Vazgain Avanissian

Fonctions harmoniques d'ordre infini et l'harmonicité réelle liée à l'opérateur laplacien itéré

Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 11 (1977), p. 1-20
<http://www.numdam.org/item?id=SPS_1977__11__1_0>

Université de Strasbourg
Séminaire de Probabilités

Mai 1976

DISTRIBUTIONS HARMONIQUES D'ORDRE INFINI ET L'ANALYTICITE (REELLE) LIEE A L'OPERATEUR LAPLACIEN ITERE

par

Vazgain AVANISSIAN.

A la suite des travaux de S. Bernstein de nombreux mathématiciens ont étudié l'analyticité des fonctions d'une variable réelle en faisant des hypothèses sur le signe des dérivées successives [Bernstein (S.) ; Boas (R.P.)-Polya (G.) ; Widder (D.V.)] Dans le cas de plusieurs variables, on obtient quelques énoncés analogues en faisant des hypothèses sur le signe de laplacien itéré ; par exemple (Th. 1.2.4), soit $f \in C^\infty(\Omega)$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^N$. Si $\Delta^m f(x) \geq 0$, $m = 0,1,2,\ldots$, $x \in \Omega$, f est analytique dans Ω (extension à $\mathbb{R}^N$ d'un résultat bien connu sur la droite). L'un des premiers travaux dans le cas de plusieurs variables est dû à P. Lelong qui étend un énoncé de Widder (D.V.) à $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$: si $(-1)^m \Delta^m f(x) \geq 0$, $m = 0,1,2,\ldots$, $x \in \Omega$, f est analytique dans Ω . Faisons deux remarques : tout d'abord la démonstration de P. Lelong donnée pour $N \geq 2$, peut être adaptée au cas $N = 1$ à condition d'utiliser la représentation (de Green) :

$$f(x) = Ax + B - \frac{1}{2}\int_a^b f''(t)\ G(x,t)dt$$

où G est la fonction de Green de l'intervalle $]a,b[$ (cf. 3.1) ; ensuite la méthode utilisée permet d'établir un résultat d'Ovčarenko (cf. th. 3.1.4). D'une manière générale ce travail utilise les propriétés des distributions harmoniques d'ordre infini [3] ; cela permet d'unifier différents procédés employés jusqu'à présent et de simplifier certaines démonstrations.

Institut de Recherche Mathématique Avancée, Laboratoire Associé au C.N.R.S., 7, rue René Descartes, 67084 STRASBOURG Cédex

ANALYTICITÉ LIÉE À L'OPÉRATEUR LAPLACIEN ITÉRÉ

1.1. GÉNÉRALITÉS.

1.1.1. L'espace $\mathbb{R}^N$ de N variables réels $x = (x_1,\ldots,x_N)$ est considéré comme un sous-espace fermé de l'espace $\mathbb{C}^N$ de N variables complexes

$$z = (z_1,\ldots,z_N)\ (z_j = x_j + iy_1\ ,\ 1 \leq j \leq N)\ ; \mathbb{R}^N = \{z \in \mathbb{C}^N \mid y_j = 0\ ,\ 1 \leq j \leq N\}\ .$$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, on note $C^\infty(\Omega)$ l'ensemble des fonctions $\Omega \to \mathbb{C}$, indéfiniment dérivables ; $\mathcal{A}(\Omega)$ désigne le sous-ensemble de $C^\infty(\Omega)$ constitué par les fonctions analytiques réelles.

a) La fonction $f \in C^\infty(\Omega)$ appartient à $\mathcal{A}(\Omega)$ si, et seulement si, pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe une constante finie $M_1(K)$ telle que pour tout $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_N) \in \mathbb{N}^N$

(1) $$\sup_{x \in K} |D^\alpha f(x)| \leq M_1^{|\alpha|+1}(K)\alpha!$$

$$D^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_N}\right)^{\alpha_N},\ |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_N\ ,\ \alpha! = \alpha_1!\ldots\alpha_N!\ .$$

La condition (1) équivaut à la condition suivante [1], [2] : pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe une constante $M(K) \geq 0$ telle que

