Séminaire de probabilités (Strasbourg)

Bernard Maisonneuve

Une mise au point sur les martingales locales continues définies sur un intervalle stochastique

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 11 (1977), p. 435-445

<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1977__11__435_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1975/76

UNE MISE AU POINT SUR LES MARTINGALES LOCALES CONTINUES DEFINIES SUR UN INTERVALLE STOCHASTIQUE

par Bernard Maisonneuve

Nous nous proposons ici de faire une mise au point sur un résultat "classique" : si M est une martingale locale continue sur $[0,T[$, les ensembles $\{ M_{T-}$ existe dans $\mathbb{R} \}$ et $\{ \langle M,M\rangle_{T-} < \infty \}$ sont p.s. égaux. Un tel résultat entraîne en particulier que, si u est une fonction harmonique dans un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et si (X_t) est le mouvement brownien à n dimensions, on a p.s. l'équivalence suivante

$$\lim_{t\uparrow T} u(X_t) \text{ existe dans } \mathbb{R} \iff \int_0^T \mathrm{grad}^2 u(X_s)ds < \infty$$

où $T = \inf\{ t : X_t \notin U \}$.

Les démonstrations données par GETOOR et SHARPE [2] et par KUNITA [4] de ce résultat nous semblent incorrectes, à cause d'une définition trop restrictive de la notion de martingale locale sur $[0,T[$. En effet, ces auteurs supposent que T est un temps d'arrêt prévisible ou accessible. Or si (τ_t) est l'inverse continu à droite de $\langle M,M\rangle$, la variable $\langle M,M\rangle_{T-}$ n'est pas nécessairement un temps d'arrêt accessible[1] de la famille $(\mathcal{F}_{\tau_t})$, ce qui interdit de considérer le processus changé de temps (M_{τ_t}) comme une martingale locale sur $[0, \langle M,M\rangle_{T-} [$, et est à l'origine des erreurs signalées. Cette remarque nous amènera à étendre la notion de martingale locale[2] sur $[0,T[$ au cas où T est un temps d'arrêt quelconque. Pour $T = \infty$, la définition que nous donnons est voisine de celle des "weak martingales" de N. KAZAMAKI [3].

1. Notations, Généralités.

(1.1) $(\Omega,\mathcal{F},P)$ est un espace probabilisé complet et $(\mathcal{F}_t)$ une famille croissante de sous-tribus de $\mathcal{F}$, continue à droite et complète ($A\in \mathcal{F}$, $P(A)=0 \Rightarrow A\in \mathcal{F}_0$) . Etant donnée une partie $A \in \mathcal{F}$, nous appellerons variable aléatoire sur A une application de A dans $\mathbb{R}$ qui est mesurable

2. Il s'agira toujours de martingales locales continues.
1. Il en est ainsi, toutefois, lorsque $\langle M,M \rangle$ est strictement croissant, ce qui fournit un moyen élémentaire de démonstration du résultat analytique ($\mathrm{grad}^2 u$ est p.p. strictement positif si u n'est pas constante).

pour la tribu $A\cap \mathcal{F} = \{ A\cap B : B\in \mathcal{F}\}$.

Si X est une variable sur A, la variable sur Ω qui vaut X sur A, 0 sur A^c sera notée XI_A .

(1.2) T est un temps d'arrêt fixé de $(\mathcal{F}_t)$. Nous appellerons processus sur $[0,T[$ une famille $(X_t)_{t\geq 0}$, où pour tout t X_t est une variable aléatoire sur $\{t<T\}$. Le processus (X_t) sera dit adapté si X_t est $\{t<T\}\cap \mathcal{F}_t$ - mesurable pour tout t ; il est dit continu, continu à gauche, croissant,... si pour tout $\omega\in\Omega$ l'application $t\mapsto X_t(\omega)$ de $[0,T(\omega)[$ dans $\mathbb{R}$ est continue, continue à gauche, croissante,...

2. Martingales locales continues sur $[0,T[$.

(2.1) Définition. Un processus M sur $[0,T[$ est appelé martingale locale continue sur $[0,T[$ s'il existe une suite $T_n\uparrow T$ de temps d'arrêt réduisant M au sens suivant : pour tout n il existe une martingale continue $(M^n_t)_{t\in \mathbb{R}_+}$ telle que $M_t=M^n_t$ sur $\{t<T_n\}$. On note $\mathcal{L}_c[0,T[$ l'ensemble des martingales locales continues sur $[0,T[$.

