Renzo Cairoli
John B. Walsh

Prolongement de processus holomorphes. Cas « carré intégrable »

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 11 (1977), p. 327-339
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1977__11__327_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1976/77

PROLONGEMENT DE PROCESSUS HOLOMORPHES

CAS "CARRE INTEGRABLE"

par R. Cairoli et J.B. Walsh

1. Résumé

Nous nous proposons de démontrer que, dans le cas "carré intégrable", un processus holomorphe dans un domaine droit se prolonge de manière unique en un processus holomorphe dans une région qui sera appelée, par ses caractéristiques, région d'homolorphie.

2. Notations

Nos notations sont prises de [1]. Si $z = (s,t)$ et $z' = (s',t')$ sont des points de $\mathbb{R}_+^2$, nous désignerons par "$z \prec z'$", "$z \prec\!\!\prec z'$" et "$z \curlywedge z'$" les relations "$s \leq s'$ et $t \leq t'$", resp. "$s < s'$ et $t < t'$", "$s \leq s'$ et $t \geq t'$". Si $o \prec z \prec\!\!\prec z'$, nous désignerons par $[z,z']$, $[z,z')$ et $[z,\infty)$ les rectangles $\{\zeta : z \prec \zeta \prec z'\}$, resp. $\{\zeta : z \prec \zeta \prec\!\!\prec z'\}$, $\{\zeta : z \prec \zeta\}$. Nous écrirons R_z au lieu de $[o,z]$ et poserons $|z| = st$.

Dans toute la suite, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ désigne un espace probabilisé complet et $W = \{W_z, z \in \mathbb{R}_+^2\}$ un processus de Wiener à deux paramètres. La notion de martingale sera toujours entendue relativement à la famille des tribus naturelles de W, c'est-à-dire à $\{\mathcal{F}_z, z \in \mathbb{R}_+^2\}$, où $\mathcal{F}_z$ est la plus petite tribu qui rend mesurables les variables aléatoires (v.a.) W_ζ, $\zeta \prec z$, et qui comprend les ensembles négligeables de $\mathcal{F}$. Nous dirons qu'un processus est adapté s'il est adapté à $\{\mathcal{F}_z, z \in \mathbb{R}_+^2\}$.

Nous désignerons par H_n le n-ème polynôme d'Hermite :

$$H_n(x,t) = \frac{(-t)^n}{n!} e^{x^2/2t} \frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{-x^2/2t} \quad (n \geq o, x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R})$$

Rappelons que H_n satisfait à l'équation de la chaleur rétrospective

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial t} = o,$$

et que pour tout $t > o$ fixé, $\{H_n(\cdot,t), n \geq o\}$ est un système orthogonal complet dans $L^2(\mathbb{R}, \mu)$, où μ désigne la mesure définie par $d\mu = (2\pi t)^{-1/2} e^{-x^2/2t}\, dx$. Par conséquent, $E\{H_m(W_z, |z|) H_n(W_z, |z|)\} = o$ si $m \neq n$. Si $m = n$, cette espérance est égale à $|z|^n/n!$.

3. Processus holomorphes

Soit Γ un segment de droite horizontal contenu dans $\mathbb{R}_+^2$ d'extrémités z_1 et z_2 et soit Φ un processus défini dans Γ. Nous dirons que Φ possède une dérivée partielle stochastique par rapport à W au long de Γ, s'il existe une processus mesurable adapté ϕ - la dérivée partielle - définie dans Γ, tel que l'on ait

(1) $$\Phi_z = \Phi_{z_1} + \int_{\Gamma_z} \phi \partial W, \text{ pour tout } z \in \Gamma,$$

où $\Gamma_z = \Gamma \cap R_z$.

Naturellement, en écrivant l'intégrale stochastique, mous faisons implicitement l'hypothèse que $\int_\Gamma \phi^2 d|\zeta|$ est fini p.s.