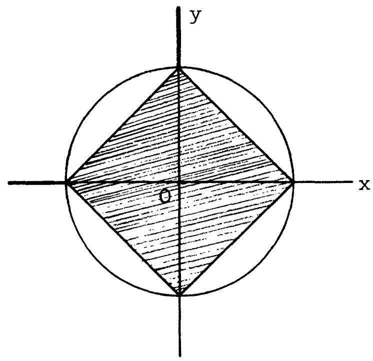
(2) $$\sup_{x \in K}\left[\frac{|\Delta^m f(x)|}{(2m)!}\right]^{\frac{1}{m}} \leq M(K)\ ,\ m = 1,2,\ldots$$

où

$$\Delta^0 = I\ ,\ \Delta^m = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_N^2}\right)^m$$

est l'opérateur laplacien itéré m fois : $\Delta^m = \Delta(\Delta^{m-1})$.

b) Contrairement au cas analytique complexe, la série de Taylor au point $x \in \Omega$ d'une fonction $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ ne converge pas en général dans toute boule ouverte de centre x et d'adhérence compacte dans Ω, la convergence a lieu seulement dans un certain voisinage de x. Par exemple [5], si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = A(x,y) + iB(x,y)$ a son rayon de convergence $0 < R < \infty$, la fonction harmonique $A(x,y) = \operatorname{Re} f(z)$ est analytique réelle dans le disque de centre 0 et de rayon R de $\mathbb{R}^2$ mais sa série de Mac-Laurin à l'origine converge absolument dans le rectangle $\{(x,y) \mid |x| + |y| < R\}$ et uniformément sur tout compact de celui-ci mais elle diverge en tout point $x \neq 0$, $y \neq 0$ extérieur à ce rectangle.



De même, on sait qu'une fonction harmonique $U(x_1, \ldots, x_N)$ dans la boule ouverte de centre 0 et de rayon R de $\mathbb{R}^N$, est développable en série de polynômes harmoniques homogènes uniformément et absolument convergente dans la boule $\|x\| \leq R_0 < R$,

Par contre, la série de Mac-Laurin de U à l'origine, converge absolument et uniformément dans la boule $\|x\| \leq R_0 < \frac{R}{\sqrt{2}}$, mais elle peut diverger en un point x_0, $\|x_0\| = \frac{R}{\sqrt{2}}$.

1.2. CLASSE $\mathcal{H}_\infty(\Omega)$.

Le théorème suivant a été démontré dans [3].

1.2.1. THEOREME. Soit f une distribution dans l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Les énoncés suivants sont équivalents :

a) f est une fonction de la classe $C^\infty(\Omega)$ et sur tout compact $k \subset \Omega$, on a :

$$\lim_{m \to \infty} \left(\sup_{x \in K} \left[\frac{|\Delta^m f(x)|}{(2m)!} \right] \right)^{\frac{1}{m}} = 0 \tag{3}$$

pour tout compact K et tout $\varepsilon > 0$, il existe alors une constante $M(K,\varepsilon)$ telle que

(3')
$$\sup_K |\Delta f^m(x)| \leq M(K,\varepsilon)\ \varepsilon^{2m}(2m)!\ .$$

b) f est une fonction de la classe $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ et pour tout compact $K \subset \Omega$, on a :

(4)
$$\lim_{m\to\infty} \left[\frac{\int_K |\Delta^m f(x)|dx}{(2m)!}\right]^{\frac{1}{m}} = 0\ .$$

c) Quelle que soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, la distribution f vérifie :

(5)
$$\lim_{m\to\infty} \sup \left[\frac{< \Delta^m f, \varphi >}{(2m)!}\right]^{\frac{1}{m}} = 0$$

une fonction vérifiant l'un des énoncés a , b , c est appelée[1] (selon la terminologie de Aronszajn) "fonction harmonique d'ordre infini" leur ensemble est noté $\mathcal{H}_\infty(\Omega) \subset \mathcal{C}(\Omega)$.

Remarquons que l'énoncé c) peut être remplacé sans difficulté par :

c') Pour tout compact $K \subset \Omega$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $M(K,\varepsilon)$ telle que :

(6)
$$\forall\ \varphi \in \mathcal{D}(K)\ ,\ |< \Delta^m T, \varphi >| \leq M(K,\varepsilon)\ \varepsilon^{2m}(2m)!\ .$$

1.3. EXEMPLES ET APPLICATIONS.

1.3.1. La classe $\mathcal{H}_\infty(\Omega)$ contient les fonctions harmoniques, polyharmoniques de tout ordre m (i.e. $\Delta^m f = 0$). Si $f \in \mathcal{H}_\infty(\Omega)$, f est analytique réelle mais la réciproque est inexacte. La fonction

