

# SÉMINAIRE DE PROBABILITÉS (STRASBOURG)

MAURICE KOSKAS

## Images d'équations différentielles stochastiques

*Séminaire de probabilités (Strasbourg)*, tome 11 (1977), p. 411-414

[http://www.numdam.org/item?id=SPS\\_1977\\_\\_11\\_\\_411\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SPS_1977__11__411_0)

© Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1977, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire de probabilités (Strasbourg) (<http://portail.mathdoc.fr/SemProba/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

IMAGES D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES

par Maurice Koskas

Dans l'article [1], Yamada et Watanabe utilisent l'argument suivant. Considérons sur un espace probabilisé  $(\Omega, \underline{F}, P)$  muni d'une famille de tribus  $(\underline{F}_t)_{t \geq 0}$  continue à droite, un mouvement brownien  $(B_t)_{t \geq 0}$  par rapport à la famille  $(\underline{F}_t)$ , et un processus adapté continu  $(X_t)$  satisfaisant à une équation différentielle stochastique

$$(1) \quad X_0 = x \quad dX_t = \sigma(X_t)dB_t + b(X_t)dt \quad (P\text{-p.s.})$$

où  $\sigma$  et  $b$  sont des fonctions boréliennes bornées sur  $\mathbb{R}$ . Transportons nous maintenant sur un espace canonique, c'est à dire considérons l'espace  $W = \underline{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^2)$ , avec sa tribu borélienne usuelle  $\underline{G}$ , avec ses applications coordonnées d'indice  $t$  que nous noterons  $(\beta_t, \xi_t)$ . Nous désignons aussi par  $(\underline{G}_t^0)$  la famille de tribus naturelle (non rendue continue à droite) du processus  $(\beta_t, \xi_t)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$ . Enfin, désignons par  $\pi$  l'application de  $\Omega$  dans  $W$  qui à  $\omega \in \Omega$  associe la trajectoire  $(B_\cdot(\omega), X_\cdot(\omega))$  de sorte que  $\beta_t \circ \pi = B_t$ ,  $\xi_t \circ \pi = X_t$ ; nous transportons sur  $W$  la loi  $P$  en posant  $Q = \pi(P)$ .

Dans ces conditions, Yamada et Watanabe considèrent comme évident que  $(\xi_t)$  est, sur  $W$ , solution de l'équation différentielle stochastique

$$(2) \quad \xi_0 = x \quad d\xi_t = \sigma(\xi_t)d\beta_t + b(\xi_t)dt \quad (Q\text{-p.s.})$$

A la lecture de l'article, ce point nous a un peu arrêtés. Il mérite une démonstration - bien qu'en fait il ne soit pas difficile. Nous allons d'abord nous occuper de ce cas concret, puis passer à une situation plus générale (en suivant une suggestion de P.A. Meyer).

I. Nous désignons par  $(\underline{G}_t)$  la famille de tribus  $(\underline{G}_t^0)$ , rendue continue à droite et complétée. Nous vérifions d'abord que  $(\beta_t)$  est un mouvement brownien par rapport à  $(\underline{G}_t)$ . C'est très facile : les processus  $B_t$  et  $B_t^2 - t$  étant des martingales par rapport à  $(\underline{F}_t)$ , il résulte du théorème des lois images, et du fait que  $\pi^{-1}(\underline{G}_t) \subset \underline{F}_t$ , que les processus  $\beta_t$  et  $\beta_t^2 - t$  sont des martingales continues par rapport à  $(\underline{G}_t)$  donc que  $(\beta_t)$  est un mouvement brownien pour cette famille de tribus.

Considérons ensuite les processus

$$\begin{aligned} \eta_t &= \xi_t - \xi_0 - \int_0^t b(\xi_s) ds & Y_t &= X_t - X_0 - \int_0^t b(X_s) ds \\ \zeta_t &= \int_0^t \kappa_s d\beta_s \quad \text{où } \kappa_s = \sigma(\xi_s) & Z_t &= \int_0^t K_s dB_s \quad \text{où } K_s = \sigma(X_s) \end{aligned}$$

Nous avons  $Y = \eta \circ \pi$ ,  $K = \kappa \circ \pi$ , et (1) nous dit que  $Y_t = Z_t$  p.s.. D'après le théorème des lois images, nous en déduirons que  $\eta_t = \zeta_t$  p.s. si nous prouvons que  $Z = \zeta \circ \pi$ , c'est à dire le lemme suivant :

**LEMME 1 .** Si  $(\kappa_t)$  est un processus prévisible borné par rapport à la famille  $(\underline{G}_t)$ , et si  $(K_t)$  est le processus  $(\kappa_t \circ \pi)$  sur  $\Omega$ , alors ce processus est prévisible par rapport à la famille  $(\underline{F}_t)$  et les intégrales stochastiques  $\zeta_t = \int_0^t \kappa_s d\beta_s$  et  $Z_t = \int_0^t K_s dB_s$  sont liées par la relation  $Z_t = \zeta_t \circ \pi$

Une fois mis sous cette forme générale, le lemme est évident : on commence par l'établir pour les processus prévisibles élémentaires, puis on fait le passage à la limite usuel par classes monotones sur  $\varphi$ , correspondant à une convergence en probabilité (ici, dans  $L^2$ ) des intégrales stochastiques  $\zeta_t$  et  $Z_t$ .