On remarquera que si Φ est une martingale de carré intégrable, il existe, d'après [2], un processus α défini dans $R_{z_2} - R_{z_1}$ tel que $\alpha_{s,t}$ est $\mathcal{F}_{s,t_1}$-mesurable (t_1 est l'ordonnée de z_1),

$$E\{\int_{R_{z_2}-R_{z_1}} \alpha^2 d\zeta\} < \infty \text{ et } \Phi_z = \Phi_{z_1} + \int_{R_z - R_{z_1}} \alpha\, dW \text{ pour tout } z \in \Gamma.$$

Cette représentation étant unique, en la comparant avec (1) il en résulte que $\alpha_{s,t} = \phi_{s,t_1}$ pour presque tout $(s,t) \in R_{z_2} - R_{z_1}$ et donc, en particulier, que

(2) $$E\{\int_\Gamma \phi^2 d|\zeta|\} < \infty,$$

ce qui fait que, pour les martingales de carré intégrable, notre définition de dérivée partielle coïncide avec celle qui figure dans [2].

La notion de dérivée partielle stochastique par rapport à W au long d'un segment de droite vertical est définie de manière analogue.

Soit A un rectangle contenu dans $\mathbb{R}^2_+$. Un processus Φ, défini dans une région contenant A, est dit faiblement holomorphe (resp. holomorphe) dans A, s'il est adapté et s'il existe un processus mesurable adapté ϕ, défini dans A, qui satisfait à (1) pour tout segment de droite horizontal ou vertical $\Gamma \subset A$ (resp. pour tout chemin croissant $\Gamma \subset A$). Le processus ϕ est appelé dérivée de Φ.

Sans la condition (2), l'étude des processus faiblement holomorphes, ou holomorphes, s'est révélée très délicate. Dans ce cas, on est amené tout naturellement à considérer des régions aléatoires, plutôt que fixes. Nous donnerons quelques exemples qui illustrent la situation dans un article qui fait suite au présent. Ici, nous n'aborderons pas ce type de questions et quand nous dirons "holomorphe" nous entendrons toujours "holomorphe" dans le cas "carré intégrable", c'est-à-dire dans le cas où la condition (2) est remplie. Dans ce cas, nous savons, d'après [1], que les notions d'holomorphie faible et d'holomorphie sont équivalentes.

Rappelons un résultat dont nous aurons besoin par la suite et qui a été démontré dans [1] et [2]. Si Φ est une martingale de carré intégrable définie dans un rectangle $[a,b]$ et possédant des dérivées partielles stochastiques par rapport à W au long du bord supérieur et du bord droit de $[a,b]$, alors Φ est holomorphe dans $[a,b]$ et admet une dérivée qui est elle-même holomorphe dans $[a,b)$.

Une dernière définition : si D est un domaine contenu dans $\mathbb{R}_+^2$ et Φ un processus défini dans une région contenant D, nous dirons que Φ est holomorphe dans D (ou, plus simplement, holomorphe, si le domaine de définition est D), s'il est holomorphe dans tout sous-rectangle de D. Dans ce cas, nous appellerons dérivée de Φ un processus qui est, localement dans D, une dérivée de Φ.

Il est évident que si Φ est un processus défini et holomorphe dans D, alors Φ se prolonge par L^2-continuité (ou par conditionnement) en un processus défini et holomorphe - c'est-à-dire holomorphe dans tout sous-rectangle - dans l'adhérence de D pour la topologie droite de $\mathbb{R}_+^2$, c'est-à-dire la topologie dont la collection des rectangles de la forme [a,b) est une base. Nous appellerons un domaine ainsi fermé <u>domaine droit</u>.

D'après le rappel fait plus haut, il est possible de choisir la dérivée d'un processus holomorphe dans un domaine droit de telle manière qu'elle soit holomorphe. Un tel choix est unique et nous supposerons toujours qu'il ait été fait.