---

(1) L'énoncé a) est la définition d'Aronszajn [1] ; l'équivalence (a) $\Leftrightarrow$ (b) a été démontrée d'abord par P.Lelong ; mais cela peut être obtenu immédiatement de l'équivalence (a) $\Leftrightarrow$ (c) [3].

$$f(x) = \frac{1}{1-(x_1+\dots+x_N)}$$

est analytique sans $\Omega = \mathbb{R}^N \setminus \{x \mid x_1+\dots+x_N = 1\}$ mais elle n'est pas de la classe $\mathcal{H}_\infty(\Omega)$. En effet,

$$\frac{\Delta^m f(x)}{(2m)!} = \frac{N^m}{[1-(x_1+\dots+x_N)]^{2m+1}}$$

et la condition a) n'est pas vérifiée.

1.3.2. Soit f une fonction analytique réelle dans tout $\mathbb{R}^N$ trace sur $\mathbb{R}^N$ d'une fonction analytique complexe F dans tout $\mathbb{C}^N$; alors $f \in \mathcal{H}_\infty(\mathbb{R}^N)$. En effet, si $a = (a_1,\dots,a_N) \in \mathbb{R}^N$ et $M(a,r) = \underset{\substack{|z_j - a_j| \le r \\ 1 \le j \le N}}{\operatorname{Max}} |F(z_1,\dots,z_n)|$ l'inégalité de Cauchy donne :

$$|\Delta^m f(a)| = |\Delta^m F(a)| \le (2m)!\; N^m (2\pi)^{-N}\, r^{-2m}\, M(a,r)$$

si a décrit un compact $K \subset \mathbb{R}^N$, $\sup_{a \in K} M(a,r) = M(K,r) < \infty$. Donc,

$$\lim_{m\to\infty} \Big[\sup_{a\in K} \Big|\frac{\Delta^m f(a)}{(2m)!}\Big|\Big]^{\frac{1}{m}} \le \frac{1}{r^2}. \tag{7}$$

r peut être choisi arbitrairement grand d'où la condition a).

1.3.3. Remarque : Une fonction analytique réelle dans tout $\mathbb{R}^N$ n'appartient pas en général à $\mathcal{H}_\infty(\mathbb{R}^N)$, par exemple,

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$$

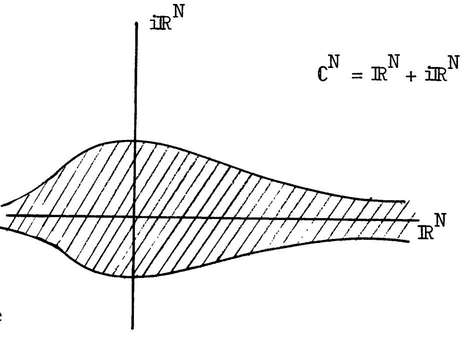
$$\frac{\Delta^m f(x)}{(2m)!} = \frac{f^{(2m)}(x)}{(2m)!} = \frac{i}{2}\,\frac{(x-i)^{2m+1} - (x+i)^{2m+1}}{(x^2+1)^{2m+1}}$$

$$= \frac{\sum_{k=0}^{m} \binom{2m+1}{2k+1} (-1)^k\, x^{2(n-k)}}{(x^2+1)^{2m+1}}$$

$\left|\dfrac{f^{(2m)}(0)}{(2m)!}\right| = 1$ et la condition a) n'est pas vérifiée.

Cela est dû au fait que la série de Mac-Laurin de $f(x)$ en 0 ne converge pas pour tout x , donc sans l'inégalité (7) , r ne peut être choisi arbitrairement grand, ou encore le complexifié de $f : z \mapsto \frac{1}{1+z^2}$ n'est pas analytique complexe dans tout le plan (i.e. $f(x)$ n'est pas la trace sur $\mathbb{R}$ d'une fonction entière dans $\mathbb{C}$).

Signalons que pout tout $V(\mathbb{R}^N)$ voisinage ouvert de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{C}^N$, on peut trouver une fonction analytique $f(x)$ dans tout $\mathbb{R}^N$ qui soit la trace sur $\mathbb{R}^N$ d'une fonction analytique $F(z)$ dans un voisinage ouvert $V'(\mathbb{R}^N) \subset V(\mathbb{R}^N)$ de $\mathbb{R}^N$ et non prolongeable comme fonction analytique en dehors de V' . Cela résulte d'un énoncé de H. Cartan en vertu duquel il existe un système fondamental de voisinages ouverts de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{C}^N$ dont chacun est un domaine d'holomorphie ([4], prop. 1).



