionnelle que possible, et surtout de rester aussi près que possible de notre langage habituel.

NOTATIONS

Nous désignons par H un espace de Hilbert séparable, par $\|.\|$ la norme, par $(.|.)$ le produit scalaire. Bien que celui-ci permette d' identifier H et H', il est commode de garder la distinction présente à l'esprit, et en particulier de considérer nos martingales comme des processus à valeurs dans H' (dans la notation du produit scalaire, les bra-ket des physiciens, les martingales figureront en position "ket" : $(.|M_t)$). Je trouve en effet que l'espace B(H,H) des formes bilinéaires sur H (avec sa norme usuelle , aussi notée $\|\|$),

1.Toutes les références figurent à la fin du texte.

est un objet moins impressionnant que $H \otimes H$ avec ses diverses complétions. Nous verrons que si les martingales sont à valeurs dans H', on peut se servir de B(H,H) comme sac où fourrer tous les calculs.

Soit $(X,\mathfrak{X})$ un espace mesurable, et soit B un espace de Banach. Nous disons que $f : X \to B$ est $\mathfrak{X}$-mesurable si l'image réciproque de toute boule appartient à $\mathfrak{X}$: c'est la définition usuelle. Nous dirons que f est fortement $\mathfrak{X}$-mesurable si f est $\mathfrak{X}$-mesurable, et f(X) est une partie séparable de B. Lorsque B=H, il n'y a pas lieu de distinguer les deux notions, puisque H est séparable, mais il y aura un endroit où la distinction interviendra, et il faut rappeler que les limites de fonctions étagées mesurables sont les fonctions fortement mesurables, de sorte qu'on ne sait pas intégrer les autres par la méthode de BOCHNER.

MARTINGALES ET PROCESSUS CROISSANT SCALAIRE

Nous considérons un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{F},P)$, muni d'une famille de tribus $(\mathcal{F}_t)$ satisfaisant aux conditions habituelles, et une martingale (M_t) à valeurs dans H', nulle en 0. Qu'est ce que cela signifie ?

- Pour chaque t, M_t est une application $\mathcal{F}_t$-mesurable de Ω dans H',
- Pour chaque t, $E[|M_t|] < \infty$, i.e. M_t est intégrable,
- Pour $s \leqq t$, $A \in \mathcal{F}_s$, on a $\int_A M_s P = \int_A M_t P$.

Si l'on prend une base orthonormale (e_i), (M_t) apparaît tout simplement comme une suite de martingales réelles $M_{it} = (e_i|M_t)$, relatives à la même famille $(\mathcal{F}_t)$, et assujetties à la seule condition que $(\Sigma_i M_{it}^2)^{1/2}$ soit intégrable. L'objet n'a donc rien de mystérieux.

Le processus $\|M_t\|$ est une sousmartingale réelle positive, à laquelle s'appliquent les inégalités de DOOB, et un raisonnement tout à fait classique montre que (M_t) admet une version càdlàg.

En fait, nous ne dirons rien des martingales générales : toutes les martingales considérées ci-dessous seront de carré intégrable. Je suis persuadé, cependant, que la théorie fine des martingales hilbertiennes (en particulier celle de l'espace $\underline{\underline{H}}^1$) mérite d'être étudiée.

DEFINITION. On appelle processus croissant scalaire associé à M, et on note $\langle\!\langle M,M \rangle\!\rangle$, le processus croissant prévisible intervenant dans la décomposition de la sousmartingale $\|M_t\|^2$.

Cette définition innocente cache un petit piège : tel qu'il est défini, le processus croissant scalaire existe pour des martingales de carré intégrable à valeurs dans un Banach, mais on ne sait rien en faire, car la relation

$$E[\|M_t\|^2-\|M_s\|^2|\mathcal{F}_s] = E[\langle\!\langle M,M\rangle\!\rangle_t-\langle\!\langle M,M\rangle\!\rangle_s|\mathcal{F}_s]$$

n'entraîne la relation fondamentale

(1) $$E[\|M_t-M_s\|^2|\mathcal{F}_s] = E[\langle\!\langle M,M\rangle\!\rangle_t - \langle\!\langle M,M\rangle\!\rangle_s|\mathcal{F}_s]$$

que dans le cas hilbertien. C'est la première difficulté du cas banachique !

UNE INTEGRALE STOCHASTIQUE TRIVIALE

La définition du processus croissant scalaire permet aussitôt de définir une classe simple d'intégrales stochastiques. Soit (X_s) un processus prévisible réel étagé (comme $M_0=0$, on peut supposer que $X_0 = 0$ aussi)

(2) $$X_t = \Sigma_k A_k I_{]t_k,t_{k+1}]}(t)$$

où $0=t_1<t_2...<t_n=\infty$ est une subdivision finie de la droite, où chaque A_i est une v.a. réelle bornée $\mathcal{F}_{t_k}$-mesurable, et $A_{n-1}=0$ de sorte que $X_t=0$ pour $t>t_{n-1}$. Nous pouvons définir

$$\int_0^\infty X_s dM_s = \Sigma_k A_k(M_{t_{k+1}}-M_{t_k})$$

vérifier que

(3) $$E[\|\int_0^\infty X_s dM_s\|^2] = E[\int_0^\infty X_s^2 d\langle\!\langle M,M\rangle\!\rangle_s]$$

et prolonger à tous les processus prévisibles réels tels que le second membre de (3) soit fini. Cela revient en fait à prendre une intégrale stochastique composante par composante, et ne présente pas d'intérêt spécial, que d'éclairer le rôle du processus croissant scalaire.

La remarque suivante est peut être plus intéressante. Soit L une martingale réelle de carré intégrable . Nous allons montrer qu'il existe un processus prévisible (A_t) à valeurs dans H', à trajectoires càdlàg. et à variation bornée au sens suivant :

pour tout t $\sup_\tau \Sigma_k\|A_{t_{k+1}}-A_{t_k}\| = \int_0^t\|dA_s\|$ est p.s. fini, et même intégrable

le sup étant calculé pour toutes les subdivisions finies $\tau=0<t_1..<t_n=t$ de $[0,t]$, et tel (la phrase n'est pas finie !) que pour tout $x\in H$

$$\int_0^t d\langle L,\ (x|M)\rangle_s = (x|A_t)\ .$$

Pour prouver cela, nous prenons une base orthonormale (e_i), la base duale (e^i) de H', et nous posons $A_{it} = \langle L,(e_i|M)\rangle_t$. Soit $A_t^n = \Sigma_1^n A_{it}e^i$. Nous avons pour $u<v$, hors d'un ensemble négligeable fixe, indépendant de u et v, d'après l'inégalité de KUNITA-WATANABE

$$\|A_v^n - A_u^n\| = (\Sigma_1^n (\langle L,(e_i|M)\rangle_u^v)^2)^{1/2} \leqq (\Sigma_1^n \langle L,L\rangle_u^v \langle (e_i|M),(e_i|M)\rangle_u^v)^{1/2}$$
$$\leqq (\langle L,L\rangle_u^v \langle\!\langle M,M\rangle\!\rangle_u^v)^{1/2}$$

Première conséquence : prenant u=0, v=t, nous trouvons que $E[\|A_t^n\|]$ reste borné par $(E[\langle L,L\rangle_t])^{1/2}(E[\langle\!\langle M,M\rangle\!\rangle_t])^{1/2}$, donc la série $\Sigma A_{it}e^i$ converge p.s. dans H'. Nous avons alors, en notant A_t sa somme

$$\|A_v - A_u\| \leqq (\langle L,L\rangle_u^v \langle\!\langle M,M\rangle\!\rangle_u^v)^{1/2} \quad \text{p.s.}$$

d'où la continuité à droite de (A_t). Appliquant ce résultat à des intervalles $(u,v) = (t_k, t_{k+1})$ formant une subdivision finie de $[0,t]$, sommant et appliquant l'inégalité de Schwarz, nous obtenons

$$\Sigma_k \|A_{t_{k+1}} - A_{t_k}\| \leqq (\langle L,L\rangle_t)^{1/2}(\langle\!\langle M,M\rangle\!\rangle_t)^{1/2}$$

d'où il résulte, en passant au sup sur les subdivisions

$$(4) \qquad \int_0^t \|dA_s\| \leqq (\langle L,L\rangle_t)^{1/2}(\langle\!\langle M,M\rangle\!\rangle_t)^{1/2} \quad \text{p.s.}$$

forme vectorielle de l'inégalité de K-W. Il est naturel de noter $\langle L,\ (.|M)\rangle$ le processus (A_t), mais plus suggestif de noter sa différentielle comme $\langle dL_s\ ,\ (.|dM_s)\rangle$, avec la possibilité de faire apparaître ω : $\langle dL_s(\omega),\ (.|dM_s(\omega))\rangle$. Remarquer qu'une martingale hilbertienne telle que $\langle L,(.|M)\rangle = 0$ pour toute martingale réelle L (de carré intégrable) a toutes ses composantes nulles, et donc est nulle.

L'intégrale stochastique $H_t = \int_0^t X_s dM_s$ définie plus haut admet des caractérisations à la KUNITA-WATANABE, soit par la relation

$$\langle\!\langle H,N\rangle\!\rangle_t = \int_0^t X_s d\langle\!\langle M,N\rangle\!\rangle_s \quad \text{pour toute martingale hilbertienne de carré intégrable N}$$

soit par la relation

$$\langle L,\ (.|H)\rangle_t = \int_0^t X_s d\langle L,\ (.|M)\rangle_s \quad \text{pour toute martingale réelle de carré intégrable L .}$$

LE PROCESSUS CROISSANT ASSOCIE A M

Prenons l'exemple de la dimension finie : M_t ayant des composantes M_{it} dans une base orthonormale, le véritable "processus croissant" est la matrice des crochets $\langle M_i, M_j\rangle_t$. Nous étendons cela :

PROPOSITION 1. Il existe un processus prévisible[1] (σ_t) sur Ω, à valeurs dans $B(H,H)$, possédant les propriétés suivantes

1) Pour tout (s,ω), $\sigma_s(\omega)$ est symétrique positive, de norme ≤ 1.
2) Pour tout (s,ω), toute base orthonormale (e_i) de H, on a

$$\Sigma_i \ \sigma_s(\omega\ ;\ e_i, e_i) \leq 1$$

3) Quels que soient $x\in H$, $y\in H$, le crochet des deux martingales réelles $(x|M_t)$ et $(y|M_t)$ est

$$(5) \qquad < (x|M),(y|M) >_t = \int_0^t \sigma_s(x,y)d\langle\!\langle M,M\rangle\!\rangle_s$$

DEMONSTRATION. Soit D un espace vectoriel sur les rationnels, dénombrable, dense dans H. Nous savons d'après l'inégalité de KUNITA-WATANABE que

$$\text{(p.s.)} \int_u^v |d<(x|M),(y|M)>_s| \leq \left(\int_u^v d<(x|M),(x|M)>_s\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_u^v d<(y|M),(y|M)>_s\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \int_u^v d\langle\!\langle M,M\rangle\!\rangle_s \quad \text{si } \|x\|\leq 1,\ \|y\|\leq 1 \ .$$

Ceci, parce que $\|M_t\|^2 - (x|M_t)^2$, $\|M_t\|^2 - (y|M_t)^2$ sont des sousmartingales si $\|x\|\leq 1$, $\|y\|\leq 1$. Nous pouvons donc choisir une densité prévisible $\sigma_s(x,y)$ de $d<(x|M),(y|M)>_t$ par rapport à $d\langle\!\langle M,M\rangle\!\rangle_t$.

Ce choix étant fait arbitrairement pour $x,y \in D$, nous décidons de remplacer par 0 la fonction $\sigma_s(\omega\ ;\ .,.)$ sur $D\times D$ si

a) $\sigma_s(\omega\ ;\ x,y)$ n'est pas une fonction Q-bilinéaire sur $D\times D$,

b) $\sigma_s(\omega\ ;\ x,x)$ n'est pas positive sur D, et majorée par $\|x\|^2$.

Comme nous ne modifions σ que sur une réunion dénombrable d'ensembles négligeables pour la mesure $d\langle\!\langle M,M\rangle\!\rangle_s$, et d'ailleurs prévisibles, nous avons encore une densité, et la propriété a) est alors vérifiée partout sur $D\times D$. Alors $\sigma_s(\omega)$ se prolonge par continuité à $H\times H$, et 1) et 3) se vérifient sans aucune peine sur H entier.

1. B(H,H) n'est pas séparable, et nous établissons ici la prévisibilité ordinaire. La prévisibilité forte sera prouvée plus loin.