4. Résultats auxiliaires

Dans les lemmes qui suivent, D désigne un domaine droit contenu dans $\mathbb{R}_+^2$ et Φ un processus holomorphe dans D. Nous désignerons les dérivées successives de Φ par $\Phi^{(n)}$, $n \geq 1$. Nous poserons, en outre, $\Phi^{(o)} = \Phi$.

On remarquera que si Γ est une chemin croissant d'extrémités a et b, contenu dans D, alors

$$(3) \qquad E\{\int_\Gamma (\Phi^{(n+1)})^2 d|\zeta|\} < \infty \quad \text{et} \quad \Phi_b^{(n)} = \Phi_a^{(n)} + \int_\Gamma \Phi^{(n+1)} \partial W,$$

pour tout $n \geq o$, ce qui entraîne, en particulier, que $\Phi^{(n)}$ restreint à Γ est une martingale de carré intégrable. En effet, un nombre fini de sous-rectangles de D recouvrent Γ et dans chacun de ces sous-rectangles (3) vaut, par définition, du fait que $\Phi^{(n)}$ est holomorphe et que sa dérivée est $\Phi^{(n+1)}$.

<u>Lemme 1</u>. Soit $a \in D$ et soit Γ un chemin croissant d'origine a et contenu dans D. Si pour $z \in \Gamma$, Γ_z désigne le chemin Γ arrêté à z, alors, pour tout $z \in \Gamma$ et tout $n \geq 1$,

$$(4) \qquad E\{\Phi_z^2 | \mathcal{F}_a\} = \sum_{i=o}^{n-1} (\Phi_a^{(i)})^2 \frac{(|z|-|a|)^i}{i!} + r_n(z),$$

où

$$r_n(z) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\Gamma_z}\int_{\Gamma_{\zeta_{n-1}}}\cdots\int_{\Gamma_{\zeta_2}}\int_{\Gamma_{\zeta_1}} E\{(\Phi_\zeta^{(n)})^2 | \mathcal{F}_a\} d|\zeta| d|\zeta_1| \ldots d|\zeta_{n-1}|, & \text{si } n \geq 2, \\ \displaystyle\int_{\Gamma_z} E\{(\Phi_\zeta^{(1)})^2 | \mathcal{F}_a\} d|\zeta|, & \text{si } n = 1. \end{cases}$$

Nous omettrons la démonstration de ce lemme, car elle est analogue à celle de la proposition 9.11 de [1].

Lemme 2. Si $a \in D$, alors pour tout z dans un voisinage de a pour la topologie droite,

$$\Phi_z = \sum_{n=o}^{\infty} \Phi_a^{(n)} H_n(W_z - W_a, |z| - |a|), \tag{5}$$

où la série converge dans L^2 et p.s.

Démonstration. Pour $z \prec z'$ désignons par $S_z^{z'}$ le segment de droite d'extrémités z et z'. Posons $A = \{z: z \succ a, S_a^{2z-a} \subset D\}$. Il est clair que A est un voisinage de a pour la topologie droite. Fixons $z \in A$. Le lemme 1, appliqué pour $\Gamma = S_z^{2z-a}$, implique que

$$\sum_{n=o}^{\infty} E\{(\Phi_z^{(n)})^2\} \frac{(|2z-a|-|z|)^n}{n!} < \infty,$$

puisque $r_n \geq o$ p.s. pour tout n, et donc, en particulier, que

$$\lim_{n\to\infty} E\{(\Phi_z^{(n)})^2\} \frac{(|2z-a|-|z|)^n}{n!} = 0. \tag{6}$$