1.3.4. L'énoncé c) montre immédiatement que $\mathcal{H}_\infty(\Omega)$ est un espace vectoriel stable par dérivation :

$$\forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\ ,\ < \Delta^m(D^\alpha f),\varphi > \ = \ < \Delta^m f, D^\alpha \varphi > .$$

Si $f \in \mathcal{H}_\infty(\Omega)$, $D^\alpha f$ vérifie l'énoncé c).

Par contre, $\mathcal{H}_\infty(\Omega)$ n'est pas stable par produit en général, de même, si $f \in \mathcal{H}_\infty(\Omega)$, $f \neq 0$, en général $\frac{1}{f} \notin \mathcal{H}_\infty(\Omega)$.

Remarquons que le théorème de Paley-Wiener montre que la transformée de Fourier d'une fonction $\varphi \in \mathcal{D}$ est dans $\mathcal{H}_\infty(\mathbb{R}^N)$.

Signalons d'autre part une particularité remarquable dans le cas $N = 1$. La série de Mac-Laurin d'une fonction $f \in \mathcal{H}_\infty(]a,b[)$ en un point de l'intervalle $]a,b[$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$; autrement dit, la classe $\mathcal{H}_\infty(]a,b[)$ coïncide avec la classe des fonctions entières(1). En effet, soit f de la classe $\mathcal{H}_\infty$

---

(1) Dans l'introduction de [3], page 2, ligne 1, il faut lire : ... fonctions analytiques réelles dans tout $\mathbb{R}^N$ prolongeable comme fonctions analytiques complexes dans tout $\mathbb{C}^N$.

dans un voisinage V de 0, la série de Mac-Laurin de f :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(0)}{m!} x^m$$

a un rayon de convergence infini ; car pour tout $\varepsilon > 0$ et tout compact $K \subset V$, il existe une constante $M(K,\varepsilon)$ telle que :

$$\sup_{x \in K} \left| \frac{f^{(2m)}(x)}{(2m)!} \right| \le M(K,\varepsilon)\varepsilon^{2m} .$$

Or, $f' = \frac{df'}{dx}$ est aussi dans la classe $\mathcal{H}_\infty(V)$, donc

$$\sup_{x \in K} \left| \frac{d^{2m} f'(x)}{dx^{2m}(2m)!} \right| = \sup_{x \in K} \left| \frac{f^{(2m+1)}(x)}{(2m+1)!} \, \frac{2m+1}{2m} \right| \le M_1(K,\varepsilon)\varepsilon^{2m} .$$

Il en résulte que

$$\left| \frac{f^{(m)}(0)}{m!} \right| \le M_2(K,\varepsilon)\varepsilon^{2E[\frac{m}{2}]} \qquad (E[x] = \text{partie entière de } x)$$

et $\limsup_{m \to \infty} \frac{1}{m} \operatorname{Log} \left| \frac{f^{(m)}(0)}{m!} \right| = \operatorname{Log} \frac{1}{R} = -\infty$.

1.3.5. PROPOSITION. <u>Soit</u> $(f_n)_{n \ge 1}$ <u>une suite d'éléments de</u> $\mathcal{H}_\infty(\Omega)$ <u>si</u> f_n <u>converge vers</u> f <u>dans l'espace des distributions</u> $\mathcal{D}(\Omega)$ <u>et si</u> $\Delta^m f_n \xrightarrow{\mathcal{D}'(\Omega)} \Delta^m f$ <u>uniformément en</u> m, <u>alors</u> $f \in \mathcal{H}_\infty(\Omega)$.

La convergence uniforme signifie ici que pour tout $\varepsilon > 0$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, il existe $n_o(\varepsilon,\varphi)$ tel que :

$$|< \Delta^m f_n - \Delta^m f, \varphi >| < \varepsilon \qquad (n > n_o(\varepsilon,\varphi)) .$$

La proposition résulte immédiatement de la propriété c) du théorème 1.2.1.