II. Nous passons maintenant à une situation beaucoup plus générale. Nous considérons deux espaces probabilisés  $(\Omega, \underline{F}, P)$ ,  $(W, \underline{G}, Q)$ , avec une application mesurable  $\pi : (\Omega, \underline{F}) \rightarrow (W, \underline{G})$  telle que  $Q = \pi(P)$ . Nous supposons ces deux espaces complets, et sur chacun d'eux nous nous donnons une famille croissante de tribus,  $(\underline{F}_t)$  sur  $\Omega$ ,  $(\underline{G}_t)$  sur  $W$ , satisfaisant aux conditions habituelles, et telles que  $\pi^{-1}(\underline{G}_t) \subset \underline{F}_t$  pour tout  $t$ .

Donnons nous maintenant des processus càdlàg.  $(\mu_t^i)$  sur  $W$ , adaptés à  $(\underline{G}_t)$  ( $1 \leq i \leq n$ ), et des processus  $(\kappa_t^i)$  prévisibles localement bornés sur  $W$ . Introduisons les processus  $M_t^i = \mu_t^i \circ \pi$  (manifestement càdlàg. sur  $\Omega$  et adaptés à  $(\underline{F}_t)$ ), et les processus  $K_t^i = \kappa_t^i \circ \pi$  (manifestement prévisibles localement bornés par rapport à  $(\underline{F}_t)$ ). Le petit résultat de transport que nous avons vu plus haut se généralise de la manière suivante :

**THEOREME .** Supposons que sur  $\Omega$  les  $M^i$  soient des semimartingales par rapport à  $(\underline{F}_t)$ , et satisfassent à l'équation de liaison stochastique

$$(3) \quad \sum_i K_t^i dM_t^i = 0 \quad P\text{-p.s.}$$

Alors les  $\mu^i$  sont des semimartingales sur  $W$  et satisfont à

$$(4) \quad \sum_i \kappa_t^i d\mu_t^i = 0 \quad Q\text{-p.s.}$$

Admettons d'abord que les  $\mu^i$  soient des semimartingales. Alors un argument de classes monotones identique à celui du lemme 1 montre que si  $\kappa^i$  est prévisible borné par rapport à  $(\underline{G}_t)$ , si  $K_t^i = \kappa_t^i \circ \pi$ ,  $\zeta_t^i = \int_0^t \kappa_s^i d\mu_s^i$ ,  $Z_t^i = \int_0^t K_s^i dM_s^i$ , alors  $Z_t^i = \zeta_t^i \circ \pi$ . On passe de là aussitôt, par 'arrêt, au cas où  $\kappa^i$  est prévisible localement borné. Dans ces conditions, la relation (3) s'écrit  $\sum_i Z_t^i = 0$  P-p.s., et elle entraîne  $\sum_i \zeta_t^i = 0$  Q-p.s..

Le seul point à vérifier est donc le fait que les  $\mu^i$  soient des semimartingales. Nous pouvons nous débarrasser de l'indice  $i$ . Introduisons la famille de tribus  $\underline{H}_t = \pi^{-1}(\underline{G}_t)$ , qui satisfait elle aussi aux conditions habituelles et qui est contenue dans  $(\underline{F}_t)$ . Par hypothèse le processus  $M_t = \mu_t \circ \pi$  est une semimartingale par rapport à  $(\underline{F}_t)$ , adaptée à  $(\underline{H}_t)$ . D'après un théorème tout récent de C. Stricker,  $(M_t)$  est alors une semimartingale par rapport à  $(\underline{H}_t)$ . Admettons pour un instant le lemme suivant :

LEMME 2 . a) Soit T un temps d'arrêt de  $(\underline{H}_t)$ . Il existe alors un temps d'arrêt  $\tau$  de  $(\underline{G}_t)$  tel que  $T = \tau \circ \pi$  p.s..

b) Soit  $(X_t)$  un processus adapté à  $(\underline{H}_t)$  à trajectoires càdlàg.. Il existe un processus  $(\xi_t)$  à trajectoires càdlàg., adapté à  $(\underline{G}_t)$ , tel que  $X_t = \xi_t \circ \pi$  -p.s. pour tout t .