Passons à 2). Fixons un entier n , et désignons par $e_1,\dots,e_n$ un système orthonormal à n éléments. Le processus $\|M_t\|^2 - \Sigma_i(e_i|M_t)^2$ étant une sousmartingale, nous avons $\langle\!\langle M,M\rangle\!\rangle_t \geqq \Sigma_i\langle(e_i|M),(e_i|M)\rangle_t$, ce qui s'écrit $\Sigma_i\ \sigma_s(e_i,e_i) \leqq 1$ p.p. pour la mesure $d\langle\!\langle M,M\rangle\!\rangle$. L'ensemble des systèmes orthonormaux à n éléments étant séparable (pour la topologie de H^n) et σ_s étant de norme $\leqq 1$, nous pouvons en remplaçant σ_s par 0 sur une réunion dénombrable d'ensembles (prévisibles) de mesure nulle dans $\mathbb{R}_+\times\Omega$, assurer que $\Sigma_i\ \sigma_s(e_i,e_i) \leqq 1$ identiquement pour tout système orthonormal à n éléments, puis faire tendre n vers l'infini, d'où 2) identiquement. $\square$

REMARQUE. Comme $\langle\!\langle M,M\rangle\!\rangle = \Sigma_i\langle(e_i|M),(e_i|M)\rangle$, on peut supposer (quitte à modifier σ sur un ensemble de mesure nulle) que l'on a identiquement $\Sigma_i\ \sigma_s(\ \omega\ ;\ e_i,e_i) = 1$.

FORMES NUCLEAIRES, PREVISIBILITE FORTE DE σ

Nous établissons maintenant, pour être complets, une série de résultats très faciles d'analyse fonctionnelle. La conséquence en sera la prévisibilité forte du processus qu'on vient de construire.

Soit σ une forme bilinéaire continue sur H, et soit u l'opérateur associé ($\sigma(x,y) = (u(x)|y)$). Nous supposons pour commencer que σ est symétrique et positive.

a) Supposons que H soit de dimension finie, et soit (e_i) une base orthonormale de H. Alors $\Sigma_i\ \sigma(e_i,e_i) = \mathrm{Tr}(u)$ ne dépend pas de la base. En considérant une base orthonormale formée de vecteurs propres de u, on vérifie que $\sigma(x,x) \leqq \|x\|^2\mathrm{Tr}(u)$ pour tout $x\in H$.

b) Maintenant, passons en dimension infinie, soit toujours (e_i) une base orthonormale, désignons par H_n l'espace engendré par les n premiers vecteurs, par p_n le projecteur orthogonal correspondant. Nous supposons que $\Sigma_i\ \sigma(e_i,e_i) = 1$, et posons $r_n = \Sigma_{n+1}^{\infty}\ \sigma(e_i,e_i)$, $\sigma_n(x,y) = \sigma(p_n(x),p_n(y))$. Notre premier travail va consister à montrer que $\sigma_n \to \sigma$ <u>en norme</u> dans B(H,H) lorsque $n\to\infty$. Comme les formes symétriques positives de rang fini σ_n appartiennent manifestement à un sous-espace <u>séparable</u> de B(H,H), nous aurons établi la prévisibilité forte du processus (σ_t) .

Considérons deux vecteurs x,y de H, de norme $\leqq 1$. Supposons d'abord qu'ils appartiennent à H_m , avec $m>n$. Alors, d'après a) ci-dessus

$$\sigma(x,x) \leqq \|x\|^2\Sigma_1^m \sigma(e_i,e_i) \leqq 1, \text{ et de même pour } \sigma(y,y)$$

De même, en calculant dans $H_m \Theta H_n$

$$\sigma(x-p_nx,x-p_nx) \leqq \|x\|^2\Sigma_{n+1}^m \sigma(e_i,e_i) \leqq r_n \quad (\text{ de même pour } y\ )$$

Comme σ est positive, l'inégalité de Minkowski nous permet de majorer $\sigma(x,y-p_ny)$, etc. Nous en déduisons

$$|\sigma(x,y)-\sigma_n(x,y)| = |\sigma(x,y-p_ny)+\sigma(x-p_nx,p_ny)| \leqq 2\sqrt{r_n}$$

Ceci, pour x et y appartenant à H_m , mais l'extension lorsque $m\to\infty$ est immédiate, et on a le résultat désiré.

c) Remarquer un résultat très simple : il résulte de a) ci-dessus que pour tout système orthonormal fini (f_k) contenu dans l'un des H_m on a $\Sigma_k\sigma(f_k,f_k) \leqq 1$. Mais tout système orthonormal fini peut être approché par un système orthonormal contenu dans H_m si m est grand. On en déduit que $\Sigma_k\ \sigma(f_k,f_k) \leqq 1$ pour <u>tout</u> système orthonormal fini, puis pour toute base orthonormale. Ainsi, si σ est une forme symétrique $\geqq 0$ on a $\Sigma_k\ \sigma(f_k,f_k) \leqq \Sigma_i\ \sigma(e_i,e_i)$ pour tout couple de bases orthonormales. Il y a alors égalité, et la valeur commune de toutes ces sommes est notée $\mathrm{Tr}(\sigma)$, ou $\mathrm{Tr}(u)$ (on parle de formes ou opérateurs <u>à trace</u>, ou <u>nucléaires</u>).

d) La forme σ est limite en norme de formes de rang fini, l'opérateur u limite en norme d'opérateurs de rang fini . Donc u est compact (sur σ , cela se traduit de la manière suivante : si des x_α convergent faiblement vers x, leurs normes restant bornées, et si des y_α convergent de même vers y, alors $\sigma(x_\alpha,y_\alpha)\to\sigma(x,y)$). Il existe donc une base orthonormale formée de vecteurs propres pour u, et dans cette base (e_i), σ s'écrit

$$\sigma(x,y) = \Sigma_i\ \lambda_i(x|e_i)(y|e_i) \quad , \text{ avec } \lambda_i \geqq 0,\ \Sigma_i\lambda_i = \mathrm{Tr}(\sigma)$$

Plus généralement, soient σ une forme bilinéaire bornée (non nécessairement symétrique, ni positive). On dit que σ est <u>nucléaire</u> s'il existe des vecteurs x_i et y_i de norme $\leqq 1$, des coefficients λ_i , tels que

$$\sigma(x,y) = \Sigma_i\ \lambda_i(x|x_i)(y|y_i) \qquad , \ \Sigma_i\ |\lambda_i| < \infty$$

et l'on désigne par $|\sigma|_1$ la borne inférieure des $\Sigma_i|\lambda_i|$ relatives à toutes les décompositions possibles. On vérifie sans peine que $|\sigma| \leqq |\sigma|_1$, que $|\ \ |_1$ est une norme sur l'espace des formes linéaires, pour laquelle celui-ci est complet, que toute forme nucléaire est compacte. En fait, nous n'aurons jamais à nous servir des formes nucléaires non symétriques.

Lorsque σ est nucléaire et symétrique, il existe une base orthonormale (e_i) dans laquelle $\sigma(x,y)$ s'écrit $\Sigma_i\ \lambda_i(x|e_i)(y|e_i)$, et il est assez facile de voir (se reporter aux pages 10 et 11) qu'alors $|\sigma|_1 = \Sigma_i|\lambda_i|$. En particulier, si σ est positive, on a $|\sigma|_1 = \mathrm{Tr}(\sigma)$.

Abandonnons un peu l'analyse fonctionnelle élémentaire pour revenir aux martingales.

LE PROCESSUS CROISSANT ASSOCIE A M (SUITE)

DEFINITION. Nous notons $<(x|M),(y|M)>_t$ l'intégrale $\int_0^t \sigma_s(x,y)d\langle\!\langle M,M\rangle\!\rangle_s$, relative aux versions de (σ_t) construites plus haut.

Le processus $<(.|M),(.|M)>$ ainsi construit, à valeurs dans $B(H,H)$, est appelé le <u>processus croissant associé</u> à M.

Comme nous l'avons dit plus haut pour $< L, (.|M) >$, nous utiliserons souvent des notations plus suggestives, telles que $< (x|dM_s),(y|dM_s)>$ pour $d<(x|M),(y|M)>_s$. Les remarques suivantes justifient la terminologie utilisée, et montrent combien le cas hilbertien ressemble au cas réel. Le processus $<(.|M),(.|N)>$ qui y apparaît est défini par polarisation, comme dans le cas réel.

- D'abord, $<(.|M),(.|M)>$ est <u>vraiment</u> un processus croissant, à valeurs dans $B(H,H)$, ordonné par le cône des formes bilinéaires positives. Il prend en fait ses valeurs dans le cône positif $\mathfrak{S}^+$ de l'espace $\mathfrak{S}$ des formes bilinéaires symétriques nucléaires, muni de la norme $|\ |_1$, et l'on a

$$\mathrm{Tr}(<(.|M),(.|M)>_t) = \langle\!\langle M,M\rangle\!\rangle_t$$

et plus généralement

$$|<(.|M),(.|M)>_t - <(.|M),(.|M)>_s|_1 = \langle\!\langle M,M\rangle\!\rangle_t - \langle\!\langle M,M\rangle\!\rangle_s$$

l'application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathfrak{S}$ qui à t associe $\int_0^t <(.|dM_s(\omega)),(.|dM_s(\omega))>$ est donc à variation bornée (pour la norme $|\ |_1$), et sa variation totale est le processus croissant scalaire $\int_0^t \langle\!\langle dM_s(\omega),dM_s(\omega)\rangle\!\rangle$.

Cela n'a rien de profond, bien sûr : c'est juste le fait que < , > nous est donné comme une intégrale par rapport à $\not\leftarrow$, $\not\rightarrow$ (fait qui entraîne aussi, de manière évidente, le caractère càdlàg. des trajectoires dans la topologie de $\mathfrak{S}$).

- Maintenant, regardons le processus $M_t^{\otimes 2} = M_t \otimes M_t$ à valeurs dans $B(H,H)$ - c'est la première fois que nous utilisons un signe $\otimes$ dans cet exposé, et nous le faisons au sens le plus banal, où si f désigne une fonction réelle sur F, g une fonction réelle sur G, $f\otimes g$ désigne la fonction $(x,y) \longmapsto f(x)g(y)$ sur $F\times G$; ici $M_t(\omega)\in H'$ est une forme linéaire sur H, et $M_t(\omega)\otimes M_t(\omega)$ une forme bilinéaire sur $H\times H$. Ce processus prend en fait ses valeurs dans $\mathfrak{S}$, il est càdlàg. pour la topologie de la norme $|\ |_1$, et c'est une <u>sousmartingale</u>. En effet, si l'on a $s<t$, $A\in\mathcal{F}_s$, la forme bilinéaire symétrique

$$\int_A (M_t^{\otimes 2} - M_s^{\otimes 2})P$$

est positive, sa valeur en (x,x) étant $\int_A ((x|M_t)^2-(x|M_s)^2)P$. Ce que nous avons fait, c'est réaliser la <u>décomposition de cette sousmartingale</u> , $<(.|M),(.|M)>$ étant le processus croissant correspondant. Bien entendu, nous avons fait cela à la main, car nous ne disposons pas d'une théorie générale des sousmartingales à valeurs dans les Banach ordonnés.

- Nous terminons sur un résultat que nous recommandons d'omettre en première lecture, et pour lequel il nous faut quelques considérations d'analyse fonctionnelle élémentaire. Soit σ une forme bilinéaire symétrique (mais non positive) nucléaire. Soit une représentation de σ sous la forme

$$\sigma(x,y) = \Sigma_j\ \mu_j(x|x_j)(y|y_j) \quad (\|x_j\|\leqq 1,\ \|y_j\|\leqq 1\ ,\ \Sigma_j|\mu_j|<\infty)$$

Soit (e_i) une base orthonormale de H. Nous avons

$$\Sigma_i|\sigma(e_i,e_i)| \leqq \Sigma_i\Sigma_j|\mu_j||(e_i|x_j)||(e_i|y_j)| = \Sigma_j\Sigma_i$$
$$\leqq \Sigma_j\ |\mu_j|(\Sigma_i(e_i|x_j)^2)^{1/2}(\Sigma_i(e_i|y_j)^2)^{1/2} \leqq \Sigma_j|\mu_j|$$

En passant à l'inf sur la droite, on obtient $\Sigma_i|\sigma(e_i,e_i)|\leqq|\sigma|_1$.

Mais en prenant pour (e_i) une base orthonormale de vecteurs propres pour u, on a $\sigma(x,y) = \Sigma_i\ \lambda_i(x|e_i)(y|e_i)$, avec $\lambda_i=\Sigma_i\sigma(e_i,e_i)$, et par définition de $|\sigma|_1$, nous avons $|\sigma|_1\leqq\Sigma_i|\lambda_i|$. D'où finalement

Si σ est nucléaire symétrique, $|\sigma|_1$ est le sup des $\Sigma_1^n|\sigma(e_i,e_i)|$ pour tous les systèmes orthonormaux $(e_1,\ldots,e_n)$ finis.

