Albert Benveniste

Application d'un théorème de G. Mokobodzki à la théorie des flots

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 11 (1977), p. 21-26
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1977__11__21_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités 1975/76

APPLICATION D'UN THEOREME DE G. MOKOBODZKI A LA THEORIE DES FLOTS

A. Benveniste.

G. Mokobodzki vient de démontrer le résultat suivant, qui fournit, dans certains cas, une limite médiale borélienne (cf.[3]) pour une suite de fonctions; pour une démonstration de ce théorème, le lecteur pourra se reporter à l'article "SUR UN THEOREME DE MOKOBODZKI" de P.A. MEYER dans ce volume.

THEOREME 1: *soit* $(\Omega,\underline{\underline{F}},\mathbb{P})$ *un espace probabilisé complet, muni d'une filtration* $(\underline{\underline{F}}_t)$ *satisfaisant aux conditions habituelles. Soit* Y^n *une suite de processus optionnels, uniformément bornée. On suppose que, pour tout temps d'arrêt* T, $\mathbb{E}(Y^n_T.1_{\{T<\infty\}})$ *admet une limite. Il existe alors un processus optionnel* Y *tel que* $Y^n_T.1_{\{T<\infty\}}$ *converge faiblement dans* L^1 *vers* $Y_T.1_{\{T<\infty\}}$ *pour tout temps d'arrêt* T. *On a le même résultat en remplaçant"optionnel" par "prévisible", ou par "mesurable".*

Le but de ce papier est de donner l'application de ce résultat à la théorie des flots, à un problème qui a été précisément à l'origine de la question posée à Mokobodzki. L'application est d'ailleurs beaucoup moins intéressante que le théorème lui-même. Les notations seront celles de [2] . L'objet de ce travail est de définir en théorie des flots l'analogue des projections coprévisibles et cooptionnelles définies par AZEMA [1] en théorie des processus de Markov. Les objets que nous définirons ont toutes les bonnes propriétés de ceux qui sont définis par Azema, mais tout cela ne semble conduire à aucune théorie fructueuse sur le retournement du temps.

Nous désignerons par $(\Omega,\underline{\underline{F}},\underline{\underline{F}}_t,\theta_t,\mathbb{P})$ un flot filtré: $(\theta_t)_{t\in\mathbb{R}}$ est un groupe mesurable d'automorphismes de l'espace probabilisé $(\Omega,\underline{\underline{F}},\mathbb{P})$, et $(\underline{\underline{F}}_t)$ un filtration satisfaisant à $\underline{\underline{F}}_{t+s} = \theta_t^{-1}\underline{\underline{F}}_s$. Nous supposons que la tribu $\underline{\underline{F}}_0$ ainsi que la tribu $\underline{\underline{F}}$ sont engendrées par une famille de fonctions f continues sur les trajectoires du flot, ce qui signifie que $t \to f(\theta_t\omega)$ est continue pour tout ω; pour simplifier, nous supposons que $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}_{+\infty}$. Nous supposons également que ce flot filtré est <u>propre</u>, ce qui signifie qu'il n'existe aucun ensemble I appartenant à $\underline{\underline{F}}$, invariant par θ_t, non négligeable, et sur lequel $A = \theta_t A$ pour tout réel t et tout $A\in\underline{\underline{F}}$.

Nous rappelons qu'un processus (X_t) est dit <u>stationnaire</u> s'il est de la forme $X_t = f\circ\theta_t$ pour une fonction $\underline{\underline{F}}$-mesurable f; nous dirons qu'un processus (Z_t) est <u>additif</u> (dans [2] , on disait "<u>hélice</u>", ce qui n'est pas très évocateur) s'il est continu à droite et limité à gauche, nul en 0, et s'il satisfait identiquement à $Z_{t+s}-Z_t = Z_s\circ\theta_t$.