Il faut prendre garde à cette définition : les mots " martingale locale" et "continue" ne peuvent être séparés. Supposons que l'on définisse les martingales locales sur $[0,T[$ comme ci-dessus, en supprimant partout le mot "continue" . Alors une martingale locale sur $[0,T[$, qui est un processus continu sur $[0,T[$, n'est pas nécessairement une martingale continue sur $[0,T[$ au sens de la définition précédente (par exemple, si T est un temps totalement inaccessible, et si $A_t=I_{\{t\geq T\}}$, on peut définir la martingale uniformément intégrable (M_t) compensée de (A_t) ; la restriction de M à $[0,T[$ est continue sur $[0,T[$, et n'est pas une martingale continue sur $[0,T[$).

Quitte à remplacer M^n_t par $M^n_{t\wedge T_n} I_{\{T>0\}}$, on peut toujours supposer, et c'est ce que nous ferons dans toute la suite, que la martingale M^n associée au temps T_n est constante après T_n et nulle sur $\{T=0\}$.

(2.2) Remarques. 1) Si $M \in \mathcal{L}_c[0,T[$, la restriction de M à $[0,S[$ appartient à $\mathcal{L}_c[0,S[$, pour tout temps d'arrêt $S \leq T$.

2) Une martingale locale continue sur $[0,T[$ M est un processus adapté, car $M_t = \lim_n M^n_t$ sur $\{t<T\}$.

3) A la différence de M_0^n , la variable $M_0 I_{\{T>0\}}$ n'est pas nécessairement intégrable.

(2.3) Pour définir le processus croissant $< M,M >$ d'un élément M de $\mathcal{L}_c[0,T[$, on envisage une suite (T_n) réduisant M et la suite (M^n) de martingales associées, et on pose

$$< M,M >_t \ = \ \sup_n < M^n,M^n >_t \quad , \quad t \in \mathbb{R}_+ .$$

Le processus $< M,M >$ ainsi défini sur $[0,\infty[$ prend ses valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, il est adapté à $(\mathcal{F}_t)$, croissant, continu, constant après T, nul en 0 ($< M^n,M^n >_0 = 0$ par convention) et nul sur $\{T=0\}$. La restriction de $< M,M >$ à $[0,T[$ est l'unique processus sur $[0,T[$ qui soit fini, continu, croissant, nul en 0 sur $\{T>0\}$, adapté et tel que $M^2 - < M,M >$ appartienne à $\mathcal{L}_c[0,T[$.

(2.4) <u>Proposition</u>. <u>Soit</u> $M \in \mathcal{L}_c[0,T[$. <u>Sur</u> $[0,T[$, <u>les applications</u> $t \mapsto M_t$ <u>et</u> $t \mapsto < M,M >_t$ <u>ont p.s. les mêmes intervalles de constance</u>.

<u>Démonstration</u>. Par localisation, puis par arrêt, on est ramené à montrer que pour une martingale continue bornée M, de processus croissant A, les applications $t \mapsto M_t$ et $t \mapsto A_t$ ont p.s. les mêmes intervalles de constance. Ceci est un résultat classique, dont voici une démonstration élémentaire.

a) Pour tout rationnel r, soit $\sigma_r = \inf \{ t \geqq r : M_t \neq M_r \}$. On a $M_{t\wedge\sigma_r} = M_{t\wedge r}$, donc si l'on pose $N_t = M_t^2 - A_t$ il vient

$$N_{t\wedge\sigma_r} - N_{t\wedge r} \ = -A_{t\wedge\sigma_r} + A_{t\wedge r} \quad .$$

Le processus croissant $(A_{t\wedge\sigma_r} - A_{t\wedge r})$ est donc une martingale nulle en 0, par suite, ce processus est p.s. nul, et il en résulte que les intervalles de constance de l'application $t \mapsto M_t$ sont p.s. des intervalles de constance de l'application $t \mapsto A_t$.

b) Pour tout rationnel r, soit $\tau_r = \inf \{ t : A_t > A_r \}$. On a

$$E[(M_{\tau_r} - M_r)^2] = E[M_{\tau_r}^2] - E[M_r^2] = E[A_{\tau_r} - A_r] = 0 ,$$

donc $M_r = M_{\tau_r}$ p.s.. Par suite $M_q = M_{\tau_r}$ p.s. sur $\{\tau_q = \tau_r\}$, pour tout couple de rationnels (q,r), ce qui montre que les intervalles de constance de l'application $t \mapsto A_t$ sont p.s. des intervalles de constance de l'application $t \mapsto M_t$.