En fait, on peut se borner à un système dénombrable de tels systèmes orthonormaux finis. Maintenant, considérons deux martingales hilbertiennes M et N. Nous avons pour presque tout ω , d'après l'inégalité de KUNITA-WATANABE

$$\left|\int_u^v <(e_i|dM_s(\omega)),(e_i|dN_s(\omega))>\right| \leqq \left(\int_u^v <(e_i|dM_s(\omega)),(e_i|dM_s(\omega))>\right)^{1/2}.\left(\quad\right)^{1/2}$$

où la dernière parenthèse est le terme analogue relatif à N. Sommant sur i et appliquant l'inégalité de Schwarz, puis passant au sup sur les systèmes orthonormaux finis, nous obtenons

$$\left| <(.|M),(.|N)>_u^v\right|_1 \leqq (\langle\!\langle M,M\rangle\!\rangle_u^v)^{1/2}(\langle\!\langle N,N\rangle\!\rangle_u^v)^{1/2} \quad \text{p.s.}$$

Nous savons que le processus $<(.|M),(.|N)>_t$ à **valeurs dans** $\mathfrak{S}$ a des trajectoires à variation bornée - cela résulte de sa construction par polarisation. En appliquant l'inégalité précédente à des intervalles de subdivision de $[0,t]$ et en passant au sup, nous avons que

$$\int_0^t |d<(.|M),(.|N)>|_1 \quad \text{(c'est à dire la variation totale de la trajectoire sur } [0,t] \text{)}$$

(6) $$\leqq (\langle\!\langle M,M\rangle\!\rangle_t)^{1/2}(\langle\!\langle N,N\rangle\!\rangle_t)^{1/2}$$

c'est à dire, une seconde généralisation vectorielle de l'inégalité de KUNITA-WATANABE.

INTEGRALES STOCHASTIQUES RELATIVES AU PRODUIT SCALAIRE

Reprenons le processus prévisible étagé donné par la formule (2), mais cette fois, avec des variables aléatoires A à valeurs dans H, non dans $\mathbb{R}$, et définissons

$$\int_0^\infty (X_s|dM_s) = \Sigma_k \ (A_k|M_{t_{k+1}}-M_{t_k})$$

On vérifie sans aucune peine la formule

(7) $$E[\|\int_0^\infty (X_s|dM_s)\|^2] = E[\int_0^\infty <(X_s|dM_s),(X_s|dM_s)>]$$
$$= E[\int_0^\infty \sigma_s(X_s,X_s)\ d\langle\!\langle M,M\rangle\!\rangle_s\ ] .$$

et un raisonnement familier permet d'étendre l'intégrale stochastique à tous les processus prévisibles X tels que le second membre de (7) soit fini. On définit $\int_0^t (X_s|dM_s)$ pour t fini comme d'habitude.

Cette intégrale stochastique admet une caractérisation à la KUNITA-WATANABE : posons

$$J_t = \int_0^t (X_s|dM_s)$$

martingale réelle de carré intégrable, et soit (L_t) une martingale réelle de carré intégrable. Notons (A_t) le processus à variation finie à valeurs dans H' construit plus haut

$$A_t = \int_0^t < dL_s, \ (.|dM_s) >$$

Alors nous avons $<L,J>_t = \int_0^t (X_s|dA_s)$ p.s., et la validité de cette relation pour tout L caractérise (J_t).

INTEGRALES STOCHASTIQUES D'OPERATEURS

Nous ne nous proposons pas ici de faire une théorie très générale, et nous nous bornerons à intégrer des opérateurs de norme ≤ 1 .

Supposons d'abord que H soit un espace hilbertien de dimension finie, avec une base orthonormale (e_i), la base duale (e^i). Nous poserons comme plus haut $< dM_{is}, dM_{js}> = \sigma_{ijs} d\{M,M\}_s$. Soit (A_s) un processus prévisible à valeurs dans l'ensemble des opérateurs linéaires de norme ≤ 1, c'est à dire tel que les coefficients de la matrice de A_s

$$A_s(\omega)e_i = \Sigma_j \, a^j_{is}(\omega)e_j$$

soient des processus prévisibles réels. Nous pouvons définir de manière évidente la martingale de carré intégrable[1] à valeurs dans H'

$$N_t = \int_0^t |A^*_s dM_s) \ = \Sigma_k \ (\ \Sigma_i \int_0^t a^i_{ks} dM_{is})e^k$$

et nous vérifions les propriétés suivantes : d'abord, pour tout processus prévisible borné (X_s) à valeurs dans H

$$(8) \quad \int_0^t (X_s|dN_s) \quad = \quad \int_0^t (A_s X_s|dM_s)$$

En effet, comme X et A sont bornés, cela se ramène à un calcul immédiat sur les composantes. On a aussi

$$< dN_{ks}, \ dN_{\ell s} > \ = \ \Sigma_{ij} \ a^i_{ks} a^j_{\ell s} \sigma_{ijs} \ d\{M,M\}_s$$

ce qui s'écrit de manière intrinsèque

$$(9) \qquad <(x|dN_s),(y|dN_s)> = \sigma_s(A_s x, A_s y) d\{M,M\}_s$$

1. De carré intégrable, parce que toutes ses composantes le sont, les coefficients a^i_{js} étant bornés.

et aussi

(10) $$d\langle\!\langle N,N\rangle\!\rangle_s = \mathrm{Tr}(\sigma_s(A_s\cdot,A_s\cdot))d\langle\!\langle M,M\rangle\!\rangle_s \quad .$$

Nous passons en dimension infinie. La chose à ne pas faire , comme l'ont remarqué les Rennais, consiste à partir des processus prévisibles étagés, puis à passer à la limite : en effet, l'espace des opérateurs linéaires bornés de H dans H n'est pas séparable, et le passage à la limite donnera beaucoup trop peu de processus. Soit (A_s) un processus prévisible à valeur dans l'ensemble des opérateurs de norme 1, prévisible signifiant simplement que pour tout couple (x,y) le processus réel $(A_s x|y)$ est prévisible, ou encore que les coefficients a^j_{is} de la matrice de A_s dans une base orthonormale (e_i) sont prévisibles. Pour tout i, nous définissons la martingale réelle

$$N_{it} = \int_0^t (A_s e_i|dM_s)$$

$$< N_i,N_i >_t = \int_0^t \sigma_s(A_s e_i,A_s e_i)d\langle\!\langle M,M\rangle\!\rangle_s$$

Il nous faut maintenant un petit résultat d'analyse fonctionnelle : soit σ une forme bilinéaire symétrique positive de trace 1, et soit A un opérateur de norme $\leqq 1$. Soit τ la forme symétrique positive $(x,y) \longmapsto \sigma(Ax,Ay)$. Choisissons une base de vecteurs propres (f_i) pour σ

$$\sigma(x,y) = \Sigma_i\ \lambda_i(x|f_i)(y|f_i),\ \text{avec}\ \lambda_i \geqq 0,\ \Sigma_i\lambda_i = 1$$

alors τ admet la représentation

$$\tau(x,y) = \Sigma_i\ \lambda_i(x|A^*f_i)(y|A^*f_i)$$

et comme $\|A^*f_i\| \leqq 1$, nous avons vu plus haut que $\mathrm{Tr}(\tau) \leqq \Sigma_i|\lambda_i|$ - si la norme de A n'était pas $\leqq 1$, nous aurions $\mathrm{Tr}(\tau) \leqq \|A\|^2\mathrm{Tr}(\sigma)$. En sommant sur i, nous avons

$$E[\ \Sigma_i < N_i,N_i >_t] \leqq E[\int_0^t \mathrm{Tr}(\sigma_s(A_s\cdot,A_s\cdot))d\langle\!\langle M,M\rangle\!\rangle_s\ ] \leqq E[\langle\!\langle M,M\rangle\!\rangle_t]$$

Donc il existe une martingale hilbertienne (càdlàg.) (N_t) de composantes (N_{it}), et elle satisfait à (10). Il est alors très facile - nous laisserons les détails au lecteur - de vérifier qu'elle satisfait à (8) , ce qui en montre le caractère intrinsèque, puis à (9).

Le petit résultat sur la trace que l'on vient d'utiliser nous donne, à partir de (10)

(11) $$\langle\!\langle N,N\rangle\!\rangle_t \leqq \int_0^t \|A_s\|^2 d\langle\!\langle M,M\rangle\!\rangle_s$$

qui est souvent précieuse, lorsqu'on ne fait pas la restriction que les A_s ont une norme uniformément bornée.

Une dernière remarque : soit (B_s) un second processus prévisible à valeurs dans les opérateurs de norme ≤ 1. Le processus $C_s = A_s B_s$ est alors prévisible, et on a $\int_0^t |B_s^* dN_s) = \int_0^t |C_s dM_s)$.

DIAGONALISATION D'UNE MARTINGALE HILBERTIENNE

Nous disons que la martingale hilbertienne M est <u>diagonale</u> - dans une base orthonormale (e_i) donnée[1] - si les composantes M_{it} et M_{jt} sont orthogonales pour $i \neq j$, ou encore si toutes les formes bilinéaires σ_{ijs} sont diagonales. Notre but consiste à démontrer le théorème suivant, dû à GALTCHOUK. Nous fixons une base (e_i) :

THEOREME 1. <u>Il existe un processus prévisible</u> (T_s) <u>à valeurs dans l'ensemble des opérateurs unitaires, tel que la martingale</u>

(12) $$N_t = \int_0^t |T_s^* dM_s)$$

<u>soit diagonale dans la base</u> (e_i).

Le principe est simple. Considérons une base orthonormale (f_i) comme un élément de $H^{\mathbb{N}}$: cela permet de définir une structure mesurable sur l'ensemble des bases. Supposons établi le résultat suivant :

<u>Il existe une application mesurable associant à toute forme bilinéaire symétrique compacte</u> σ <u>une base orthonormale</u> $F(\sigma)$, <u>dans laquelle</u> σ <u>est diagonale</u>.

La structure mesurable sur l'ensemble des formes bilinéaires est ici engendrée par les applications $\sigma \mapsto \sigma(x,y)$, $x \in H$, $y \in H$. Il n'y a aucune difficulté à montrer que sur l'ensemble des formes symétriques positives de trace 1, elle coïncide avec la structure borélienne associée à la distance $\| \ \|$ ou $| \ |_1$.

Ce théorème sera établi en appendice, après la bibliographie de l'exposé. Déduisons le théorème 1. Soit T_s la matrice unitaire de passage de la base (e_i) à la base $F(\sigma_s) = (f_{si})$. Ce processus est prévisible, nous définissons (N_t) par (12) et nous avons

$$N_{it} = (e_i | N_t) = \int_0^t (e_i | T_s^* dM_s) = \int_0^t (T_s e_i | dM_s) = \int_0^t (f_{is} | dM_s)$$

et par conséquent, pour $i \neq j$

$$\langle N_i, N_j \rangle_t = \int_0^t \sigma_s(f_{is}, f_{js}) d\langle\!\langle M,M \rangle\!\rangle_s = 0$$

1. En réalité, une martingale diagonale possède des propriétés intrinsèques (commutation des opérateurs associés aux formes σ_s).

et la martingale N est bien diagonale. Noter qu'on a alors aussi

(13) $$M_t = \int_0^t |T_s^{*-1} dN_s) \,[= \int_0^t |T_s dN_s) \text{ si l'on identifie H et H'}].$$

Nous en déduisons le théorème de GALTCHOUK, qui donne un résultat pleinement satisfaisant sur les sous-espaces stables .