THEOREME 2: *(i) soit* X *un processus borné tel que* $\lim \frac{1}{t-s} \mathbb{E} \int_s^t X_u dZ_u$ *existe lorsque* s *et* t *convergent respectivement vers* $\pm\infty$ *pour tout processus additif croissant* Z *tel que* $\mathbb{E}(Z_1)<\infty$ *; il existe alors un processus stationnaire borné* ${}^sX$ *, unique à un ensemble évanescent près, tel que*

$$\lim \frac{1}{t-s} \mathbb{E} \int_s^t X_u dZ_u = \lim \frac{1}{t-s} \mathbb{E} \int_s^t {}^sX_u dZ_u = \mathbb{E} \int_0^1 {}^sX_u dZ_u$$

pour tout processus additif croissant Z *tel que* $\mathbb{E}(Z_1)<\infty$. *Nous dirons que* X *est* *__presque stationnaire__, et que* ${}^sX$ *est sa* *__projection stationnaire__.*

(ii) soit A *un processus croissant tel que* $\mathbb{E}(A_t-A_s)<\infty$ *pour tous* s *et* t *finis, et tel que* $\lim \frac{1}{t-s} \mathbb{E} \int_s^t X_u dA_u$ *existe lorsque* s *et* t *convergent respectivement vers* $\pm\infty$ *pour tout processus* X *, stationnaire et borné; il existe alors un processus croissant additif* A^s*, tel que* $\mathbb{E}(A_1^s)<\infty$ *, et tel que*

$$\lim \frac{1}{t-s} \mathbb{E} \int_s^t X_u dA_u = \lim \frac{1}{t-s} \mathbb{E} \int_s^t X_u dA_u^s = \mathbb{E} \int_0^1 X_u dA_u^s$$

pour tout processus stationnaire et borné X. *Nous dirons que* A *est* *__presque additif__ et que* A^s *est sa* *__projection duale additive__.*

(iii) si X *est presque stationnaire et optionnel (resp. prévisible), sa projection stationnaire est également optionnelle (resp. prévisible); on a le même résultat concernant les processus croissants presque additifs, et leurs projections duales additives.*

En quoi s'agit-il bien de coprojections? Examinons la notion de "projection" en théorie générale des processus d'un point de vue heuristique: la projection prévisible d'un processus se définit comme le processus prévisible qui, regardé "en moyenne" à l'aide de tous les processus croissants prévisibles, a le même comportement que le processus initial, ce qui se traduit par la formule $\mathbb{E}\int_0^\infty X_s dA_s = \mathbb{E}\int_0^\infty {}^3X_s dA_s$ pour tout processus croissant prévisible A. Si nous voulons définir la notion duale en théorie des flots, "prévisible" doit être remplacé par "stationnaire" et "additif", tandis que "regardé en moyenne" se traduit exactement par les formules du théorème 2. Malheureusement, contrairement à ce qui se passe pour les processus de markov transients, les coprojections ne peuvent être définies pour tous les processus.

REMARQUES 1/ l'ensemble des processus presque stationnaires est un espace vectoriel qui contient les processus stationnaires (pour lesquels les intégrales définies au théorème 2 sont toutes égales, quels que soient s et t), mais aussi les processus constants dans le temps, c'est-à-dire de la forme $X_u(\omega) = f(\omega)$, où $f \in \underline{\underline{F}}$, puisque l'on aalors $\frac{1}{t-s} \int_s^t X_u \circ \theta_{-u} du = \frac{1}{t-s} \int_s^t f \circ \theta_{-u} du$, qui converge en dehors d'un ensemble invariant $\mathbb{P}$-négligeable en vertu du théorème ergodique; nous verrons au cours de la démonstration du théorème, que cette propriété suffit à assurer la presque stationnarité.

2/ Si Y est presque stationnaire, il en est de même pour le processus $\bar{\theta}_t Y$ défini par $\bar{\theta}_t Y(\omega,u) = Y(\theta_t\omega,u-t)$, et l'on a ${}^sY = {}^s(\bar{\theta}_t Y)$.