D'après la définition des semimartingales, M peut s'écrire  $L+A$ , où L est une martingale locale par rapport à  $(\underline{H}_t)$ , A un processus dont les trajectoires sont p.s. à variation finie sur tout intervalle compact. On peut supposer aussi que  $L_0=0$ . D'après le lemme 2, il existe des processus càdlàg.  $(\lambda_t)$ ,  $(\alpha_t)$ , adaptés à  $(\underline{G}_t)$ , tels que  $L_t = \lambda_t \circ \pi$  p.s.,  $A_t = \alpha_t \circ \pi$  p.s. sur  $\Omega$ .

i) Nous avons  $M_t = L_t + A_t$  P-p.s. ; d'après le théorème des lois images, nous avons  $\mu_t = \lambda_t + \alpha_t$  Q-p.s.. Comme les trois processus sont continus à droite, ils sont Q-indistinguables, et il nous suffit de démontrer que les trajectoires de  $(\alpha_t)$  sont Q-p.s. à variation finie, et que  $(\lambda_t)$  est une martingale locale.

ii) Comme le processus  $(\alpha_t)$  est continu à droite, il nous suffit de vérifier que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la v.a.

$$\lim_m \sum_i |\alpha_{s_{i+1}}(\omega) - \alpha_{s_i}(\omega)| \quad \text{où } s_i = i2^{-m}, \quad 0 \leq i < 2^m$$

est Q-p.s. finie. D'après le théorème des lois images, cela résulte du fait que la v.a.

$$\lim_m \sum_i |A_{s_{i+1}}(\omega) - A_{s_i}(\omega)|$$

est P-p.s. finie sur  $\Omega$ .

iii) Il existe des temps d'arrêt  $T_n$  de la famille  $(\underline{H}_t)$ , tendant vers  $+\infty$  en croissant, tels que les processus arrêtés  $L_t^n = L_{t \wedge T_n}$  soient des martingales uniformément intégrables par rapport à  $(\underline{F}_t)$ . D'après le lemme 2, a), il existe des temps d'arrêt  $\tau_n$  de la famille  $(\underline{G}_t)$  tels que  $T_n = \tau_n \circ \pi$  p.s.. Il résulte du théorème des lois images que  $\tau_n$  tend Q-p.s. vers l'infini en croissant. Posons alors  $\lambda_t^n = \lambda_{t \wedge \tau_n}$ ; nous avons  $L_t^n = \lambda_t^n \circ \pi$  p.s., donc  $\lambda_t^n$  est Q-intégrable pour tout t fini (théorème des lois images). Soient s, t tels que  $s < t$ , et  $U \in \underline{G}_s$ . Nous avons d'après le théorème des lois images

$$\int_U (\lambda_t^n - \lambda_s^n) Q = \int_{\pi^{-1}(U)} (L_t^n - L_s^n) P = 0$$

et par conséquent  $(\lambda_t^n)$  est une martingale. Donc  $(\lambda_t)$  est une martingale locale, et la démonstration est achevée - à cela près que nous devons nous occuper du lemme 2.

#### Démonstration du lemme 2.

a) Lorsque T est un temps d'arrêt étagé, le résultat est à peu près évident. On en déduit le cas général par passage à la limite.

b) Pour t rationnel, choisissons une v.a.  $\eta_t$ ,  $\underline{G}_t$ -mesurable et telle que  $\eta_t \circ \pi = X_t$  (une telle fonction existe, puisque  $\underline{H}_t = \pi^{-1}(\underline{G}_t)$ ), et soit U l'ensemble des  $w \in W$  tels que l'application  $t \mapsto \eta_t(w)$  soit restriction aux rationnels d'une fonction càdlàg. sur  $\mathbb{R}_+$ . D'après C. Dellacherie et P.A. Meyer, Probabilités et potentiel, chap. IV th. 18 (p. 145), U est  $\underline{G}$ -mesurable, donc  $Q(U) = P(\pi^{-1}(U))$ , et comme  $(X_t)$  est un processus càdlàg. sur  $\Omega$ , cette dernière probabilité est égale à 1. Comme  $\underline{G}_0$  contient les ensembles Q-négligeables, on a  $U \in \underline{G}_0$  et si l'on pose

$$\text{pour } w \notin U, \quad \xi_t(w) = 0$$

$$\text{pour } w \in U, \quad \xi_t(w) = \lim_{\substack{s \uparrow t \\ s \in \mathbb{Q}}} \eta_s(w)$$

on obtient un processus càdlàg. adapté. Il est clair que  $\xi_t \circ \pi = X_t$  p.s..

#### REFERENCES

- [1]. T. YAMADA et S. WATANABE. On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations. J. Math. Kyoto Univ. 11, 1971, p. 155-167.  
 [2]. C. STRICKER. Semimartingales, quasi-martingales, martingales locales et filtrations naturelles. A paraître.