THEOREME 2. Soient $M_1,\dots,M_k$ des martingales de carré intégrable en nombre fini, M la martingale $(M_1,\dots,M_k)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^k$, U une martingale de carré intégrable à valeurs réelles, appartenant au sous-espace stable engendré par $(M_1,\dots,M_k)$. Il existe alors un processus prévisible X à valeurs dans $\mathbb{R}^k$ tel que l'on ait

(14) $$U_t = \int_0^t (X_s|dM_s) \ .$$

DEMONSTRATION. Nous introduisons la martingale N construite dans la démonstration précédente : N est diagonale et

$$M_t = \int_0^t |T_s dN_s) \quad , \qquad N_t = \int_0^t |T_s^* dM_s)$$

Les M_i étant des intégrales stochastiques par rapport aux N_i, U appartient au sous-espace stable engendré par les N_i. Comme N est diagonale, U est la somme de ses projections sur les composantes N_i, soit

$$U_t = \int_0^t Y_s^1 dN_{1s} + \ \dots \ + \int_0^t Y_s^k dN_{ks}$$

où Y_s^i est un processus prévisible tel que $E[\int_0^t Y_s^{i2} d\langle N_{is}, N_{is}\rangle] < \infty$ pour tout t. Cela s'écrit aussi

$$U_t = \int_0^t (Y_s|dN_s)$$

où Y_s est un processus prévisible vectoriel tel que l'on ait pour tout t $E[\int_0^t \langle (Y_s|dN_s),(Y_s|dN_s)\rangle] < \infty$. On a alors aussi $U_t = \int_0^t (X_s|dM_s)$ avec $X_s = T_s Y_s$, processus prévisible tel que $E[\int_0^t \langle (X_s|dM_s),(X_s|dM_s)\rangle]$ $< \infty$ pour tout t . Seulement, cette condition n'entraîne pas que $E[\int_0^t X_s^{i2} d\langle M_i, M_i\rangle_s] < \infty$ pour tout i, et on ne peut décomposer l'intégrale vectorielle $\int (X_s|dM_s)$ en une somme d'intégrales stochastiques suivant les composantes, comme dans le cas diagonal.

Il y a une extension triviale en dimension infinie, mais je ne suis pas sûr qu'elle soit intéressante.

BIBLIOGRAPHIE

Comme je l'ai dit dans l'introduction, la motivation de cet exposé vient d'un travail de L.I. GAL'TCHOUK : Structure de certaines martingales, paru dans les Proceedings de l'Ecole-Séminaire sur la théorie des processus aléatoires, Drusnininkai 1974, vol.1, p. 7-32. La démonstration du théorème qui nous intéresse ici comporte une erreur, malheureusement, et je ne pense pas que GALTCHOUK ait publié la démonstration nouvelle qu'il nous a exposée à Strasbourg.

L'article le plus ancien sur les martingales hilbertiennes est dû à KUNITA : Stochastic integrals based on martingales taking values in Hilbert spaces, Nagoya M.J., 38, 1970, p.41-52.

Après cela, je dois citer la thèse de 3e Cycle de Marc YOR (Paris VI, 1973), qui réfère aussi à un cours de 3e Cycle de NEVEU de 1972. L'accent y est mis plutôt sur les mouvements browniens hilbertiens, à ce qu'il semble (je n'ai pas vu le cours de NEVEU), et je n'ai pas directement utilisé ces travaux pour la rédaction de l'exposé. En revanche, j'ai consulté une série de travaux Rennais, que METIVIER m'a aimablement communiqués (je n'ai pas vu [3] ci-dessous : METIVIER y réfère pourtant au sujet de la remarque fondamentale, suivant laquelle l'intégrale stochastique opératorielle doit sortir du champ des processus <u>fortement</u> prévisibles, et je pense que l'effort " pédagogique" de [3] doit être voisin de celui de cet exposé).

[1]. PELLAUMAIL (J.). Sur l'intégrale stochastique et la décomposition de Doob-Meyer. Astérisque 9, 1973, 125 pages.

[2]. METIVIER (M.). Notes aux C.R. sur les intégrales hilbertiennes. t.276 (1973) , p.939 et 1009, et t.277 (1973), p.809.

[3]. PISTONE (G.). Thèse de 3e cycle (Rennes), non publiée.

[4]. METIVIER (M.) et PISTONE (G.). Une formule d'isométrie pour l' i.s. hilbertienne et équations d'évolution linéaires stochastiques. Z.f.W. 33, 1975, p.1-18.

[5]. METIVIER (M.). I.s. par rapport à des martingales à valeurs dans des espaces de Banach réflexifs. Teoriia Ver. 19, 1974.

Parmi les problèmes étudiés dans ces articles, et non abordés ici, on peut citer : la convergence de sommes de " carrés " d'accroissements vers la variation quadratique, le second processus croissant, et la localisation ([2] ci-dessus), et la formule d'ITO ([4]).

Du point de vue de la présentation, ces travaux ont en commun l'idée de base de METIVIER (exposée et développée par PELLAUMAIL dans [1]) suivant laquelle les intégrales stochastiques sont des intégrales par rapport à de vraies mesures vectorielles. Je suis persuadé que c'est un point de vue intéressant et fructueux, mais il y a certainement peu de gens qui connaissent à la fois la théorie générale des processus et la théorie des mesures vectorielles. C'est pourquoi, précisément, j'ai essayé de retraduire dans notre langage une partie des résultats de ces articles.

APPENDICE : UN LEMME D'ANALYSE FONCTIONNELLE

Nous démontrons le lemme figurant dans la démonstration du théorème 1. Il est plus agréable de travailler sur l'ensemble C des opérateurs symétriques compacts, et <u>positifs</u>[1].

Soit $\lambda_1(u) = \sup_{\|x\|\leq 1}(u(x)|x)$: c'est une fonction borélienne sur C , la plus grande valeur propre de u. Nous savons d'après la théorie de RIESZ que si $\lambda_1(u) \neq 0$, alors le sous-espace propre correspondant est de dimension finie (et non nulle).

Soit B_1 l'ensemble des (u,x) tels que $u\in C$, $\|x\|=1$, $\lambda_1(u)\neq 0$, $u(x)=\lambda_1(u)x$. C'est un borélien de $C\times H$, et la coupe de B_1 par tout u tel que $\lambda_1(u)\neq 0$ est compacte. D'après un marteau pilon de théorie de la mesure[2] (voir dans le séminaire de l'an dernier l'exposé de DELLACHERIE sur les ensembles analytiques), il existe une fonction borélienne $\varepsilon_1(u)$ définie sur l'ensemble des u tels que $\lambda_1(u)\neq 0$, et telle que $(u,\varepsilon_1(u))\in B_1$ pour tout u tel que $\lambda_1(u)\neq 0$. Si $\lambda_1(u)=0$, nous prendrons $\varepsilon_1(u)=0$. ε_1 est une fonction borélienne sur C.

Soit $\lambda_2(u) = \sup_{\|x\|\leq 1,\ x\perp\varepsilon_1(u)} (u(x)|x)$, fonction borélienne sur C, et soit B_2 l'ensemble des (u,x) tels que $u\in C$, $\|x\|=1$, $x\perp\varepsilon_1(u)$, $\lambda_2(u)\neq 0$ $u(x)=\lambda_2(u)x$. D'après le même raisonnement, nous pouvons construire une section $\varepsilon_2(u)$ de B_2 , et la prolonger par 0 si $\lambda_2(u)=0$. Nous continuons ainsi par récurrence à définir $\lambda_n(u)$ et $\varepsilon_n(u)$.

Maintenant, nous savons d'après la théorie de RIESZ que les $\lambda_n(u)$ tendent vers 0, et que $u(x) = \Sigma_n \lambda_n(u)(x|\varepsilon_n(u))\varepsilon_n(u)$. Nous distinguons trois cas.

a) Les u tels que les $\varepsilon_n(u)$ forment une base de H forment un ensemble borélien dans C. Supposant par exemple H de dimension infinie, cela signifie en effet que $x=\Sigma_n (x|\varepsilon_n(u))\varepsilon_n(u)$, x parcourant H ou un ensemble dénombrable dense. Sur cet ensemble, le problème est résolu.

b) Les u tels que $\varepsilon_n(u)=0$ pour n assez grand (i.e. $\lambda_n(u)=0$ pour n grand) forment un ensemble borélien. Soit $p(x) = x-\Sigma_i (x|\varepsilon_n(u))\varepsilon_n(u)$. En appliquant le procédé d'orthogonalisation aux $e_i-p(e_i)$ non nuls nous complétons le système fini des $\varepsilon_k(u)$ non nuls en une base, qui est celle que nous cherchons.

c) Les u tels que $\varepsilon_n(u)\neq 0$ pour tout n, mais que les $\varepsilon_n(u)$ ne forment pas une base, se traitent de la même manière, mais il faut ranger les deux systèmes obtenus en une seule suite par entrelacement.

1. Nous n'avons à diagonaliser que des formes positives.
2. On peut s'en passer de manière élémentaire.

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1975-76

NOTES SUR LES INTEGRALES STOCHASTIQUES . II

LE THEOREME FONDAMENTAL SUR LES MARTINGALES LOCALES

(P.A. Meyer)

Toute la théorie des intégrales stochastiques repose sur une seule propriété des martingales locales (voir le cours sur les I.S., chap. IV, n°8 , p.294-295) : le fait que celles-ci se décomposent localement en somme d'une martingale de carré intégrable, et d'une martingale à variation intégrable. Le but de cette note est de donner une démonstration de ce résultat qui m'a été communiquée dans une lettre de K.A.YEN, et qui est bien meilleure que celle du cours. YEN l'a publiée, mais en chinois.

Considérons une martingale locale M nulle en 0, et considérons le processus croissant

(1) $$\alpha_t = \sum_{s \leq t} |\Delta M_s| I_{\{|\Delta M_s| \geq 1\}}$$

Nous allons montrer

LEMME 1. α <u>est localement intégrable</u>.

Admettons le lemme 1 pour un instant (la démonstration est très simple). Nous pouvons définir le processus à variation localement intégrable

(2) $$A_t = \sum_{s \leq t} \Delta M_s I_{\{|\Delta M_s| \geq 1\}}$$

et son compensateur prévisible $\tilde{A}$, puis poser

(3) $$M = (A-\tilde{A}) + N$$

où N est une martingale locale. Nous allons prouver (très simplement aussi)

LEMME 2. <u>Les sauts de</u> N <u>sont bornés par</u> 2.

Dans ces conditions, le "théorème fondamental" est établi. Soit en effet (R_n) une suite croissante de temps d'arrêt telle que $R_n \uparrow +\infty$ et que $E[\int_0^{R_n} |dA_s|+|d\tilde{A}_s|] < \infty$; soit $S_n = \inf\{ t : |N_t| \leq n \}$, de sorte que $|N_t| \leq n+2$ sur $[0,S_n]$; soit enfin $T_n = R_n \wedge S_n$. Alors la martingale locale arrêtée M^{T_n} est somme de $(A-\tilde{A})^{T_n}$ (à variation intégrable), et de N^{T_n}

(martingale bornée[1]). C'est la conclusion désirée.

Passons à la démonstration des deux lemmes. D'après la définition même d'une martingale locale, nous pouvons nous ramener par arrêt au cas où M est une martingale uniformément intégrable nulle en 0 .

DEMONSTRATION DU LEMME 1. Comme il n'y a qu'un nombre fini de sauts ≥ 1 sur tout intervalle fini, le processus croissant α est à valeurs finies. Soit $U_n = \inf \{ s : \alpha_s \geq n \text{ ou } |M_s| \geq n \}$. Nous avons $|\Delta M_{U_n}| \leq |M_{U_n}| + |M_{U_n -}| \leq |M_{U_n}| + n$, puis $\alpha_{U_n} \leq \alpha_{U_n -} + |\Delta M_{U_n}| \leq |M_{U_n}| + 2n$, qui appartient à L^1 du fait que (M étant uniformément intégrable) M_{U_n} est intégrable. Comme $U_n \uparrow \infty$, on voit que α est localement intégrable.

DEMONSTRATION DU LEMME 2. Quitte à arrêter encore M à l'un des temps d'arrêt précédents U_n , on peut supposer que M est uniformément intégrable, A à variation intégrable. Alors $\tilde{A}$ est aussi à variation intégrable, et N est une martingale uniformément intégrable.

En un temps totalement inaccessible T nous avons $\Delta\tilde{A}_T = 0$, donc $\Delta N_T = \Delta M_T - \Delta A_T = \Delta M_T I_{\{|\Delta M_T| \leq 1\}}$, et par conséquent $|\Delta N_T| \leq 1$.

En un temps prévisible T nous avons $\Delta\tilde{A}_T = E[\Delta A_T | \underline{\underline{F}}_{T-}]$, tandis que $E[\Delta M_T | \underline{\underline{F}}_{T-}] = 0$. Donc $\Delta N_T = \Delta M_T - E[\Delta M_T | \underline{\underline{F}}_{T-}] - (\Delta A_T - E[\Delta A_T | \underline{\underline{F}}_{T-}]) = \Delta(M-A)_T - E[\Delta(M-A)_T | \underline{\underline{F}}_{T-}]$. Cette différence est ≤ 2 en valeur absolue, car $|\Delta(M-A)_T| \leq 1$.