3/ Si Y est presque stationnaire, il en est de même pour le translaté $\tau_t Y$ défini par $\tau_t Y(\omega,u) = Y(\omega,t+u)$, et pour $\theta_t Y$ défini par $\theta_t Y(\omega,u) = Y(\theta_t\omega,u)$, et l'on a ${}^s(\tau_t Y) = {}^s(\theta_t Y) = \tau_t({}^sY)$.

4/ en généralisant la remarque 1, nous pouvons dire que, si toutes les trajectoires $t \to Y(\theta_{-t}\omega,t)$ sont des fonctions presque périodiques en dehors d'un ensemble invariant $\mathbb{P}$-négligeable, alors, Y est presque stationnaire.

DEMONSTRATION: (i) rappelons que, si Z est un processus additif croissant, on a la formule suivante, où X est un processus positif arbitraire:

(1) $$\mathbb{E}\int_{\mathbb{R}} X_u\circ\theta_u \, dZ_u = \mu\otimes dt(X), \qquad \text{(dt, mesure de Lebesgue)}$$

où μ est une mesure positive σ-finie sur la tribu $\underline{\underline{F}}$; cette mesure est bornée si et seulement si $\mathbb{E}(Z_1)<\infty$. Par conséquent, si nous posons $f_{s,t}(\omega) = \frac{1}{t-s}\int_s^t X(\theta_{-u}\omega,u)du$, il vient $\frac{1}{t-s}\,\mathbb{E}\int_s^t X_u dZ_u = \mu(f_{s,t})$, μ désignant la mesure bornée associée à Z par la formule (1), dite <u>mesure de Palm</u> de Z. La condition (i) du théorème 2 exprime donc que la suite de fonctions $\underline{\underline{F}}$-mesurables $f_{s,t}$ converge faiblement dans $L^1(\mu)$ pour toute mesure de Palm bornée μ. Il nous reste donc à savoir si l'ensemble des mesures de Palm sur $\underline{\underline{F}}$, qui sont associées à un processus additif croissant, peut se ramener à un ensemble de mesures définies à l'aide de temps d'arrêt, comme au théorème 1; c'est ce que nous allons faire rapidement à l'intérieur d'un paragraphe situé entre crochets, et dont la lecture peut être omise.

[[Les notations sont celles de [2]. Le flot étant propre, le théorème d'Ambrose nous donne l'existence d'un sous-ensemble Ξ de Ω (noté X dans [2]), appartenant à $\underline{\underline{F}}$, et effectuant une <u>section</u> de Ω au sens suivant: si $N_t(\omega) = \Sigma_0^t\, 1_\Xi\circ\theta_u(\omega)$ [1] pour t>0, avec une définition symétrique pour t<0, alors, $N_t(\omega)$ est fini pour tout t fini et tout ω, $N_{\pm\infty}(\omega) = \pm\infty$, et N est un processus additif croissant de mesure de Palm bornée ν. Posons $F(x) = \inf\{t>0 \mid \theta_t x\in\Xi\}$, où x désigne un point arbitraire de Ξ; F est une variable aléatoire $\underline{\underline{F}}$-mesurable, et il est montré dans [2] la formule suivante

(2) $$\mu(f) = \int_\Xi \nu(dx) \int_0^{F(x)} f(\theta_s x)\, dZ_s(x) ,$$

[1]: Σ_s^t signifie que la somme est prise sur $s<u\leq t$.

où Z est un processus additif croissant de mesure de Palm μ, et f une fonction $\underline{\underline{F}}$-mesurable et positive sur Ω; cette formule est un cas particulier d'une autre formule obtenue récemment par NEVEU[4]. La formule (2), jointe à la définition des fonctions $f_{s,t}$, montre que la condition (i) du théorème 2 peut s'exprimer ainsi

(3) $\int_{\Xi} \nu(dx) \int_0^\infty 1_{]0,F]}(x,u)\; f_{s,t}(\theta_u x)\; dZ_u(x)$ converge lorsque s et t tendent vers $\pm\infty$, pour tout processus croissant intégrable défini sur l'espace $(\Xi,\underline{\underline{\Xi}},\nu)$, où $\underline{\underline{\Xi}}$ est la restriction à Ξ de $\underline{\underline{F}}$.