2.1. <u>L'ÉCART ENTRE</u> $f \in \mathcal{H}_\infty(\Omega)$ <u>ET SA MOYENNE PÉRIPHÉRIQUE ITÉRÉE</u>.

Il est bien connu que si $f \in \mathcal{C}^{2p}(\Omega)$, pour toute boule $B(x_o,R)$ d'adhérence $\overline{B(x_o,R)}$ compacte dans Ω, on a le développement (cf. [7]) :

$$\lambda_s[f,x_o,R] = f(x_o) + \sum_{m=1}^{p-1} a_m\left(\frac{N}{N+2m}\right)^s R^{2m}\,\Delta^m f(x_o) \tag{8}$$

$$+ a_p\left(\frac{N}{N+2p}\right)^s R^{2p}\,\Delta^p f(\xi)$$

où

$$\lambda[f,x_o,R] = \lambda_o[f,x_o,R] = \frac{1}{\omega_N(1)} \int_{\|a\|=1} f(x_o + R\vec{a})d\sigma(a)$$

et la moyenne périphérique de f sur la sphère $\{x \mid \|x - x_o\| = 1\} = S(0,1)$, $\omega_N(1)$ est la mesure de $S(0,1)$ et $(\lambda_s)_{s\in\mathbb{N}^*}$ la suite :

$$\lambda_s(f,x_o,R) = \frac{N}{R^N}\int_0^R t^{N-1}\,\lambda_{s-1}(f,x_o,t)dt \qquad (s \geq 1)$$

(λ_1 est la moyenne spatiale de f sur $B(x_o,R)$).

ξ étant un certain point de la boule $B(x_o,R)$

$$a_m = \frac{\Gamma(\frac{N}{2})}{2^{2m}m!\;\Gamma(m+\frac{N}{2})} = \frac{1}{2^m m!\;N(N+2)\ldots(N+2m-2)} \tag{9}$$

si $N = 1$, $s = 0$,

$$\lambda_o[f,x_o,R] = \frac{f(x_o+R)+f(x_o-R)}{2}\;,\quad a_m = \frac{1}{(2m)!}\;.$$

2.1.1. PROPOSITION. a) Si $f\in\mathcal{H}_\infty(\Omega)$, pour toute boule ouverte $B(x_o,R)$ d'adhérence compacte dans Ω , on a :

$$\lambda_s[f,x_o,R] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{N}{2})}{4^m m!\;\Gamma(m+\frac{N}{2})}\left(\frac{N}{N+2m}\right)^s \Delta^m f(x_o)\,R^{2m} \tag{10}$$

la convergence est uniforme en $(x_o,R)\in K\times[0,R_o]$, où $R_o <$ distance du compact K à $\complement\,\Omega = \delta(K)$.

b) Si f est seulement analytique, (10) est valable pour R assez petit.

En effet, pour tout couple (K,ε) , il existe une constante $M(K,\varepsilon)$ telle que

$$|\Delta^m f(x)| \leq M(K,\varepsilon)\ \varepsilon^{2m}(2m)!$$

si $K=\overline{B(x_o,R)}$, $\sup\limits_{x\in K}|a_m||\Delta^m f(x)|R^{2m} \leq \dfrac{\Gamma(\frac{N}{2})(2m)!\ M(K,\varepsilon)}{2^{2m}m!\ \Gamma(m+\frac{N}{2})}(\varepsilon R)^{2m}$. Or $m!\sim\sqrt{2\pi}\,m^{m+\frac{1}{2}}\,e^{-m}\quad(m\to\infty)$

$$\Gamma(m+\tfrac{N}{2})\sim\Gamma(m)m^{\frac{N}{2}}\sim\sqrt{2\pi}(m-1)^{m-\frac{1}{2}}.m^{\frac{N}{2}}.e^{-(m-1)}\ .$$

Donc,

$$\frac{(2m)!}{2^{2m}m!\ \Gamma(m+\frac{N}{2})}\sim\frac{1}{\sqrt{\pi}\,m^{\frac{N-1}{2}}}\qquad(m\to\infty)\ .$$

Dans (8), le reste est majoré pour p suffisamment grand par

$$\Gamma(\tfrac{N}{2})\ M(K,\varepsilon)\Big(\frac{1}{2^s\sqrt{\pi}\,p^{\frac{N-1}{2}+s}}+\varepsilon'\Big)\ (\varepsilon^2R^2)^p\qquad(p>p_o(\varepsilon'))\ . \tag{11}$$

Quelle que soit $\overline{B(x,R)}\subset\Omega$, on peut choisir ε tel que $\varepsilon R_o<1$ alors l'expression (11) tend vers zéro si $p\to\infty$.