(2.5) <u>Proposition.</u> <u>Soit</u> $M \in \mathcal{L}_c[0,T[$. <u>Posons</u> $A = \langle M,M \rangle$ <u>et</u> $\tau_t = \inf\{ s : A_s > t \}$ <u>pour tout</u> $t \geqq 0$. <u>Alors le processus</u> (M_{τ_t}) <u>défini sur</u> $[0,A_T[$ <u>est une martingale locale continue sur</u> $[0,A_T[$ <u>relativement à la famille</u> $(\mathcal{F}_{\tau_t})$, <u>de processus croissant</u> $(t \wedge A_T)$.

<u>Démonstration.</u> Remarquons d'abord que, pour tout temps d'arrêt S, la variable A_S est un temps d'arrêt de $(\mathcal{F}_{\tau_t})$. En effet $\{ A_S \leqq t \} = \{ S \leqq \tau_t \} \in \mathcal{F}_{\tau_t}$ pour tout t . Soit (T_n) une suite réduisant M, et soit (M^n) la suite de martingales associée. (A_{T_n}) est une suite croissante de temps d'arrêt de $(\mathcal{F}_{\tau_t})$, de limite A_T. Quitte à changer de suite (T_n), on peut supposer les M^n bornées (il suffit en fait qu'elles soient uniformément intégrables), et $(M^n_{\tau_t})$ est alors, pour chaque n, une martingale relative à $(\mathcal{F}_{\tau_t})$, égale à (M_{τ_t}) sur $[0,A_{T_n}[$. Cette martingale est en plus continue, car les intervalles de constance de l'application $t \longmapsto A_t$ sont aussi des intervalles de constance de l'application $t \longmapsto M^n_t$, en raison de la proposition (2.4). Par suite (M_{τ_t}) est une martingale locale continue sur $[0,A_T[$, réduite par la suite (A_{T_n}). Son processus croissant est égal à $\sup_n t\wedge A_{T_n} = t \wedge A_T$.

3. <u>Convergence en</u> T <u>et prolongement d'une martingale locale continue sur</u> $[0,T[$.

(3.1) <u>Proposition.</u> <u>Soit</u> M <u>un élément de</u> $\mathcal{L}_c[0,T[$ <u>tel que</u> $E[\sup_{t<T} |M_t|] < \infty$. <u>et soit</u> (T_n) <u>une suite réduisant</u> M, (M^n) <u>la suite des martingales correspondantes.</u> <u>Alors</u> M_{T-} <u>existe dans</u> $\mathbb{R}$ <u>p.s. sur</u> $\{T>0\}$. <u>Si l'on pose</u> $M_t = M_{T-} I_{\{T>0\}}$ <u>pour</u> $t \geqq T$, <u>le processus</u> $(M_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ <u>est alors une martingale continue, fermée dans</u> L^1 <u>par la variable</u> $M_{T-} I_{\{T>0\}}$.

<u>Démonstration.</u> Soit (T_n) une suite réduisant M, et soit (M^n) la suite de martingales associée. La suite de variables $(M^n_{T_n})$ est une martingale uniformément intégrable. En effet, la relation $M_t = M^n_t$ pour $t<T_n$ entraîne (en vertu de la continuité de M^n) $|M^n_{T_n}| = |M^n_{T_n -}| \leqq \sup_{t<T} |M_t|$. L'intégrabilité étant établie, on a alors

$$E[M^{n+1}_{T_{n+1}} | \mathcal{F}_{T_n}] = M^{n+1}_{T_n} = M^{n+1}_{T_n -} = \lim_{s \uparrow T_n} M_s = M^n_{T_n -} = M^n_{T_n}$$

c'est à dire la propriété de martingale. La suite $(M^n_{T_n})$ converge p.s. vers une variable intégrable Y . Comme Y est $\mathcal{F}_T$-mesurable, on a