C'est exactement la situation du théorème 1, dans la mesure où la formule bien connue $\int_\Xi \nu(dx) \int_0^\infty g(x,u)\; dZ_u(x) = \int_0^\infty du \int_\Xi g(c_u(x),x)\; \nu(dx)$, où $c_u = \inf(s|Z_s>u)$ permet de ramener le calcul sur les processus croissants au calcul sur les variables aléatoires. Notons $f(x,u)$ la limite faible au sens du théorème 1, des fonctions $f_{s,t}(\theta_u x).1_{]0,F]}(x,u)$ lorsque s et t tendent vers $\pm\infty$; c'est une fonction $\underline{\underline{\Xi}}\times\underline{\underline{\mathbb{R}}}_+$-mesurable sur $\Xi\times\mathbb{R}_+$, portée par l'intervalle stochastique $]0,F]$; mais il est alors connu que l'application $(x,u) \to \theta_u x$ définit un isomorphisme des espaces mesurables $\{]0,F],\; \underline{\underline{\Xi}}\times\underline{\underline{\mathbb{R}}}_+|_{]0,F]}\}$ et $\{\Omega,\underline{\underline{F}}\}$.]]

Finalement, la fonction f ainsi transportée sur Ω satisfait à $\mu(f_{s,t}) \to \mu(f)$ lorsque s et t tendent vers $\pm\infty$ pour toute mesure de Palm bornée μ, et la formule (1) montre alors clairement que le processus stationnaire cherché en (i) est ${}^sX_t = f\circ\theta_t$. Pour obtenir l'unicité à une évanescence près du processus ${}^sX$, il nous suffit d'invoquer le théorème de section des ensembles aléatoires stationnaires montré dans [2], qui affirme que tout sous-ensemble $\underline{\underline{F}}$-mesurable non polaire de Ω (un ensemble A de $\underline{\underline{F}}$ est dit <u>polaire</u> si le processus $1_A\circ\theta_t$ est évanescent) est chargé par une mesure de Palm bornée.

(ii) C'est une conséquence immédiate du théorème de Vitali-Hahn-Saks, qui se présente donc ici comme étant le résultat "dual" du théorème de Mokobodzki. Le processus croissant A étant fixé, on définit la famille $\mu_{s,t}$ de mesures positives bornées sur $\underline{\underline{F}}$ par la formule

(4) $\mu_{s,t}(f) = \frac{1}{t-s}\,\mathbb{E} \int_s^t f\circ\theta_u\; dA_u$, où f est $\underline{\underline{F}}$-mesurable et positive.

La condition (ii) permet d'affirmer que la suite $\mu_{s,t}$ converge au sens du théorème de Vitali-Hahn-Saks vers une mesure positive bornée que nous notons μ. Il est clair que μ ne charge pas les ensembles polaires, et la caractérisation des mesures de Palm bornées donnée au théorème (3.8) de [2] nous dit alors que μ est la mesure de Palm d'un processus croissant additif A^s unique, qui est le processus cherché.