Or, $\Phi^{(n)}$ restreint à Γ est une martingale, donc

$$E\{(\Phi_\zeta^{(n)})^2\} \leq E\{(\Phi_z^{(n)})^2\},$$

si $\zeta, z \in \Gamma$ et $\zeta \prec z$. Par conséquent, en appliquant le théorème de Fubini à l'espérance de l'expression qui définit r_n, nous obtenons

$$E\{r_n(z)\} \leq E\{(\Phi_z^{(n)})^2\} \frac{(|z|-|a|)^n}{n!} ,$$

et par suite, compte tenu de (6) et du fait que $(|z|-|a|)^n \leq (|2z-a|-|z|)^n$,

$$\lim_{n\to\infty} E\{r_n(z)\} = o.$$

Mais alors, d'après le lemme 1, appliqué cette fois-ci pour $\Gamma = S_a^z$,

$$(7) \qquad E\{\Phi_z^2\} = \sum_{n=o}^{\infty} E\{(\Phi_a^{(n)})^2\} \frac{(|z|-|a|)^n}{n!}.$$

Nous en déduisons que la série dans (5) converge dans L^2 pour tout $z \in A$, puisque ses termes sont orthogonaux. Sa somme définit donc un processus holomorphe Ψ tel que $\Psi_a^{(n)} = \Phi_a^{(n)}$, pour tout $n \geq o$ (Proposition 9.3 de [1]). Mais alors, d'après (7), appliquée au processus holomorphe $\Phi - \Psi$ dans A, $E\{(\Phi_z - \Psi_z)^2\} = o$ pour tout z dans un voisinage de a pour la topologie droite et, par conséquent, (5) a lieu pour tout z dans ce voisinage. En vertu d'un résultat dû à Rosenbloom et Widder (voir l'appendice), la série converge également p.s.

Pour énoncer le prochain lemme, nous aurons besoin des deux notations suivantes . Si $a \in D$, D(a) désignera l'ensemble des $z \succ a$ tels qu'il existe un chemin croissant contenu dans D ayant pour extrémités a et z. Nous poserons en outre $\rho_a = \sup\{|z|: z \in D(a)\}$.

<u>Lemme 3</u>. Soit $a \in D$. La série dans (5) converge dans L^2 et p.s. pour tout $z \succ a$ tel que $|z| < \rho_a$ et sa somme définit un processus holomorphe Ψ tel que $\Psi_z = \Phi_z$ pour tout $z \in D(a)$.

Démonstration. Si $z \succ a$ et $|z| < \rho_a$, alors en vertu du lemme 1,

$$\sum_{n=o}^{\infty} E\{(\Phi_a^{(n)})^2\}\frac{(|z|-|a|)^n}{n!} < \infty.$$

Nous avons déjà remarqué que cela implique la convergence dans L^2 et p.s. de la série dans (5) et que la somme de cette série définit un processus Ψ qui est holomorphe. Il ne nous reste donc plus qu'à prouver que Ψ, restreint à $D(a)$, coïncide avec Φ. A cet effet, fixons un $z \in D(a)$ et considérons un chemin croissant Γ d'extrémités a et z et contenu dans D. Désignons par Γ_ζ le chemin Γ arrêté à ζ et posons $\zeta_o = \sup\{\zeta : \zeta \in \Gamma, \Psi_{\zeta'} = \Phi_{\zeta'}$ pour tout $\zeta' \in \Gamma_\zeta\}$. Démontrons que $\Psi_{\zeta_o}^{(n)} = \Phi_{\zeta_o}^{(n)}$ pour tout $n \geq o$. Les deux processus Ψ et Φ étant L^2-continus, $\Psi_{\zeta_o} = \Phi_{\zeta_o}$. D'autre part, si $\Psi_{\zeta_o}^{(n)} = \Phi_{\zeta_o}^{(n)}$, il résulte de (3) que $\Psi_\zeta^{(n+1)} = \Phi_\zeta^{(n+1)}$ $d|\zeta|$ - p.p. sur Γ_{ζ_o}. Mais les deux processus $\Psi^{(n+1)}$ et $\Phi^{(n+1)}$ sont L^2-continus, donc $\Psi_{\zeta_o}^{(n+1)} = \Phi_{\zeta_o}^{(n+1)}$. Nous appliquons maintenant le lemme 2. D'après ce lemme, $\Psi_\zeta = \Phi_\zeta$ dans un voisinage de ζ_o pour la topologie droite. Cela montre que $\zeta_o = z$.