Pour une fonction analytique, on aura le même résultat mais pour R suffisamment petit.

La convergence uniforme pour $(x,R)\in K\times[0,R_o]$ résulte de la convergence de la série (11) avec $R=R_o$.

2.1.2. Application aux distributions α-métaharmoniques.

Soit $\alpha\in\mathbb{R}$, une distribution $T\in\mathcal{D}'(\Omega)$ est dite α-métaharmonique si elle vérifie

$$(\Delta+\alpha)T=0 \tag{12}$$

d'après (12), $<\Delta^m T,\varphi> = (-\alpha)^m<T,\varphi>$ pour tout $\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$. Donc, T vérifie l'énoncé c) de 1.2.1. Par conséquent, une distrubition α-métaharmonique est un élément de $\mathcal{H}_\infty(\Omega)$ d'où le développement :

$$(13) \qquad \lambda[T,x_o,R] = \Big(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{N}{2})(-1)^m \alpha^m R^{2m}}{4^m m!\ \Gamma(m+\frac{N}{2})}\Big)\ T(x_o)$$

$$= \dot{J}_\alpha(R)\ T(x_o)$$

$(\overline{B(x_o,R)} \subset \Omega)$.

On retrouve ainsi la relation bien connue entre une fonction α-métaharmonique et sa moyenne périphérique (voir par exemple [9]). Montrons que réciproquement une fonction u continue dans Ω , vérifiant pour toute boule $\overline{B(x_o,R)} \subset \Omega$ la relation (13) est α-métaharmonique dans Ω . En effet, si $\theta_r(x) \geq 0$ est une fonction de la classe C^∞ dans $\mathbb{R}^N$, ne dépendant que de $\|x\|$, à support $B(0,r)$ et de l'intégrale 1, on a :

$$(u * \theta_r)(x) = N\omega_N \int_0^r \lambda[u,x,t]\ \theta_r(t)t^{N-1}dt$$

$$= N\omega_N(1)\Big[\int_0^r J_\alpha(t)\ \theta_r(t)t^{N-1}dt\Big]u(x)$$

le premier membre est de la classe $C^\infty(\Omega)$ donc $u \in C^\infty(\Omega)$. D'autre part,

$$\frac{\lambda[U,x,r] - U(x)}{r^2} = \frac{J_\alpha(r) - 1}{r^2}\ u(x)$$

d'où

$$\Delta u(x) = \lim_{r\to 0} 2N\ \frac{\lambda[U,x,r] - u(x)}{r^2} = \lim_{r\to 0} \Big[2N\ \frac{\dot{J}_\alpha(r) - 1}{r^2}\Big]U(x)$$

$$= -\alpha\ U(x) .$$

Cette démonstration simplifie celle donnée dans [9].

2.1.3. Remarque : La fonction

$$\dot{J}_\alpha(R) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{N}{2})(-1)^m \alpha^m R^{2m}}{4^m m!\ \Gamma(m+\frac{N}{2})}$$

est liée à la fonction de Bessel $J_{\frac{N}{2}-1}$ par :

$$\dot{J}_\alpha(R) = \frac{2^{\frac{N}{2}-1}\,\Gamma(\frac{N}{2})}{R^{\frac{N}{2}-1}\,\lambda^{\frac{N}{4}-\frac{1}{2}}}\, J_{\frac{N}{2}-1}(\sqrt{\alpha}\, R) \;.$$

Rappelons que dans le cas $\alpha > 0$:

- $\dot{J}_\alpha(R)$ est décroissante pour R assez petit,
- la fonction $\sqrt{R^{N-1}}\;\dot{J}_\alpha(R)$ est équivalente à un polynôme trigonométrique si $R \to \infty$,
- une fonction métaharmonique ≥ 0 dans tout $\mathbb{R}^N$ est identiquement nulle,
- impossibilité d'un minimum local (resp. maximum local) en un point x_o où la fonction métaharmonique est > 0 (resp. < 0).