$$E[Y|\mathcal{F}_t] = E[Y|\mathcal{F}_t]I_{\{t<T\}} + YI_{\{t\geqq T\}}$$

Le premier terme du second membre vaut $\lim_n E[M^n_{T_n}|\mathcal{F}_t]I_{\{t<T\}}$ = $\lim_n M^n_{t\wedge T_n}I_{\{t<T\}} = M_tI_{\{t<T\}}$, donc le processus ($M_tI_{\{t<T\}}+YI_{\{t\geqq T\}}$) est une martingale continue à droite fermée dans L^1 par la variable Y. Ceci entraîne l'existence de M_{T-} p.s. sur $\{T>0\}$. Il reste à remarquer que $Y=M_{T-}$ p.s. sur $\{T>0\}$ et que Y=0 sur $\{T=0\}$, puisque M^n est nulle sur $\{T=0\}$ pour tout n.

(3.2) <u>Corollaire</u>. <u>Soit</u> $M\in\mathcal{L}_c[0,T[$ <u>telle que</u> $M_0=0$ <u>sur</u> $\{T>0\}$ <u>et</u> $E[<M,M>_T] < \infty$. <u>Alors</u> M <u>peut être prolongée en une martingale continue</u> (<u>fermée dans</u> L^1).

<u>Démonstration</u> . D'après la proposition précédente, il nous suffit de montrer que $E[\sup_{t<T} M_t^2] < \infty$. Soit (T_n) une suite réduisant M, choisie de manière telle que les martingales associées M^n soient bornées. D'après une inégalité de DOOB, on a

$$E[\sup_t (M^n_t)^2] \leqq 4E[(M^n_\infty)^2]$$

Le premier membre vaut $E[\sup_{t<T_n} M_t^2]$, car M^n est nulle sur $\{T=0\}$, arrêtée à l'instant T_n, et continue à cet instant. D'autre part, $E[(M^n_\infty)^2]$ $= E[<M,M>_{T_n}]$, car $M^n_0=0$. Par passage à la limite, il vient donc

$$E[\sup_{t<T} M_t^2] \leqq 4E[<M,M>_T] < \infty .$$

(3.3) <u>Proposition</u> . <u>Soit</u> M <u>un élément de</u> $\mathcal{L}_c[0,T[$, <u>de processus croissant</u> $(t\wedge T)$.

1) M_{T-} <u>existe dans</u> $\mathbb{R}$ <u>p.s. sur</u> $\{0<T<\infty\}$; <u>si l'on pose</u> $M_t=M_{T-}I_{\{0<T<\infty\}}$ <u>pour</u> $t\geqq T$, <u>le processus</u> $(M_t-M_0)_{t\in\mathbb{R}_+}$ <u>est une martingale continue de processus croissant</u> $(t\wedge T)$.

2) <u>Si</u> B <u>est un mouvement brownien indépendant de</u> T <u>et</u> M, <u>le processus</u> $(W_t) = (M_t+B_t-B_{t\wedge T})_{t\in\mathbb{R}_+}$ <u>est un mouvement brownien</u> .

<u>Démonstration</u> . Nous pouvons sans inconvénient supposer que $M_0=0$ sur $\{T>0\}$. Le corollaire (3.2) appliqué à la restriction de M à $[0,T\wedge n[$ montre alors que M_{T-} est p.s. défini sur $\{0<T\leqq n\}$, pour tout n. Donc M_{T-} est p.s. défini sur $\{0<T<\infty\}$. Si l'on pose $M_t=M_{T-}I_{\{0<T<\infty\}}$ pour $t\geqq T$, le processus (M_t) est alors une martingale continue de processus croissant $(t\wedge T)$, donc de carré intégrable.

Pour démontrer 2), posons $\underline{\underline{M}}_t^o = \underline{\underline{T}}\{ M_s, \{T\leq s\}, s\leq t \}$, $\underline{\underline{B}}_t^o = \underline{\underline{T}}\{B_s, s\leq t \}$, $\underline{\underline{G}}_t^o = \underline{\underline{M}}_t^o \vee \underline{\underline{B}}_t^o$. Les tribus $\underline{\underline{M}}_t^o$ et $\underline{\underline{B}}_t^o$ sont indépendantes par hypothèse, et cela entraîne immédiatement que M, B et MB sont des martingales relatives à $(\underline{\underline{G}}_t^o)$, pourvu que $M_0=B_0=0$ (sinon on raisonnerait sur $M-M_0$ et $B-B_0$). Comme T est un temps d'arrêt de (G_t^o), et M est arrêtée à T, le processus $(M_t B_{t\wedge T})$ est également une martingale. Par suite le processus $W_t=M_t+B_t-B_{t\wedge T}$ est une martingale , (M_t) et $(B_t-B_{t\wedge T})$ sont orthogonales, et le processus croissant $\langle W,W\rangle$ est égal à $t\wedge T + (t-t\wedge T) = t$. D'après un résultat classique, W est un brownien.