1. Dans le cours sur les i.s., on n'indique pas de décomposition au moyen d'une telle martingale bornée. Mais on en indique une (V,5) au moyen d'une martingale de $\underline{\underline{BMO}}$, et toute martingale de $\underline{\underline{BMO}}$ est localement bornée (à sauts bornés). La nouveauté est plutôt ici le fait que la décomposition $M=(A-\tilde{A})+N$ est "globale" (et la simplicité de la démonstration).

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1975-76

NOTES SUR LES INTEGRALES STOCHASTIQUES . III
SUR UN THEOREME DE C. HERZ ET D. LEPINGLE

(P.A. Meyer)

Commençons par rappeler quelques résultats du cours sur les i.s. (chap. V, n°29 ; chap. VI n°29) .

D'abord, le fait que l'espace $\underline{\underline{H}}^1$ admet deux caractérisations : soit comme l'espace des martingales locales M telles que $[M,M]_\infty^{1/2} \in L^1$ (nous parlerons alors de $\underline{\underline{H}}_q^1$, q pour quadratique), soit comme l'espace des martingales M telles que $M^* \in L^1$ (noté $\underline{\underline{H}}_m^1$, m pour maximal). Dans le cours, on prouve que le dual de $\underline{\underline{H}}_q^1$ est $\underline{\underline{BMO}}$, puis on démontre que $\underline{\underline{H}}_q^1 = \underline{\underline{H}}_m^1$.

Ensuite, le théorème de représentation de $\underline{\underline{BMO}}$: si une martingale M appartient à $\underline{\underline{BMO}}$, il existe deux processus à variation intégrable A'_t , A''_t , le premier adapté, le second prévisible, tels que $M_\infty = A'_\infty + A''_\infty$ et que l'on ait , pour tout temps d'arrêt T

$$(1) \qquad E[\int_{[T,\infty[} |dA'_s| + \int_{]T,\infty]} |dA''_s| \,|\underline{\underline{F}}_T] \leq c\|M\|_{\underline{\underline{BMO}}}$$

Plus précisément, $\underline{\underline{BMO}}$ étant le dual de $\underline{\underline{H}}^1$ peut être, lui aussi, muni de deux normes équivalentes, provenant des normes "q" et "m" sur $\underline{\underline{H}}^1$. Si la norme choisie est la norme "m", alors on a c=1. En fait, la démonstration de ce résultat n'utilise absolument pas l'aspect "quadratique" de la théorie de $\underline{\underline{H}}^1$-$\underline{\underline{BMO}}$.

Le but de cette note est de présenter les progrès récents sur ces deux questions : théorie de $\underline{\underline{H}}_m^1$, représentation de $\underline{\underline{BMO}}$. Il me semble que l'on comprend bien mieux, à présent, ce qui se passe.

1. Nous commençons par une remarque de D. LEPINGLE. Soit (B_t) un processus croissant prévisible, pouvant présenter un saut à l'infini, tel que $B_0=0$ et que $E[B_\infty - B_t|\underline{\underline{F}}_t] = X_t \leq 1$. Alors on a aussi $E[B_\infty - B_{T-}|\underline{\underline{F}}_T] \leq 2$. Autrement dit, le second type de processus à variation intégrable considéré dans (1) est un cas particulier du premier, et il existe une représentation de la forme $M_\infty = A'_\infty$, où apparaît un seul processus à variation intégrable (du type adapté à potentiel gauche borné). En un certain sens, cette représentation est moins bonne que (1), car la constante c n'est plus égale à 1 lorsque $\| \;\|_{\underline{\underline{BMO}}}$ est la norme "m" ; mais elle est aussi plus simple.

Démontrons la propriété annoncée. En un temps d'arrêt totalement inaccessible T on a $\Delta B_T=0$, puisque B est prévisible. En un temps d'arrêt prévisible T on a $\Delta B_T=-E[\Delta X_T|\underline{\underline{F}}_{T-}] \leqq 1$, puisque (X_t) est compris entre 0 et 1. Ainsi le processus ΔB est compris entre 0 et 1. Mais alors on a en tout temps d'arrêt T $E[B_\infty - B_{T-}|\underline{\underline{F}}_T] = E[B_\infty - B_T|\underline{\underline{F}}_T] + \Delta B_T = X_T + \Delta B_T$ $\leqq 2$.

2. Nous passons à une démonstration directe du théorème de représentation de $\underline{\underline{BMO}}$ sous cette forme (i.e. au moyen d'un seul processus **adapté** à variation intégrable). Cette démonstration n'utilise pas le fait que le dual de $\underline{\underline{H}}^1$ est $\underline{\underline{BMO}}$: elle part d'une martingale de $\underline{\underline{BMO}}$, non d'une forme linéaire continue sur $\underline{\underline{H}}^1_m$. Elle a été établie par C. HERZ, dans un cours non publié, antérieurement à celle du chap.VI n°29, et redécouverte[1] indépendamment par D. LEPINGLE au cours de l'hiver 1976.

Nous partons d'une martingale $M=(M_t)$, appartenant à $\underline{\underline{BMO}}$. Précisément, nous écrivons que

(2) $\quad E[|M_\infty - M_t||\underline{\underline{F}}_t] \leqq 1$ pour tout t

et que les sauts de M sont bornés (y compris $\Delta M_0=M_0$)

(3) $\quad |\Delta M| \leqq a$

Nous choisissons une constante $c>1$, et nous définissons par récurrence une suite (T_n) de temps d'arrêt par $T_{-1}=0-$ $(M_{0-}=0)$ et

(4) $\quad T_{n+1} = \inf \{ t>T_n : |M_t - M_{T_n}| > c \}$

puis nous définissons les v.a. $H_n=P\{T_{n+1}<\infty|\underline{\underline{F}}_{T_n}\}$, et

(5) $\quad K_n = \dfrac{I_{\{T_n<\infty, T_{n+1}=\infty\}}}{1-H_n}(M_{T_n} - M_{T_{n-1}}) \quad (n\geqq 0)$

nous remarquons que, pour tout ω , $K_.(\omega)$ n'est $\neq 0$ que pour une valeur de n au plus (le dernier n tel que $T_n(\omega)<\infty$). D'autre part, nous avons

$$|M_{T_n-} - M_{T_{n-1}}| \leqq c \quad , \text{ donc } |M_{T_n} - M_{T_{n-1}}| \leqq c+a \text{ d'après (3)}$$

L'inégalité $cI_{\{T_{n+1}<\infty\}} \leqq |M_{T_{n+1}} - M_{T_n}|$ nous donne en conditionnant par rapport à $\underline{\underline{F}}_{T_n}$ $\quad cH_n \leqq E[|M_{T_{n+1}} - M_{T_n}||\underline{\underline{F}}_{T_n}] = E[|E[M_\infty - M_{T_n}|\underline{\underline{F}}_{T_{n+1}}]||\underline{\underline{F}}_{T_n}]$ $\leqq E[|M_\infty - M_{T_n}||\underline{\underline{F}}_{T_n}] \leqq 1$, donc $H_n \leqq 1/c$ et finalement

$$K_n \leqq c(c+a)/c-1$$

1. C'est la forme de HERZ que nous suivons ici mot à mot. Celle de LEPINGLE est la même en substance, mais plus compliquée.

Nous considérons alors le processus à variation finie non adapté

$$(6) \qquad U_t = \sum_0^\infty K_n I_{\{t \geqq T_n\}}$$

sa variation totale est au plus

$$(7) \qquad \int_{0-}^\infty |dU_s| \leqq \frac{c(c+a)}{c-1}$$

Son compensateur adapté est le processus

$$(8) \qquad \bar{U}_t = \sum_0^\infty E[K_n|\underline{\underline{F}}_{T_n}] I_{\{t \geqq T_n\}}$$

Or on a $E[K_n|\underline{\underline{F}}_{T_n}] = (M_{T_n} - M_{T_{n-1}}) I_{\{T_n < \infty\}}$, et par conséquent

$$(9) \qquad \bar{U}_\infty = M_L \text{ où L est le dernier des } T_n < \infty$$

Par définition des T_n on a $|M_\infty - M_L| \leqq c$. Si donc nous définissons

$$(10) \qquad V_t = U_t \text{ pour } t < \infty \ , \ V_\infty = U_\infty + (M_\infty - M_L)$$

nous avons un processus à variation intégrable non adapté, présentant au plus deux sauts (dont l'un est à l'infini), et ayant une variation totale bornée par $c(2c+a-1)/c-1$. Sa projection duale optionnelle

$$(11) \qquad \bar{V}_t = \bar{U}_t \text{ pour } t < \infty \ , \ \bar{V}_\infty = \bar{U}_\infty + M_\infty - M_L = M_\infty$$

est telle que $E[\int_{[T,\infty]} d\bar{V}_s|\underline{\underline{F}}_T] \leqq c(2c+a-1)/c-1$, et que $\bar{V}_\infty = M_\infty$, et nous avons obtenu la représentation désirée pour M_∞ (avec une intéressante précision quant à la structure de V).

3. A partir de ce théorème nous pouvons - en suivant LEPINGLE - démontrer directement que le dual de $\underline{\underline{H}}^1_m$ est $\underline{\underline{BMO}}$, sans jamais parler de variation quadratique. Nous définissons $\underline{\underline{BMO}}$ comme nous l'avons fait plus haut : une martingale M appartient à $\underline{\underline{BMO}}$ si $E[|M_\infty - M_{T-}||\underline{\underline{F}}_T]$ est uniformément borné (indépendamment du temps d'arrêt T). Ou encore, si $E[|M_\infty - M_t|\underline{\underline{F}}_t]$ est uniformément borné et les sauts de M sont bornés. Le résultat de HERZ-LEPINGLE peut s'énoncer de la manière suivante (nous utilisons la notation $\bar{V}$, comme au n°2 ci-dessus, pour désigner la projection duale optionnelle d'un processus à variation intégrable V).

(12) | M appartient à $\underline{\underline{BMO}}$ $\Leftrightarrow$ $M_t = E[\bar{V}_\infty|\underline{\underline{F}}_t]$, où V est un processus à variation intégrable (non adapté, pouvant présenter des sauts en 0 et en $+\infty$) tel que $\int_{[0,\infty]} |dV_s| \leqq c$

et la plus petite constante c possible définit une norme équivalente à la norme $\underline{\underline{BMO}}$. L'implication $\Rightarrow$ fait l'objet du n°2, tandis que $\Leftarrow$ est très facile.

Il est bien connu que, dans la représentation (12), la v.a. $\int_{[0,\infty]}|d\bar{V}_s|$ appartient à L^2 (même à tout L^p, $p<\infty$). Il en résulte en particulier que si X est une martingale de carré intégrable, on a

$$(13)\qquad E[X_\infty M_\infty] = E[X_\infty \bar{V}_\infty] = E[\int_{[0,\infty]} X_\infty d\bar{V}_s] \underset{a}{=} E[\int_{[0,\infty]} X_s d\bar{V}_s]$$

$$\underset{b}{=} E[\int_{[0,\infty]} X_s dV_s]$$

(a, parce que X est projection optionnelle du processus constant égal à X_∞ ; b, parce que X est optionnel, et $\bar{V}$ projection duale optionnelle de V). Nous en déduisons en particulier une "inégalité de FEFFERMAN"

$$(14)\quad |E[X_\infty M_\infty]| \leqq E[\int_{[0,\infty]}|X_s||dV_s|] \leqq E[X^*\int_{[0,\infty]}|dV_s|] \leqq cE[X^*]$$

$$\leqq K.\|X\|_{\underline{\underline{H}}^1_m}\|M\|_{\underline{\underline{BMO}}}\ .$$

Les martingales de carré intégrable forment un sous-espace dense de $\underline{\underline{H}}^1_m$ (cf. le cours sur les i.s., V.12, p.339 : la démonstration s'applique aussi bien à la norme de $\underline{\underline{H}}^1_m$, et s'appliquerait d'ailleurs aussi à l' espace des martingales bornées). On en déduit que l'application $X\mapsto E[\int X_s dV_s]$ est l'unique prolongement continu, à $\underline{\underline{H}}^1_m$ entier, de $X\mapsto E[X_\infty M_\infty]$. En particulier, elle ne dépend pas du choix de V, et l'on a une autre expression "explicite" de la forme linéaire sur $\underline{\underline{H}}^1$ associée à un élément de $\underline{\underline{BMO}}$.

Montrons maintenant que toute forme linéaire continue sur $\underline{\underline{H}}^1_m$ s'écrit de cette manière. Comme l'espace $\underline{\underline{M}}$ des martingales de carré intégrable est un sous-espace de $\underline{\underline{H}}^1_m$, avec une norme plus forte, toute forme linéaire continue φ sur $\underline{\underline{H}}^1_m$ <u>peut s'écrire sur</u> $\underline{\underline{M}}$ sous la forme

$$\varphi(X) = E[X_\infty M_\infty]\ ,\ \text{où } M \text{ est une martingale de carré intégrable,}$$

et tout revient à montrer que M appartient à $\underline{\underline{BMO}}$.