(iii) Nous regardons uniquement le cas des processus stationnaires prévisibles, les autres se traitant exactement de la même manière. Si X est un processus presque stationnaire prévisible, on a $\mathbb{E} \int_s^t X_u dZ_u = \mathbb{E} \int_s^t X_u dZ_u^3$, où Z est un processus additif croissant de mesure de Palm bornée, Z^3 désignant le processus additif croissant qui est une version de la projection duale prévisible du processus croissant Z; en passant à la limite, on aura donc $\mathbb{E} \int_0^1 {}^sX_u dZ_u$ = $\mathbb{E} \int_0^1 {}^sX_u dZ_u^3$ pour tout processus croissant additif Z de mesure de Palm bornée, ce qui suffit, d'après [2, prop 3.7] , pour assurer que le processus stationnaire ${}^sX$ est prévisible.

Nous donnons maintenant le résultat qui exprime que les projections stationnaire et prévisible, ou stationnaire et optionnelle, commutent; dans le travail d'Azema sur les processus de Markov, ce résultat est la clef du théorème sur le retournement du temps.

THEOREME 3: *Soit X un processus presque stationnaire; alors,* ${}^3X$ *est également presque stationnaire, et l'on a* ${}^s({}^3X) = {}^3({}^sX)$. *Le même résultat est valable si l'on remplace la projection prévisible par la projection optionnelle, et il est aussi valable pour les processus croissants presque stationnaires et leurs projections duales.*

DEMONSTRATION: le fait que ${}^3X$ soit presque stationnaire provient de l'égalité $\mathbb{E} \int_s^t {}^3X_u dZ_u = \mathbb{E} \int_s^t X_u dZ_u^3$ pour tout processus additif croissant Z de mesure de Palm bornée. Comme la projection prévisible d'un processus stationnaire est encore stationnaire, nous savons que le processus ${}^3({}^sX)$ est stationnaire; par conséquent, pour avoir l'égalité ${}^s({}^3X) = {}^3({}^sX)$, il nous suffit de montrer

$$(5) \qquad \lim \frac{1}{t-s} \mathbb{E} \int_s^t {}^3X_u \, dZ_u = \lim \frac{1}{t-s} \mathbb{E} \int_s^t {}^3({}^sX)_u \, dZ_u = \mathbb{E} \int_0^1 {}^3({}^sX)_u \, dZ_u$$

pour tout processus additif croissant Z de mesure de Palm bornée; or, on a les égalités suivantes:

$$\lim \frac{1}{t-s} \mathbb{E} \int_s^t {}^3X_u dZ_u = \lim \frac{1}{t-s} \mathbb{E} \int_s^t X_u dZ_u^3 = \lim \frac{1}{t-s} \mathbb{E} \int_s^t {}^sX_u dZ_u^3 = \lim \frac{1}{t-s} \mathbb{E} \int_s^t {}^3({}^sX)_u dZ_u$$

pour tout processus additif croissant de mesure de Palm bornée, ce qui montre le théorème.

Il y a une différence de nature entre les notions de projection prévisible en théorie générale des processus et de projection stationnaire en théorie des flots: la notion de projection prévisible est en fait une notion locale, comme le montre les théorèmes de Mertens (la projection prévisible d'un processus continu à gauche est un processus continu à gauche), tandis que la notion de projection stationnaire est une notion globale qui ne préserve pas les propriétés de continuité des processus (elle préserve néanmoins les propriétés de continuité <u>uniforme</u> en t et en ω).

REFERENCES.

[1] J. AZEMA: Théorie générale des processus et retournement du temps; Ann. Sc. Ecole Normale Sup., série 4, T.6, fasc4, pp. 459-519, 1973.

[2] A. BENVENISTE: Processus stationnaires et mesures de Palm du flot spécial sous une fonction; Sém. Proba. IX; Lect. Notes in M., 1974.

[3] P.A. MEYER: Limites médiales, d'après Mokobodzki; Sém. Proba. VII; Lect. Notes in M., vol 321, 1971.

[4] J. NEVEU: Sur les mesures de Palm de deux processus ponctuels stationnaires; Z. für W., Band 34, Heft 3, 1976, pp.199-204.

A;Benveniste
IRIA (LABORIA)
Domaine de Voluceau, Rocquencourt
78150 LE CHESNAY