5. Prolongement de processus holomorphes

Nous dirons qu'un domaine droit est une région d'holomorphie s'il est de la forme $\{z : z \succ a, |z| < \rho\}$, où $a \in \mathbb{R}_+^2$ et $|a| < \rho \leq \infty$. Nous appellerons a et ρ respectivement début et paramètre de la région d'holomorphie. Si $D \subset \mathbb{R}_+^2$, nous désignerons par R(D) la plus petite région d'holomorphie contenant D.

En guise de justification de la terminologie employée, nous allons d'abord exiber, pour une région d'holomorphie donnée R, un processus défini et holomorphe dans R qui n'a de prolongement holomorphe dans aucun domaine droit D $\neq$ R contenant R. A cet effet, désignons par a et ρ le début et le paramètre de R. Choisissons en outre une suite $\lambda_o, \lambda_1, \ldots$ de nombres réels telle que $\sum_n \lambda_n^2 t^n/n!$ converge si $o \leq t < \rho$ et diverge si $t > \rho$. Posons, pour $z \in R$,

$$\Phi_z = W_a + \sum_{n=o}^{\infty} \lambda_n H_n(W_z, |z|),$$

la convergence de la série étant prise dans L^2. Si le processus Φ ainsi défini se prolongeait au-delà de $\partial R \cap \{z: |z| = \rho\}$ en un processus holomorphe, alors il en serait de même de $\sum_n \lambda_n H_n(W_z, |z|)$ et le lemme 3 permettrait de conclure que la série $\sum_n \lambda_n^2 t^n/n!$ converge pour des $t > \rho$, ce qui est impossible. Si Φ se prolongeait au-delà de $\partial R - \{z: |z| = \rho\}$, alors le prolongement serait de la forme

$$\Phi_z = E\{\Phi_{a \vee z} | \mathcal{F}_z\} = W_{a \wedge z} + \sum_{n=o}^{\infty} \lambda_n H_n(W_z, |z|),$$

où $\vee$ et $\wedge$ indiquent le supremum et l'infinum pour l'ordre $\prec$. Or, $\{W_{a \wedge z}, z \in \mathbb{R}_+^2\}$ n'est holomorphe dans aucun sous-rectangle de $\{z: z \curlywedge a \text{ ou } a \curlywedge z\}$, d'où la contradiction.

<u>Théorème</u>. Soit D un domaine droit et soit Φ un processus défini et holomorphe dans D. Il existe un prolongement holomorphe

Ψ de Φ à $R(D)$ et ce prolongement est unique. En outre, pour presque tout ω, nous avons pour tout $z \in R(D)$ et tout $n \geq o$,

$$\Psi_z^{(n)}(\omega) = f^{(n)}(W_z(\omega)-W_a(\omega), |z|-|a|;\omega),$$

où a est le début de $R(D)$, $f^{(n)}(x,t;\omega) = \frac{\partial^n}{\partial x^n} f(x,t;\omega)$ et $f(x,t;\omega)$ est la solution de l'équation de la chaleur rétrospective définie, dans la bande $\mathbb{R}\times[o,\rho)$ (ρ paramètre de $R(D)$), par