(3.4) <u>Remarque</u> . On aurait pu définir un autre brownien prolongeant M en posant $W_t = M_t + B_{(t-T)^+}$. Le raisonnement est analogue à celui qui précède, mais avec des calculs un peu plus compliqués.

(3.5). <u>Théorème</u> . <u>Soit</u> $M\in\mathcal{L}_c[0,T[$. <u>On pose</u> $A_t=\langle M,M\rangle_t$ <u>et</u> $\tau_t=\inf\{s : A_s>t\}$ <u>pour tout</u> $t\geq 0$.

1) <u>Sur l'ensemble</u> $\{T>0\}$ <u>on a p.s. les équivalences suivantes</u>

$$M_{T-} \text{ existe dans } \mathbb{R} \iff \sup_{t<T} |M_t|<\infty \iff A_T < \infty \ .$$

2) <u>Si</u> B <u>est un mouvement brownien indépendant de</u> T <u>et</u> M, <u>le processus</u> W <u>défini par</u>

$$W_t = M_{\tau_t} \ \underline{\text{si}}\ t<A_T \ , \ W_t = M_{T-}I_{\{T>0,\ A_T<\infty\}} + B_t-B_{A_T} \ \underline{\text{si}}\ t\geq A_T$$

<u>est un mouvement brownien</u>.

<u>Démonstration</u>. Posons $\tilde{T} = A_T$, $\tilde{M}_t = M_{\tau_t}$ pour $t<\tilde{T}$. D'après la proposition (2.5), $\tilde{M}$ est une martingale locale continue sur $[0,\tilde{T}[$, de processus croissant $(t\wedge\tilde{T})$. D'après la proposition (3.3), $\tilde{M}_{\tilde{T}-}$ existe p.s. sur $\{0<\tilde{T}<\infty \}$. Il est facile de voir que M_{T-} aussi existe p.s. sur $\{0<\tilde{T}<\infty \}$ et que $M_{T-} = \tilde{M}_{\tilde{T}-}$. Sur $\{T>0, A_T=0\}$, l'application $t\mapsto M_t$ est constante, donc M_{T-} existe et vaut M_0. Finalement M_{T-} existe p.s. sur $\{T>0, A_T<\infty \}$.

Si B est un brownien indépendant de T et de M, il résulte encore de la proposition (3.3) que le processus W défini dans l'énoncé du théorème est un brownien. Les équivalences énoncées en 1) en découlent immédiatement. Si l'on ne dispose pas sur $(\Omega,\mathcal{F},P)$ d'un brownien indépendant de T et de M, on utilise un espace auxiliaire, et cela fournit encore les équivalences cherchées.

Le théorème (3.5) se généralise immédiatement de la manière suivante

(3.6). Théorème. Soit M une martingale locale continue sur $[0,T[$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ (i.e. ses composantes $M^1,\dots,M^n$ sont des éléments de $\mathcal{L}_c[0,T[$). On suppose que $< M^i,M^i >$ est un processus croissant indépendant de i, soit A, et que $< M^i,M^j > = 0$ pour $i\neq j$.

1) Sur $\{T>0\}$ on a p.s. les équivalences suivantes :

M^i_{T-} existe $\Longleftrightarrow$ M^j_{T-} existe $\Longleftrightarrow$ $A_T < \infty$ pour tous i,j , $1\leqq \overset{i}{\underset{=j=}{\leq}} n$.

2) Si B est un mouvement brownien à n dimensions indépendant de T et M, le processus W défini par

$$W_t = M_{\tau_t} \quad \underline{\text{si}}\ t<A_T \ , \quad W_t= M_{T-}I_{\{T>0,A_T<\infty\}} + B_t-B_{A_T} \quad \underline{\text{si}}\ t\geqq A_T$$

est un mouvement brownien à n dimensions.