1) Soit T un temps d'arrêt, et soit $U\in L^2(\underline{\underline{F}}_T)$. Soit X la martingale $A-\tilde{A}$, compensée de $A_t=UI_{\{t\geqq T\}}$. On a $E[X^*] \leq 2E[|U|]$, et d'autre part si T est soit prévisible, soit totalement inaccessible

$$\varphi(X)=E[X_\infty M_\infty] = E[\Delta X_T \Delta M_T] = E[U\Delta M_T]$$

l'inégalité $|\varphi(X)|\leq cE[X^*]$ nous donne donc ici $|E[U\Delta M_T]|\leq 2cE[|U|]$, et par conséquent $|\Delta M_T|\leq 2c$ p.s.. On en déduit que M <u>est une martingale à sauts bornés par</u> 2c.

2) Soient $A\in\underline{\underline{F}}_t$, et Y une v.a. $\underline{\underline{F}}$-mesurable dominée par I_A en valeur absolue. Soit $X_s=E[X_\infty|\underline{\underline{F}}_s]$, où $X_\infty= Y-E[Y|\underline{\underline{F}}_t]$; nous avons $X^*\leqq 2I_A$,

donc

$$|\varphi(X)| \leqq cE[X^*] \leqq 2cP(A) \ .$$

Mais d'autre part $\varphi(X)=E[X_\infty M_\infty] = E[Y(M_\infty - M_t)]$. Prenant $Y=I_A.\mathrm{sgn}(M_\infty - M_t)$ il vient

$$\int_A |M_\infty - M_t| P \leqq 2cP(A)$$

et comme A est arbitraire, $E[|M_\infty - M_t| \,|\, \underline{\underline{F}}_t] \leqq 2c$.

Les deux résultats mis ensemble signifient que M appartient à $\underline{\underline{BMO}}$.

Ce théorème de représentation de $\underline{\underline{BMO}}$ tient lieu plus ou moins, en probabilités, d'une représentation analytique due à CARLESON. Il reste à faire le pont entre cet aspect de la théorie de $\underline{\underline{BMO}}$-$\underline{\underline{H}}^1$ et l'aspect "quadratique".

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1976/77

NOTES SUR LES INTEGRALES STOCHASTIQUES . IV
CARACTERISATION DE $\underline{\underline{\mathrm{BMO}}}$ PAR UN OPERATEUR MAXIMAL

par P.A. Meyer

A la fin de l'article " Factorization theorems for Hardy spaces in several variables" , de COIFMAN, ROCHBERG et WEISS, figurent deux théorèmes qui se traduisent immédiatement du langage analytique en langage probabiliste. La forme probabiliste obtenue est même légèrement plus précise que la forme analytique. Je ne sais pas à quoi peuvent servir ces deux théorèmes, mais je pense qu'il faut tenir à jour le dictionnaire "Analyse-Probabilités ; Probabilités-Analyse", et c'est pourquoi la démonstration en figure ici[1]. Il y a aussi un théorème 3.

Les notations $\Omega,\underline{\underline{F}},P,(\underline{\underline{F}}_t)$ ont leurs significations usuelles , ainsi que la notation * pour désigner une fonction maximale. On suppose $\underline{\underline{F}}=\underline{\underline{F}}_\infty$.

THEOREME 1 . Soit B une variable aléatoire intégrable, et soit (B_t) la martingale continue à droite $(E[B|\underline{\underline{F}}_t])$ ($B=B_\infty$)

1) Supposons que B appartienne à $\underline{\underline{\mathrm{BMO}}}$. Alors on a pour toute martingale (X_t), tout $p\in[1,\infty[$

$$(1)\qquad \|\sup_t X_t^*|B_\infty - B_{t-}|\,\|_p \leq c_p\|X^*\|_p$$

où $c_p = d_p\|B\|_{\underline{\underline{\mathrm{BMO}}}}$, d_p étant une constante universelle.

2) Inversement, l'inégalité plus faible

$$(2)\qquad \|\sup_t |X_t(B_\infty-B_{t-})|\,\|_p \leq c_p\|X^*\|_p$$

entraîne que B appartient à $\underline{\underline{\mathrm{BMO}}}$.

DEMONSTRATION. Nous commençons par la seconde partie, avec $1<p<\infty$ d'abord. Soient T un temps d'arrêt, A un élément de $\underline{\underline{F}}_T$, (X_t) la martingale $E[I_A|\underline{\underline{F}}_t]$, comprise entre 0 et 1, et telle que $X_T=I_A$. Nous savons d'après l'inégalité de DOOB que $\|X^*\|_p \leq qP(A)^{1/p}$. Alors

$$\int_A |B_\infty-B_{T-}|^p = E[X_T^p|B_\infty-B_{T-}|^p] \leq E[\,(\sup_t\ldots)^p] \leq c_p^pE[X^{*p}]$$
$$\leq c_p^pq^pP(A)$$

Cela signifie que $E[|B_\infty-B_{T-}|^p|\underline{\underline{F}}_T] \leq q^pc_p^p$, et B appartient à $\underline{\underline{\mathrm{BMO}}}$.

Le cas p=1 est... évident, car l'inégalité (2) avec p=1 entraîne (2)

---

1. Cette rédaction est le résultat d'une discussion avec R. Coifman aux journées d'Analyse Harmonique du Clébard en Juin 1976, et je profite de cette occasion pour remercier les organisateurs, J.Faraut et P. Eymard, ainsi que R. Coifman lui même.

avec $p=2$.

Nous passons à la première partie , qui est plus intéressante. Nous pouvons nous ramener au cas où $\|B\|_{\underline{\underline{BMO}}}=1$, et nous utilisons les notations c, c_p pour désigner une constante qui peut changer de valeur de place en place. Nous utilisons le théorème de HERZ-LEPINGLE (cf. la note IV) pour représenter B comme $U_\infty - V_\infty$, où (U_t) et (V_t) sont deux processus croissants adaptés, tels que $U_{0-}=V_{0-}=0$ et que

$$E[U_\infty - U_{T-}|\underline{\underline{F}}_T],\ E[V_\infty - V_{T-}|\underline{\underline{F}}_T] \leqq c \text{ pour tout t.d'a. } T .$$

et il nous suffit évidemment de nous occuper du premier et de démontrer que, si l'on pose $\upsilon_t = E[U_\infty|\underline{\underline{F}}_t]$

$$\| \sup_t X_t^* |U_\infty - \upsilon_{t-}| \|_p \leqq c_p \|X^*\|_p$$

Seulement, l'inégalité $E[U_\infty - U_{T-}|\underline{\underline{F}}_T] \leqq c$ s'écrit aussi $|\upsilon_T - U_{T-}| \leqq c$ pour tout temps d'arrêt, d'où par section optionnelle $|\upsilon_t - U_{t-}| \leqq c$ identiquement, puis par limites à gauche $|\upsilon_{t-} - U_{t-}| \leqq c$, puis comme les sauts de U sont bornés par c , $|\upsilon_{t-} - U_t| \leqq 2c$. Pour finir, il nous suffit de montrer

$$(3) \qquad \| \sup_t X_t^*(U_\infty - U_t) \|_p \leqq c_p \|X^*\|_p$$

Introduisons le processus croissant $A_t = X_t^*$ ($A_{0-}=0$), le processus décroissant non adapté $D_t = (U_\infty - U_t)^p$, qui satisfait à $E[D_T|\underline{\underline{F}}_T] \leqq c_p$ pour tout temps d'arrêt T d'après l'inégalité de John-Nirenberg. Nous avons

$$A_t D_t = A_{0-}D_{0-} + \int_0^t A_{s-}dD_s + \int_0^t D_s dA_s \leqq \int_0^t D_s dA_s \leqq \int_0^\infty D_s dA_s$$

$$E[\ \sup_t A_t D_t\ ] \leqq E[\int_0^\infty D_s dA_s\ ] \leqq c_p E[\int_0^\infty dA_s\ ] = c_p E[X^{*p}]$$

puisque la projection optionnelle de (D_t) est majorée par c_p. Le théorème est établi.

REMARQUE. On a établi en fait un résultat un peu plus fort ! on a

$$\| \sup_t \ (\sup_{s\leqq t} |X_s|)(\sup_{s\geqq t} |B_\infty - B_{s-}|) \|_p \leqq c_p \|X^*\|_p$$

La démonstration du résultat analogue en analyse laisse échapper, semble t'il, le cas p=1 , et d'autre part ne donne qu'une inégalité du type (2), avec $|X_t|$ au lieu de X_t^* . Je pense qu'il serait assez facile de retrouver ces deux petits raffinements. Noter toutefois que le résultat probabiliste concernerait une fonction maximale évaluée au moyen de partitions dyadiques, et le résultat analytique une fonction maximale du type HARDY-LITTLEWOOD, évaluée sur tous les cubes contenant un point.

REMARQUE. Le mélange de t et de t- dans la formule (1) peut paraître bizarre. En fait, par passage à la limite à droite ou à la limite à gauche, on se trouve avoir majoré aussi

$$\sup_t X_t^* |B_\infty - B_t| \quad \text{et} \quad \sup_t X_{t-}^* |B_\infty - B_{t-}|$$

mais j'ignore si les inégalités ainsi obtenues caractérisent $\underline{\underline{\mathrm{BMO}}}$. Je ne le pense pas : cela ressemble plutôt aux espaces $\underline{\underline{\mathrm{bmo}}}_p$.

Dans le travail analytique, le second théorème précède le premier . Il me semble que l'ordre inverse est avantageux, car le second théorème n'est probablement pas vrai pour p=1.

THEOREME 2. <u>Avec les mêmes notations on a</u>, <u>pour</u> $1<p<\infty$

$$\| \sup_t | E[B_\infty X_\infty | \underline{\underline{F}}_t] - B_\infty X_t | \|_p \leq c_p \|X_\infty\|_p \tag{4}$$

<u>où</u> $c_p = d_p \|B\|_{\underline{\underline{\mathrm{BMO}}}}$, <u>et</u> d_p <u>est une constante universelle</u>.

DEMONSTRATION. Nous rappelons d'abord que pour $p>1$, les normes $\|X^*\|_p$ et $\|X_\infty\|_p$ sont équivalentes. Puis nous écrivons

$$E[B_\infty X_\infty | \underline{\underline{F}}_t] - B_\infty X_t = (E[B_\infty X_\infty | \underline{\underline{F}}_t] - B_{t-} X_t) - (B_\infty - B_{t-}) X_t$$

et la dernière parenthèse est majorée par le sup qui figure dans (1). D'après le théorème 1, nous n'avons pas à nous en occuper.

Comme X est bornée dans L^p ($p>1$) et B appartient à $\underline{\underline{\mathrm{BMO}}}$, $B_t X_t - [B,X]_t$ est une martingale uniformément intégrable, et l'on a

$$E[B_\infty X_\infty | \underline{\underline{F}}_t] = B_t X_t + E[[B,X]_\infty | \underline{\underline{F}}_t] - [B,X]_t$$

Donc la première parenthèse au second membre s'écrit

$$X_t \Delta B_t + E[[B,X]_\infty - [B,X]_t | \underline{\underline{F}}_t]$$

Comme les sauts de B sont bornés par $2\|B\|_{\underline{\underline{\mathrm{BMO}}}}$, et $|X_t|$ par X^* , le premier terme se majore immédiatement . Pour le second terme, nous écrivons l'inégalité de FEFFERMAN sous sa forme conditionnelle

$$|E[[B,X]_\infty - [B,X]_t | \underline{\underline{F}}_t]| \leq E[\int_t^\infty |d[B,X]_s| \,|\underline{\underline{F}}_t] \leq$$

$$\leq c\| B \|_{\underline{\underline{\mathrm{BMO}}}} E[\sqrt{[X,X]_\infty - [X,X]_t} \,|\underline{\underline{F}}_t] \leq c\|B\|_{\underline{\underline{\mathrm{BMO}}}} E[\sqrt{[X,X]_\infty} \,|\underline{\underline{F}}_t]$$

Maintenant, nous passons au sup en t . A droite nous avons une martingale , donc $\| \sup_t E[[X,X]_\infty^{1/2} | \underline{\underline{F}}_t] \|_p \leq q E[[X,X]_\infty^{1/2} \|_p$ (DOOB) $\leq c_p \|X_\infty\|_p$ (BURKHOLDER) et le théorème est établi.