$$f(x,t;\omega) = \sum_{n=o}^{\infty} \Psi_a^{(n)}(\omega) H_n(x,t).$$

<u>Démonstration</u>. La deuxième partie du théorème est une conséquence immédiate du lemme 3 et du résultat énoncé dans l'appendice. Pour démontrer la première partie, c'est-à-dire l'existence d'un prolongement, considérons une suite de rectangles $A_n = [a_n, a_n')$, $a_n \lll a_n'$, telle que $(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ pour tout n et que $D^o \subset \bigcup_n A_n \subset D$. Posons $R_n = R(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)$. Nous allons établir l'existence d'une suite de processus $\Psi^1, \Psi^2, \ldots$, où Ψ^n est défini et holomorphe dans R_n et tel que $\Psi_z^n = \Phi_z$ pour tout $z \in A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ et $\Psi_z^n = \Psi_z^{n-1}$ pour tout $z \in R_{n-1}$. Nous procéderons par récurrence sur n. L'existence de Ψ^1 découle immédiatement du lemme 3. Supposons l'existence de Ψ^n prouvée et démontrons celle de Ψ^{n+1}. A cet effet, désignons par d et d' les débuts de R_n, resp. R_{n+1}, et posons $b = a_{n+1} \vee d$. Du fait que $(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \cap A_{n+1} \neq \emptyset$,

il découle, par conditionnement, que $(\Psi^n)_b^{(i)} = \Phi_b^{(i)}$ pour tout $i \geq o$, ce qui implique, en vertu du lemme 3, que $\Psi_z^n = \Phi_z$ pour tout $z \in R_n \cap A_{n+1}$. Définissons :

$$\Xi_z = \begin{cases} \Psi_z^n & \text{si } z \in R_n, \\ \Phi_z & \text{si } z \in A_{n+1} - R_n, \\ E\{\Phi_b \mid \mathcal{F}_z\} & \text{si } z \in [d', b). \end{cases}$$

En vertu du résultat rappelé au paragraphe 3, selon lequel, pour une martingale de carré intégrable, l'existence de dérivées partielles stochastiques au long du bord supérieur et du bord droit d'un rectangle implique l'holomorphie dans le rectangle, le processus Ξ ainsi défini est holomorphe. Appliquons alors à nouveau le lemme 3 : l'existence de Ψ^{n+1} en découle. Il ne reste maintenant plus qu'à poser $\Psi_z = \Psi_z^n$ si $z \in R_n$ et à prolonger Ψ par L^2-continuité (ou par conditionnement) à $R(D) - \bigcup_n R_n$. Le processus Ψ ainsi défini est unique. En effet, si Ψ' est un deuxième prolongement, nous avons, d'après le lemme 3,

$$\sum_{n=o}^{\infty} E\{(\Psi_a^{(n)} - \Psi'^{(n)}_a)^2\} \frac{(|z|-|a|)^n}{n!} = 0$$

pour tout $z \in \bigcup_n A_n$. Par conséquent, $\Psi_a^{(n)} = \Psi'^{(n)}_a$ pour tout $n \geq o$, ce qui implique, grâce au lemme 3, $\Psi = \Psi'$.

6. Appendice

Nous allons rappeler ici le résultat de Rosenbloom et

Widder utilisé dans le texte qui précède. On en trouvera la démonstration dans [3].

Soit λ_n, $n \geq o$, une suite de nombres réels et soit ρ un nombre réel positif. Si la série $\sum_n \lambda_n^2 t^n/n!$ converge pour $o \leq t < \rho$ et diverge pour $t > \rho$ (autrement dit, si $\limsup_{n\to\infty} (\lambda_n^2/n!)^{1/n} = 1/\rho$), alors la série $\sum_n \lambda_n H_n(x,t)$ converge dans la bande $B = \{(x,t): x\in\mathbb{R}, t\in(-\rho,\rho)\}$ et la convergence a lieu uniformément dans tout compact de cette bande. En outre si B' est une bande telle que $B'\supset B$ et $B' \neq B$, cette série ne converge pas partout dans B'.

Bibliographie

[1] R. Cairoli et J.B. Walsh. Stochastic integrals in the plane. Acta Mathematica, 4 (1975), 111-183.

[2] R. Cairoli et J.B. Walsh. Martingale representations and holomorphic processes. Annals of Probability (à paraître).

[3] P.C. Rosenbloom et D.V. Widder. Expansions im terms of heat polynomials and associated functions. TAMS, 92 (1959), 220-266.