Le crochet $< M,N >$ de deux éléments de $\mathcal{L}_c[0,T[$ est un processus sur $[0,T[$, défini par polarisation de la manière habituelle. Il faut noter qu'à la différence de $<M,M>$, le processus $<M,N>$ n'admet pas de prolongement naturel à $[0,\infty[$, la limite $<M,N>_{T-}$ n'étant pas nécessairement définie.

4. Applications

Soit $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_t , X_t,P^x)$ la réalisation canonique du semi-groupe de Wiener sur $\mathbb{R}^n$. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On note F la frontière de U et l'on pose

$$T = \operatorname{Inf} \{ t : X_t\in F \}$$

On fixe aussi un point x de U. Dans la suite, " p.s. ", $\mathcal{L}_c[0,T[$, etc réfèrent à P^x . Noter que l'on a p.s. $T>0$.

(4.1) Soit u une fonction réelle, harmonique dans U . Le processus $(u(X_t))_{t<T}$ est alors un élément de $\mathcal{L}_c[0,T[$, de processus croissant $A_t = \int_0^{t\wedge T} \operatorname{grad}^2u(X_s)ds$, et il résulte du théorème (3.5) que p.s.

$$\lim_{t\uparrow T} u(X_t) \text{ existe } \Longleftrightarrow \int_0^T \operatorname{grad}^2u(X_s)ds < \infty \ .$$

On en déduit par exemple le résultat suivant : soit v une fonction réelle borélienne sur F, telle que $v(X_T)I_{\{T<\infty\}}$ soit intégrable pour toute mesure P^y, $y\in U$. Alors, pour la fonction $u = E^{\cdot}[v(X_T)I_{\{T<\infty\}}]$ on a $\int_0^T \operatorname{grad}^2u(X_s)ds < \infty$ p.s.. En effet, u est harmonique dans U, et d'après un résultat connu on a $\lim_{t\uparrow T} u(X_t) = v(X_T)I_{\{T<\infty\}}$ p.s. .

(4.2) Si $n=2$ et si $f=u+i\tilde{u}$ est une fonction <u>holomorphe</u> dans U, les processus $\{u(X_t),t<T\}$ et $\{\tilde{u}(X_t),\ t<T\}$ sont des éléments orthogonaux de $\mathcal{L}_c[0,T[$, tous deux ayant pour processus croissant $A_t=\int_0^{t\wedge T}|f'(X_s)|^2ds$ (en effet, les relations de Cauchy entraînent que le produit scalaire $\mathrm{grad}u.\mathrm{grad}\tilde{u}$ est identiquement nul, tandis que $\mathrm{grad}^2u=\mathrm{grad}^2\tilde{u}=|f'|^2$). Il résulte alors du théorème (3.6) que l'on a p.s. les équivalences

$$\lim_{t\uparrow T} u(X_t) \text{ existe} \iff \lim_{t\uparrow T} \tilde{u}(X_t) \text{ existe} \iff \int_0^T |f'(X_s)|^2 ds<\infty$$

Si U est borné, on a $T<\infty$ p.s. et le processus $B_t=X_{T+t}-X_T$ est un brownien à 2 dimensions indépendant de $\mathcal{F}_T$. Si l'on pose $\tau_t=\inf\{s:A_s>t\}$, il résulte alors du théorème (3.6) que le processus W défini par

$$\begin{aligned} W_t &= f(X_{\tau_t}) \quad \text{si } t<A_T \\ &= \lim_{t\uparrow T} f(X_t) + B_t-B_{A_T} \quad \text{si } t\geqq A_T \end{aligned}$$

est un mouvement brownien, et l'on a $W_0=f(x)$ p.s. du fait que $|f'|$ est presque partout >0 si f n'est pas constante (ou en vertu de la défini-
-tion de W_ζ et de la proposition (2.4))

(4.3) Nous allons maintenant utiliser ces éléments pour démontrer de manière probabiliste un résultat de STEIN et WEISS, en suivant une belle idée de B. DAVIS [1].