REMARQUE. L'un des buts de l'article de COIFMAN, ROCHBERG et WEISS est la démonstration de théorèmes sur les commutateurs d'opérateurs intégraux singuliers et d'opérateurs de multiplication. Le théorème 2 (comme le théorème analytique analogue) est un théorème de commutateurs : soient

β l'opérateur de multiplication par B : $\beta(X)=BX$; cet opérateur n'est borné sur L^p que si $\beta\in L^\infty$

a_S l'opérateur qui - S étant une v.a. positive , non nécessairement un temps d'arrêt - associe à X la valeur à l'instant S de la martingale continue à droite $E[X|\underline{\underline{F}}_t]$; cet opérateur est borné sur L^p.

Alors le théorème 2 nous dit que l'opérateur $a_S\beta-\beta a_S$ est borné dans L^p, avec une norme majorée par $d_p\|B\|_{\underline{\underline{BMO}}}$, indépendante de S.

Dans le contexte probabiliste, le problème de commutateurs le plus naturel concerne l'opérateur d'intégrales stochastiques :

$$(5)\qquad J(X) = \int_0^\infty H_s dX_s \quad \text{où } X_t=E[X|\underline{\underline{F}}_t] \text{ , et H est prévisible, } |H|\leq 1 \text{ .}$$

Nous allons commencer par calculer le commutateur $J\beta-\beta J$. Nous introduisons les processus suivants

$$(6)\qquad Y_t=E[B_\infty X_\infty |\underline{\underline{F}}_t] \qquad\qquad Z_t=E[[B,X]_\infty-[B,X]_t|\underline{\underline{F}}_t]$$

Nous avons , $B_tX_t-[B,X]_t$ étant une martingale uniformément intégrable si B appartient à $\underline{\underline{BMO}}$ et X est bornée dans L^p, p>1

$$(7)\qquad Y_t = B_tX_t + Z_t = \int_0^t B_{s-}dX_s + \int_0^t X_{s-}dB_s + \int_0^t d[B,X]_s + Z_t$$

donc

$$(8)\qquad J\beta(X) = \int_0^\infty H_sB_{s-}dX_s+ \int_0^\infty H_sX_{s-}dB_s + \int_0^\infty H_sd[B,X]_s + \int_0^\infty H_sdZ_s$$

D'autre part, soit $X'=H\cdot X$, et soit $Z'_t=E[[B,X']_\infty-[B,X']_t|\underline{\underline{F}}_t]$. Nous avons d'après (7) appliquée à $X'=J(X)$

$$(9)\qquad \beta J(X) = \int_0^\infty B_{s-}dX'_s + \int_0^\infty X'_{s-}dB_s + \int_0^\infty d[B,X']_s + Z'_\infty$$

$$= \int_0^\infty H_sB_{s-}dX_s + \int_0^\infty X'_{s-}dB_s + \int_0^\infty H_sd[B,X]_s + Z'_\infty$$

d'où pour finir l'expression du commutateur :

$$(10)\qquad J\beta(X)-\beta J(X) = \int_0^\infty(H_sX_{s-}-X'_{s-})dB_s + \int_0^\infty H_sdZ_s - Z'_\infty$$

Ce calcul étant fait, nous démontrons :

THEOREME 3. <u>Le commutateur</u> $J\beta-\beta J$ <u>est un opérateur borné dans</u> L^p $(1<p<\infty)$ <u>avec une norme majorée par</u> $d_p\|B\|_{\underline{\underline{BMO}}}$, d_p <u>étant une constante universelle</u>.

DEMONSTRATION. Posons $b=\|B\|_{\underline{\underline{BMO}}}$. Nous avons trois termes à majorer . Nous regardons d'abord le processus

$$Z_t = E[[B,X]_\infty - [B,X]_t | \underline{\underline{F}}_t]$$

Décomposons $[B,X]_t$ en différence de deux processus croissants adaptés A_t^+ et A_t^- ; l'inégalité de FEFFERMAN sous sa forme conditionnelle nous dit que

$$E[\int_{T-}^{\infty} |d[B,X]|_s | \underline{\underline{F}}_T] \leq c\|B\|_{\underline{\underline{BMO}}} E[\sqrt{[X,X]_\infty - [X,X]_{T-}} | \underline{\underline{F}}_T]$$

Le côté gauche s'écrit comme la somme de $E[A_\infty^+ - A_{T-}^+ | \underline{\underline{F}}_T]$ et de $E[A_\infty^- - A_{T-}^- | \underline{\underline{F}}_T]$ D'après le lemme de GARSIA (cours sur les i.s., sém. X p.346) nous avons

$$\|A_\infty^+ + A_\infty^- \|_p \leq c_p b \|[X,X]_\infty^{1/2}\|_p \leq c_p b \|X_\infty\|_p \quad \text{(BURKHOLDER)}$$

Décomposons Z en $Z^+ - Z^-$, où $Z^\pm = E[A_\infty^\pm | \underline{\underline{F}}_t] - A_t^\pm = M_t^\pm - A_t^\pm$. Alors

$$\int_0^\infty H_s dZ_s^\pm = \int_0^\infty H_s dM_s^\pm - \int_0^\infty H_s dA_s^\pm$$

La martingale $M^\pm$ est bornée dans L^p, donc (BURKHOLDER) il en est de même de $H\cdot M^\pm$. Quant à $\int_0^\infty H_s dA_s^\pm$, il est majoré en valeur absolue par $A_\infty^\pm$, que nous avons borné plus haut dans L^p.

Nous avons donc borné dans L^p le second terme de (10). Le troisième est borné du même coup, car Z' n'est autre que le processus Z relatif à X' au lieu de X, et $\|X'_\infty\|_p \leq c_p\|X_\infty\|_p$ (BURKHOLDER).

Il nous reste à étudier le premier terme. Nous ne restreignons pas la généralité en supposant que le processus prévisible (H_s) est borné par 1 et <u>continu à gauche</u> . Nous ferons ensuite un raisonnement de classes monotones pour atteindre le cas général. Le processus

(11) $$K_t = H_s X_{s-} - X'_{s-}$$

est alors continu à gauche, le processus

(12) $$K_{t-}^* = \sup_{s<t} |K_s|$$

est croissant et continu à gauche, et nous désignons par K_t^* sa limite à droite. Nous avons $\|K_\infty^*\|_p \leq \|X_\infty\|_p + \|X'_\infty\|_p \leq c_p\|X_\infty\|_p$ (BURKHOLDER) .

Notre problème est d'évaluer $\|U_\infty\|_p$, où U est la martingale

(13) $$U_t = \int_0^t K_s dB_s$$

Nous avons pour tout temps d'arrêt T

$$E[[U,U]_{T-}^{\infty}|\underline{\underline{F}}_T] = E[\int_{T-}^{\infty}K_s^2\, d[B,B]_s|\underline{\underline{F}}_T] \leqq E[\int_{T-}^{\infty}K_s^{*2}d[B,B]_s|\underline{\underline{F}}_T]$$

$$= E[\int_{T-}^{\infty}([B,B]_{\infty}-[B,B]_{s-})dK_s^{*2}|\underline{\underline{F}}_T\ ]$$

Le processus $([B,B]_{s-}^{\infty})$ a une projection optionnelle $\leqq b$, donc ceci est majoré par

$$bE[\int_{T-}^{\infty}dK_s^{*2}|\underline{\underline{F}}_T] \leqq bE[K_{\infty}^{*2}|\underline{\underline{F}}_T]$$

Supposons alors $p\geqq 2$. Le lemme de GARSIA nous dit que

$$E[[U,U]_{\infty}^{p/2}] \leqq c_pE[(K_{\infty}^{*2})^{p/2}] \leqq c_pE[\,|X_{\infty}|^p]$$

l'inégalité de droite ayant été vue au bas de la page précédente. D'autre part, les inégalités de BURKHOLDER nous permettent de passer de $E[[U,U]_{\infty}^{p/2}]$ à $E[|U_{\infty}|^p]$, c'est à dire au résultat désiré. Celui-ci n'est établi que pour $p\geqq 2$, mais le commutateur est un opérateur autoadjoint, et un raisonnement familier permet d'en déduire le cas $p\leqq 2$.

Les deux parties de la démonstration sont semblables aux preuves du théorème 2 et du théorème 1 respectivement.

Considérons maintenant $U\in L^p$, $V\in L^q$ (l'exposant conjugué de p), et soit $B\in L^{\infty}$. Nous avons $\|\beta JU-J\beta U\|_p \leqq c_p\|B\|_{\underline{\underline{BMO}}}\ \|U\|_p$, donc

$$|\int VB.JU - \int V.J(BU)| = |\int B(V.JU-JV.U)| \leqq c_p\|B\|_{\underline{\underline{BMO}}}\|U\|_p\|V\|_q$$

Passons au sup sur les $B\in L^{\infty}$, de norme $\underline{\underline{BMO}} \leqq 1$, il vient

COROLLAIRE. <u>Si</u> J <u>est l'opérateur d'intégrale stochastique par</u> H <u>prévisible</u>, $|H|\leqq 1$, <u>on a</u>

(14) $$\|U.JV - JV.U\|_{\underline{\underline{H}}^1} \leqq c_p\|U\|_p\|V\|_q$$

Cette jolie démonstration est transposée, elle aussi, de COIFMAN, ROCHBERG et WEISS.

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1975/76

NOTES SUR LES INTEGRALES STOCHASTIQUES . V
RETOUR SUR LA REPRESENTATION DE $\underline{\underline{BMO}}$

(P.A. Meyer)

On montre en analyse qu'une fonction f appartient à $\underline{\underline{BMO}}(\mathbb{R}^d)$ si et seulement si elle peut s'écrire $g + \Sigma_1^d R_i g_i$, où les R_i sont les transformations de Riesz, et où les fonctions g, g_i sont bornées. Nous allons prouver ici le théorème suivant.

THEOREME. *Une martingale* (M_t) *appartient à* $\underline{\underline{BMO}}$ *si et seulement si elle admet une représentation de la forme*

$$(1) \qquad M = \Sigma_1^{\infty} \lambda_i H_i \cdot N_i$$

où les processus N_i *sont des martingales bornées par* 1 *en valeur absolue, les processus* H_i *sont prévisibles bornés par* 1 *en valeur absolue, et la suite* (λ_i) *est sommable. Plus précisément, il existe une représentation* (1) *satisfaisant à l'inégalité* $\Sigma_i |\lambda_i| \leqq c\|M\|_{\underline{\underline{BMO}}}$, *où* c *est une constante universelle.*

Ce théorème figure déjà, en fait, dans le séminaire de l'an dernier, p.392-394, mais il n'est pas énoncé de façon aussi nette : on y prouve seulement que si l'on désigne par K l'ensemble des intégrales stochastiques $H \cdot N$, où N est une martingale dominée par 1, H un processus prévisible dominé par 1, alors l'enveloppe convexe fermée de K dans $\underline{\underline{BMO}}$ contient une boule $B_{1/c}$ de $\underline{\underline{BMO}}$. Lors d'un passage à Strasbourg, Alain BERNARD a trouvé là une occasion de se moquer de l'ignorance des probabilistes en matière d'espaces de Banach. En effet, tous les mathématiciens qui ont fréquenté les espaces de Banach connaissent le petit lemme suivant (que l'on cache soigneusement aux étudiants). On y a fait un léger changement de notation, en écrivant K au lieu de cK .

LEMME. *Soient* V *un espace de Banach,* K *une partie de* V *dont l'enveloppe convexe contient la boule unité* B_1 *de* V. *Soit* $\varepsilon>0$. *Tout élément* x *de* B_1 *admet une représentation*

$$(2) \qquad x = \Sigma_1^{\infty} \lambda_i k_i \quad (k_i \in K \ ; \ \Sigma_1^{\infty}|\lambda_i| \leqq 1+\varepsilon \ )$$

La démonstration se fait à la main. Comme $x=x_0$ appartient à l'enveloppe convexe fermée de K, il existe des t_i^0 positifs en nombre fini, tels que $\Sigma\, t_i^0 = 1$, et des $k_i^0 \in K$, tels que $\| x - \Sigma_i\, t_i^0 k_i^0 \| < \varepsilon/2$. Désignons par x_1 ce vecteur . Comme $\|x_1\| < \varepsilon/2$ il existe des t_i^1 positifs en nombre fini, tels que $\Sigma_i\ t_i^1 = \varepsilon/2$, et des $k_i^1 \in K$, tels que $\| x_1 - \Sigma_i\ t_i^1 k_i^1 \| < \varepsilon/4$. Désignons par x_2 ce vecteur, etc... Puis rangeons tous les k_i^0, k_i^1,... par ordre d'entrée en scène, en une seule suite k_i , et les t_i^0, t_i^1,... en une seule suite λ_i ; nous avons $x=\Sigma_i\ \lambda_i k_i$, et les λ_i sont positifs avec $\Sigma_i\ \lambda_i \leqq 1+\varepsilon$.