2.1.4. Extention à $N \geq 1$ variable d'un théorème de Bernstein.

Soient $f \in C^\infty(]-a,a[)$ à valeurs réelles et $f^{(2n)}(x) \geq 0$ sur $]a,b[$; alors f est analytique sur $]-a,a[$ et sa série de Mac-Laurin en 0 converge pour tout $|x| < a$. C'est le théorème de Bernstein. Pour $N \geq 1$, on a :

THEOREME. Si $f \in C^\infty(\Omega)$ à valeurs réelles (Ω ouvert connexe $\subset \mathbb{R}^N$) vérifie

$$\Delta^m f(x) \geq 0 \;,\; m = 0,1,2,\ldots \qquad (x \in \Omega)$$

alors f est analytique dans Ω .

En effet, considérons le développement (8) pour p arbitraire et $s = 0$. Tous les termes de ce développement sont ≥ 0 ; donc, pour tout m ,

$$(14) \qquad a_m\, \Delta^m f(x)\, R^{2m} \leq \lambda[f,x,R] \qquad (\overline{B(x,R)} \subset \Omega) \;.$$

Supposons que x décrit un compact $K \subset \Omega$ et que $R \leq R_o <$ distance de K à $\complement\Omega$ soit fixé ; la fonction $x \to \lambda[f,x,R]$ étant continue, on a :

$$\sup_{x\in K} \Delta^m f(x) \leq \sup_{x \in K} \lambda[f,x,R] \times \frac{1}{a_m R^m} = \frac{\theta(K,R)}{a_m R^m} \;.$$

Donc,

$$[\sup_K \frac{\Delta^m f(x)}{(2m)!}]^{\frac{1}{m}} \le \frac{\theta^{\frac{1}{m}}(K,R)}{R} \frac{1}{[(2m)!\ a_m]^{\frac{1}{m}}} .$$

Or,

$$(2m)!\ a_m \sim \Gamma(\tfrac{N}{2}) \times \frac{1}{\sqrt{\pi}\, m^{\frac{N-1}{2}}}$$

le premier membre de (14) est alors majoré par une constante $M(K,R)$ quel que soit m , d'où l'analyticité de f d'après (2).

3.1. FONCTIONS Δ-COMPLETEMENT CONVEXES.

3.1.1. En 1942, D.V. Widder a démontré que si $f \in C^\infty(]a,b[)$ vérifie $(-1)^n f^{(2n)}(x)$ $(-1)^n f^{(2n)}(x) \ge 0$, $n = 0,1,2$. Alors f est analytique ; ce résultat fut généralisé par P. Lelong a $N \ge 2$ variables [6] . La démonstration de D.V. Widder [10] est basée sur l'étude des polynômes de Lidstone :

$$\Lambda_o(x) = x$$

$$\Lambda_n(x) = \int_0^1 G_n(x,t)\ G_{n-1}(y,t)dy$$

où $G_1(x,t) = G(x,t) = \begin{cases} (x-1)t & 0 \le t < x \le 1 \\ (t-1)x & 0 \le x \le t \le 1 \end{cases}$.

Or, on peut remarquer que la fonction génératrice G n'est autre que la fonction de Green (à un coefficient près) de l'intervalle $]0,1[$, cela conduit à utiliser la formule de Green et ce procédé a l'avantage d'être généralisé à plusieurs variables.

3.1.2. Nous dirons qu'une fonction $f \in C^\infty(\Omega)$ (Ω ouvert connexe de $\mathbb{R}^N$ $(N \ge 1)$) est complètement Δ-convexe si f est à valeurs réelles et

$$(-1)^m \Delta^m f(x) \geq 0 \quad \text{si} \quad N \geq 2$$

$$(-1)^m f^{(2m)}(x) \geq 0 \quad \text{si} \quad N = 1 .$$

3.1.3. THEOREME [6]. Une fonction f complètement Δ-convexe dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est de la classe $\mathcal{H}_\infty(\Omega)$, (donc analytique). Si $N = 1$, $\Omega =]a,b[$, f est une fonction entière de $x \in \mathbb{R}$.