Nous conservons les notations précédentes. en supposant que $n=2$ et que U est le disque $\{ z\in\mathbb{C} : |z|<1 \}$. F est alors le cercle unité, que l'on munit de la probabilité uniforme, notée σ . Etant donnée une fonction u harmonique dans U, on note $\tilde{u}$ la fonction harmonique conjuguée de u : $u+i\tilde{u}$ est holomorphe dans U et $\tilde{u}(0)=0$. Si v désigne alors un élément de $L^2(F)$, et $u=Pv$ est le prolongement harmonique de v à U par le noyau de Poisson P, il existe un unique élément de $L^2(F)$, que nous noterons $\tilde{v}$, tel que $\tilde{u}=P\tilde{v}$. Dans ces conditions on a le théorème :

(4.4). <u>Théorème</u>. <u>Soit</u> E <u>un borélien du cercle unité</u> F <u>et soit</u> $v=I_E$. <u>Alors la loi de</u> $\tilde{v}$ <u>pour la mesure</u> P^0 <u>ne dépend que de</u> $\sigma(E)$.

<u>Démonstration</u>. Nous avons $u=Pv=E^\cdot[v(X_T)]$, $\tilde{u}=P\tilde{v}=E^\cdot[\tilde{v}(X_T)]$; posons $f=u+i\tilde{u}$. La fonction f est holomorphe dans U, et l'on a $0\leqq u\leqq 1$, $f(0)=u(0)=\sigma(E)$. Si $\sigma(E)=0$ ou 1, le théorème est évident. Supposons donc que $0<\sigma(E)<1$, et introduisons les processus (A_t) et (W_t) définis en (4.2). On a $\lim_{t\uparrow T} u(X_t)=v(X_T)$ et $\lim_{t\uparrow T} \tilde{u}(X_t)=\tilde{v}(X_T)$ p.s..(4.2) entraîne que

$A_T<\infty$ p.s. , et $W_{A_T}=(v+i\tilde{v})\circ X_T$ p.s.. Comme par ailleurs $W_t=(u+i\tilde{u})\circ X_{\tau_t}$ si $t<A_T$, on constate que $0<\Re e W_t<1$ pour $t<A_T$, tandis que $\Re e W_t=0$ ou 1 p.s. pour $t=A_T$. Ainsi A_T apparaît comme le temps de sortie de la bande $\{0<\Re e z<1\}$ pour le processus W_t, qui est un mouvement brownien issu du point $(\sigma(E),0)$. La loi de W_{A_T} (pour P^0) ne dépend donc que de $\sigma(E)$. Il

Il reste à remarquer que la loi de $\tilde{v}$ (pour σ) est la loi de $\tilde{v}(X_T)$ (pour P^0), et que $\tilde{v}(X_T)=\Im m W_{A_T}$.

Remarque. Le même raisonnement s'applique à un ouvert borné U simplement connexe quelconque, et à un point $x\in U$ fixé quelconque, à condition de désigner par $\tilde{u}$ la fonction conjuguée de u qui s'annule en x, et par σ la mesure harmonique sur la frontière correspondant au point x . Le résultat n'est pas réellement plus général, puisqu'il existe une représentation conforme de U sur le disque unité qui applique x sur 0, mais la méthode probabiliste s'applique directement (et par ailleurs le comportement de la représentation conforme à la frontière ne figure pas dans les exposés classiques du théorème de Riemann).

5. Intégration stochastique sur $[0,T[$.

Ce paragraphe fournit quelques remarques sur l'intégrale stochastique par rapport à un élément de $\mathcal{L}_c[0,T[$.

(5.1) Notons d'abord qu'un processus (X_t) sur $[0,T[$ peut aussi être considéré comme une application X de $[\![0,T[\![= \{(t,\omega) : 0\leq t<T(\omega)\}$ dans $\mathbb{R}$. Sur $[\![0,T[\![$ on définit la tribu des ensembles prévisibles (resp. bien-mesurables) comme étant engendrée par les processus sur $[0,T[$ qui sont adaptés et continus à gauche (resp. à droite). D'où les notions de processus prévisible et de processus bien-mesurable sur $[0,T[$.

(5.2) Remarque. Un processus sur $[0,T[$ est bien-mesurable si et seulement s'il existe un processus bien-mesurable sur $[0,\infty[$ dont il est la trace sur $[0,T[$. On n'a pas d'énoncé analogue pour les processus prévisibles sur $[0,T[$, à moins que le temps d'arrêt T ne soit prévisible.

(5.3) Intégrale stochastique .