Ce lemme explique aussi, par exemple, comment l'on peut déduire de la dualité entre $\underline{\underline{H}}^1$ et $\underline{\underline{BMO}}$ la décomposition des éléments de $\underline{\underline{H}}^1$ en sommes d'atomes bien choisis (je n'avais jamais compris auparavant pourquoi COIFMAN, par exemple, affirmait que la décomposition atomique de $\underline{\underline{H}}^1$ était équivalente au théorème de FEFFERMAN : la dernière fois que j'avais posé la question à un analyste, il avait grommelé quelque chose sur le produit $\otimes_\pi$ et la thèse de GROTHENDIECK).

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1976/77

NOTES SUR LES INTEGRALES STOCHASTIQUES. VI

QUELQUES CORRECTIONS AU "COURS SUR LES INTEGRALES STOCHASTIQUES"

par P.A. Meyer

1. FORMULE EXPONENTIELLE

On m'a signalé de divers côtés que le théorème d'existence et d'unicité de l'exponentielle de C. Doléans-Dade est énoncé de manière incompréhensible (p. 304, th. 25).

Donnons nous une semimartingale X (avec la convention $X_{0-}=0$, habituelle en théorie "additive"). Alors la semimartingale

(1) $$Z_t=\mathcal{E}(X_t)=\exp(X_t-\frac{1}{2}<X^c,X^c>_t)\prod_{0\leq s\leq t}(1+\Delta X_s)e^{-\Delta X_s}$$

est l'unique solution de l'équation différentielle stochastique

(2) $$Z_t = 1+\int_{[0,t]}Z_{s-}dX_s \qquad (Z_{0-} = 1 \text{ par convention })$$

Vérifions que l'on a bien la propriété qu'il faut en 0 : dans (2), on voit que $Z_0=1+\Delta X_0=1+X_0$, tandis que dans (1) on a compte tenu du fait que $<X^c,X^c>_0 = 0$ (tout processus croissant continu est nul en 0 par convention)

$$Z_0 = e^{X_0}(1+\Delta X_0)e^{-\Delta X_0} = 1+\Delta X_0$$

Et l'égalité est satisfaite ; l'équation $dZ_s=Z_{s-}dX_s$ est satisfaite en 0 aussi ($\Delta Z_0=Z_0-1 = Z_{0-}\Delta X_0 = X_0$).

Maintenant, donnons nous une v.a. U $\underline{\underline{F}}_{0-}$-mesurable . La semimartingale $Z_t=U\mathcal{E}(X)_t$ est l'unique solution de l'équation différentielle

(3) $$Z_t = U+\int_{[0,t]}Z_{s-}dX_s \qquad (Z_{0-}=U \text{ par convention })$$

Ce qui rend l'énoncé incompréhensible, c'est d'avoir tout de suite appelé Z_{0-} la v.a. U , sans avoir dit qu'il s'agissait d'une donnée du problème.

2. INTEGRALES MULTIPLES

J. de Sam Lazaro m'a fait remarquer que les deux dernières lignes de la page 328 " l'orthogonalité des intégrales stochastiques d'ordes différents s'étend sans modification" sont manifestement fausses. Il est montré au n°49, par exemple, que toute intégrale d'ordre 4 est une intégrale d'ordre 2 (de processus prévisible). L'assertion fausse (laissée au lecteur) entraînerait qu'elle est nulle.

3. SUR LE THEOREME DE JOHN-NIRENBERG

Il ne s'agit pas à proprement parler d'une erreur, mais d'un oubli un peu scandaleux au n°27 de la p. 348. Nous y montrons que si (X_t) est un processus càdlàg. adapté , donné sur $[0,\infty]$ fermé, et si

(4) $$E[|X_\infty - X_{T-}|\,|\underline{\underline{F}}_T] \leqq r \text{ pour tout temps d'arrêt } T \quad (X_{0-}=0)$$

alors nous avons d'après (27.2)

(5) $$P\{X^* \geqq 4rn\} \leqq 2^{-n+1}$$

D'où il résulte que si $\lambda<1$

$$E[2^{\lambda X^*/4r}] \leqq \sum_0^\infty 2^{\lambda(n+1)} P\{n \leqq \frac{X^*}{4r} \leqq n+1\} \leqq 4\sum_0^\infty 2^{-(1-\lambda)n} < \infty$$

et finalement $E[e^{\lambda X^*}]<C(\lambda,r)<\infty$ pour $\lambda<\log 2/4r$. Cela se trouve indiqué dans le texte (sans détails), mais il faut ajouter les points suivants. D'abord, l'inégalité peut se conditionner par $\underline{\underline{F}}_0$

(6) $$E[e^{\lambda X^*}|\underline{\underline{F}}_0] \leqq C(\lambda,r) \text{ si } \lambda<\lambda_0 = \frac{1}{4r}\log 2$$

Puis elle peut s'appliquer au processus $(X_{T+t}-X_{T-})_{t\geqq 0}$ relativement à la famille $(\underline{\underline{F}}_{T+t})$, de sorte que

(7) $$E[\exp(\lambda \sup_{t\geqq T} |X_t - X_{T-}|)|\underline{\underline{F}}_T] \leqq C(\lambda,r) \quad \text{si } \lambda<\lambda_0$$

et en particulier en négligeant le sup et prenant $t=+\infty$

(8) $$E[\exp(\lambda|X_\infty - X_{T-}|)|\underline{\underline{F}}_T] < C(\lambda,r) \text{ pour } \lambda<\lambda_0$$

d'où résulte sans peine que pour tout p fini > 1

(9) $$E[|X_\infty - X_{T-}|^p|\underline{\underline{F}}_T] \leqq c_p r^p$$

(se ramener par homogénéité au cas où r=1). Ainsi l'inégalité (4) entraîne des inégalités en apparence beaucoup plus fortes. C'est (8) qui est la véritable inégalité de John-Nirenberg.

Reste l'application aux martingales : si (X_t) est une <u>martingale</u> uniformément intégrable qui satisfait à (4), l'inégalité (9) pour p=2 signifie que (X_t) appartient à $\underline{\underline{BMO}}$; d'autre part, les martingales de $\underline{\underline{BMO}}$ satisfont à (4), donc aussi à (8) et à (9) pour tout p.

Je ne comprends plus ce que veut dire la remarque des trois dernières lignes.

4. SUR L'INTEGRALE OPTIONNELLE

Il faut se rappeler un grand principe heuristique : <u>l'intégrale optionnelle est un être mathématique intéressant seulement lorsqu'on travaille sur une filtration quasi-continue à gauche</u>.

Nous avons défini l'intégrale optionnelle H•M d'un processus H (optionnel !) localement borné par rapport à une martingale locale M. En général, on ne peut espérer définir l'intégrale H•X de H par rapport à une semimartingale X=M+A comme H•X=H•M+H•A , en raison de l'ambiguïté de la décomposition $X=M+A$: si l'on fait passer des termes à variation intégrable du côté "martingale locale" au côté "variation finie", l'intégrale optionnelle $H \cdot X$ change, car l'intégrale optionnelle ne coincide pas avec l'intégrale de Stieltjes.

Si X est une semimartingale <u>spéciale</u> , on peut tourner cette difficulté, en définissant $H \cdot X = H \cdot M + H \cdot A$, où $X=M+A$ est la décomposition <u>canonique</u> de X (A prévisible). Toutefois, cette notion n'est pas satisfaisante, car $H \cdot A$ est un processus à variation localement intégrable non prévisible en général, et on n'aboutit donc pas à la décomposition canonique de $H \cdot X$.

Et voici la raison de cette petite note : <u>si la famille</u> ($\underline{\underline{F}}_t$) <u>est quasi-continue à gauche</u>, et si A est prévisible , $H \cdot A$ n'admet pas de sauts totalement inaccessibles, donc est prévisible, et on a bien que la semimartingale $H \cdot M + H \cdot A$ est décomposée canoniquement. <u>La définition de</u> $H \cdot X$ <u>est donc raisonnable</u>.

5. UN POINT DE PRIORITE

Je me suis aperçu qu'une bonne partie des résultats du § VI, p.364-370 , concernant les temps locaux des semimartingales, se trouve déjà (avec la même démonstration) dans un article de P.W. Millar : stochastic integrals and processes with stationary independent increments, Proc. VI-th Berkeley Symposium, vol.III, p. 307-332 .

6. SUR LE THEOREME DE GIRSANOV

Si l'on examine le § IV du dernier chapitre du cours (p.376), on s'aperçoit que les questions suivantes y sont traitées : soit $(\Omega, \underline{\underline{F}}, P)$ un espace probabilisé complet muni d'une filtration qui satisfait aux conditions habituelles, et soit Q une loi <u>équivalente</u> à P. Alors il s'agit

a) de montrer que toute semimartingale/P est une semimartingale/Q,

b) étant donnée une semimartingale/P explicitement décomposée en $X=M+A$, de donner une décomposition explicite $X=M'+A'$ de X relativement à Q. Comme d'habitude, M,M' sont ici des martingales locales...

Lorsque Q est seulement <u>absolument continue</u> par rapport à P, le problème a) a été résolu par Jacod et Mémin (Z.f.W. 35, 1976, p.1), ainsi que le problème b) sous des hypothèses correspondant à celles du théorème de Girsanov "usuel" (existence d'un crochet oblique, cf. le n°24 du cours). L'analogue du théorème 24, sans aucune condition particulière, vient d'être traité par E. Lenglart, dans un travail à paraître.

Nous allons traiter ici rapidement le problème a), car le résultat est vraiment intéressant, et la démonstration est assez courte.

1) Nous désignons par M_∞ une densité Q/P et introduisons la martingale fondamentale

$$M_t = E_P[M_\infty | \underline{\underline{F}}_t] \quad (\text{ martingale/P})$$

Soit $R = \inf\{t : M_t=0 \text{ ou } M_{t-}=0\}$. D'après un théorème bien connu sur les martingales positives, on a P-p.s. $M_t=0$ sur $\{t\geq R\}$ (Probabilités et potentiels, 1e éd. chap.VI, th.15), donc aussi Q-p.s.. D'autre part on a $Q\{M_t=0\} = \int_{\{M_t=0\}} M_t P = 0$. Par conséquent $R=+\infty$ Q-p.s., et les ensembles $\{(t,\omega): M_t(\omega)=0\}, \{(t,\omega) : M_{t-}(\omega)=0\}$ sont Q-évanescents. En particulier le processus 1/M est Q-indistinguable d'un processus càdlàg. fini.

2) Soit X une surmartingale/P positive. Alors X/M (qui est un processus càdlàg. pour la loi Q d'après ce qui précède) est une surmartingale/Q (donc une semimartingale/Q).

En effet, si $A\in\underline{\underline{F}}_s$, $s<t$

$$\int_A \frac{X_s}{M_s} Q = \int_A X_s I_{\{M_s>0\}} P \geqq \int_A X_t I_{\{M_s>0\}} P \geqq \int_A X_t I_{\{M_t>0\}} P = \int_A \frac{X_t}{M_t} Q .$$

3) Soit X une martingale locale/P . Alors X/M est une semimartingale/Q.

En effet, si X est une martingale/P uniformément intégrable, X est différence de deux martingales/P positives, et on peut appliquer 2). On se ramène à ce cas par arrêt à des temps d'arrêt T_n qui croissent **vers** l'infini P-p.s., donc aussi Q-p.s..

4) Soit X une semimartingale/P . Alors X/M est une semimartingale/Q.

En effet, écrivons X=L+A, où L est une martingale locale/P, A un processus à variation finie. L/M est une semimartingale/Q d'après 3), et A/M est le produit des deux semimartingales/Q A (à variation finie) et 1/M (cf. 2)).

5) Finalement, si X est une semimartingale/P, XM est une semimartingale/P, donc X=XM/M est une semimartingale/Q .

Cette démonstration est due à E. Lenglart. Il est peut être intéressant de noter que M est une <u>sous</u>martingale/Q : si $A\in\underline{\underline{F}}_s$, $s<t$

$$\int_A M_s Q = \int_A M_s^2 P \leqq \int_A M_t^2 P = \int_A M_t Q$$

Mais on ne peut pas en déduire directement que M est une semimartingale/Q (ce qui est vrai d'après 5) !), parce que M ne possède a priori aucune propriété d'intégrabilité raisonnable. Si M est localement de carré intégrable par rapport à P, M est une semimartingale spéciale par rapport à Q .