Soit $M\in \mathcal{L}_c[0,T[$, et soit $A=\langle M,M\rangle$. On note $L^2_{loc}(A)$ l'ensemble des processus Φ prévisibles sur $[0,T[$ tels que l'on ait pour tout t $\int_0^t \Phi_s^2 dA_s < \infty$ p.s. sur $\{t<T\}$. Pour $\Phi\in L^2_{loc}(A)$, on définit l'intégrale stochastique $\int \Phi dM$ comme l'unique élément L de $\mathcal{L}_c[0,T[$, nul en 0, tel

que l'on ait pour tout $N\in\mathcal{L}_c[0,T[$

$$< L,N >_t = \int_0^t \Phi_s d< M,N >_s \quad \text{sur } \{t<T\}$$

(rappelons que le crochet de deux éléments de $\mathcal{L}_c[0,T[$ est un processus sur $[0,T[$, défini par polarisation de la manière usuelle).

La forme suivante de la formule d'ITO nous paraît particulièrement commode dans beaucoup de circonstances, car elle évite des passages à la limite fastidieux. La démonstration se fait par localisation de la manière évidente.

(5.4) Théorème. Soit X une semimartingale locale continue sur $[0,T[$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, c.à.d. un processus dont les composantes s'écrivent $X^i=M^i+V^i$, avec $M^i\in\mathcal{L}_c[0,T[$, et V^i étant adapté, continu sur $[0,T[$ et à variation localement bornée sur $[0,T[$. Supposons que X prenne ses valeurs dans un ouvert U, et que F soit une application de classe C^2 de U dans $\mathbb{R}$. On a alors p.s. sur $\{t<T\}$

$$F(X_t) = F(X_0) + \Sigma_{i=1}^n \int_0^t D_i F(X_s)dX_s^i + \frac{1}{2}\Sigma_{i,j} \int_0^t D_i D_j F(X_s)d<M^i,M^j>_s .$$

Voici deux exemples où cette forme de la formule d'ITO s'applique directement.

(5.5) Plaçons-nous dans le cadre du paragraphe 4. Alors le théorème précédent montre que, si u est harmonique dans U, on a $u(X_t) = \Sigma_{i=1}^n \int_0^t D_i u(X_s)dX_s^i$ sur $[0,T[$, de sorte que $\{u(X_t),\ t<T\}$ est un élément de $\mathcal{L}_c[0,T[$, de processus croissant $\int_0^{t\wedge T} \mathrm{grad}^2 u(X_s)ds$. Ainsi se trouve justifié un résultat donné sans démonstration au paragraphe (4.1), et qui est à la base de la démonstration probabiliste de certaines inégalités de LITTLEWOOD-PALEY donnée par MEYER ([5] p.130).

(5.6) Soit $M\in\mathcal{L}_c[0,T[$ telle que $M_0=0$ sur $\{T>0\}$. Alors $Z=\exp(M-\frac{1}{2}<M,M>)$ appartient à $\mathcal{L}_c[0,T[$ et vérifie l'équation

$$Z_t = 1 + \int_0^t Z_s dM_s \quad \text{pour } t<T$$

dont elle est l'unique solution dans $\mathcal{L}_c[0,T[$.

Les propriétés de Z résultent immédiatement du théorème (5.4) pour $n=1$, $U=\mathbb{R}$, $X=M-\frac{1}{2}<M,M>$, $F(x)=e^x$. Pour l'unicité, on envisage une autre solution Z' et on applique le théorème (5.4) avec $n=2$, $U=\{(x,y) : x\neq 0\}$, $X=(Z,Z')$, $F(x,y)=y/x$. Un calcul simple montre que $Z'_t/Z_t=1$ sur $\{t<T\}$.

Références

[1]. B. DAVIS . On the distributions of conjugates functions of nonnegative measures. Duke Math. J. 40 (1973), 695-700.

[2]. R.K. GETOOR et M.J. SHARPE. Conformal martingales. Inventiones Math. 16 (1972), 271-308.

[3]. N. KAZAMAKI. Changes of time, stochastic integrals and weak martingales. Z.f.W. 22 (1972), 25-32.

[4]. H. KUNITA. Cours de 3e cycle de l'Université de Paris, 1974-75.

[5]. P.A. MEYER. Démonstration probabiliste de certaines inégalités de LITTLEWOOD-PALEY. I. Séminaire de Probabilités X, Springer 1976.