Démonstration : Si $N \geq 2$, soient Ω^* un domaine de Green d'adhérence compacte dans Ω (i.e. Ω^* a une fonction de Green $G(x,y)$; $\Omega^* =]a,b[$ si $N = 1$). On a la formule de Green :

$$f(x) = \frac{1}{C_N} \int_{\partial\Omega^*} f(y) \frac{\partial G}{\partial n_{int}}(x,y)d\sigma(y) - \frac{1}{C_N} \int_{\Omega^*} \Delta f(y)\, G(x,y)d\tau(y) \tag{15}$$

$$C_N = \begin{cases} (N-2)\omega_N , & N = 3 \\ 2\pi , & N = 2 \end{cases} .$$

Si $N = 1$,

$$f(x) = Ax + B - \tfrac{1}{2} \int_a^b f''(t)\, G(x,t)dt . \tag{16}$$

Rappelons que dans (15) l'intégrale

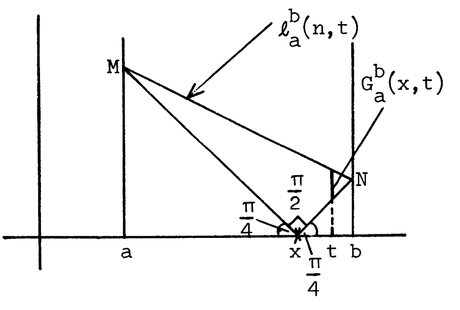
$$\frac{1}{C_N} \int_{\partial\Omega^*} f(y) \frac{\partial G(x,y)}{\partial n_{int}} d\sigma(y) = H_0(x)$$

est la fonction harmonique qui coïncide avec f sur $\partial\Omega^*$; dans (16), la fonction affine $Ax + B$ est égale à $f(a)$ pour $x = a$ et à $f(b)$ si $x = b$. La fonction de Green G de $]a,b[$ est représentée dans la figure ci-dessous :

$$G(x,t) = -|x-t| + \ell_a^b(x,t)$$

$\ell_a^b(x,t)$ = fonction affine par rapport à t telle que

$$\ell_a^b(x,a) = \ell_a^b(x,b) = 0 .$$



On a

$$G_a^b(x,t) = \begin{cases} \dfrac{2(b-x)(x-a)}{b-a}, & a \le t \le x \le b \\ \dfrac{2(b-t)(x-a)}{b-a}, & a \le x \le t \le b . \end{cases}$$

Donnons la démonstration du théorème 3.1.3. dans le cas $N \ge 2$. Le cas $N = 1$ se démontre d'une manière tout à fait analogue en utilisant la représentation (16) et la fonction de Green $G_a^b(x,t)$. Posons

$$G_n(x,y) = \int_{\Omega^*} G_{n-1}(x,t)\, G(t,y)\, d\tau(t) , \quad n \ge 2$$

$$G_2(x,y) = \int_{\Omega^*} G(x,t)\, G(t,y)\, d\tau(y)$$

(i.e. G_n est la n-ième puissance de second espace de G selon la terminologie de Voltera). Si K est un compact du Ω^* d'intérieur non vide, on a d'après les propriétés de la fonction de Green :

$$\inf_{x,y \in K} G(x,y) = \gamma(K) > 0 .$$

donc

(17) $$G_n(x,y) \ge \gamma^n [\text{Mes } K]^{n-1} \qquad (x,y \in K) .$$

Notons $H_0, H_1, \dots, H_n$, les fonctions harmoniques dans G^* qui coïncident respectivement avec $f, \Delta f, \dots, \Delta^n f, \dots$ sur $\partial\Omega^*$. Appliquons (15) à Δf ; cela donne :

$$f(x) = H_0(x) - c \int_{\Omega^*} H_1(y) G(x,y) d\tau(y) + (-1)^2 c^2 \int_{\Omega^*}\int_{\Omega^*} \Delta^2 f(t) G(y,t) G(x,y) d\tau(t) d\tau(y)$$

$$f(x) = H_0(x) - c \int_{\Omega^*} H_1(y) G(x,y) d\tau(y) + (-1)^2 c^2 \int_{\Omega^*} \Delta^2 f(t) G_2(x,t) d\tau(t) \qquad (c = C_N^{-1}) .$$

En itérant n fois, on obtient :

$$(18) \qquad f(x) = H_o(x) + \sum_{p=2}^{n-1} (-1)^{p-1} c^{p-1} \int_{\Omega^*} H_{p-1}(y)\, G_{p-1}(x,y)d\tau(y)$$

$$+ (-1)^n c^n \int_{\Omega^*} \Delta^n f(y)\, G_n(x,y)d\tau(y) \ , \ x \in \Omega^* \ .$$

L'hypothèse $(-1)^n \Delta^n f(x) \geq 0$ implique que tous les termes de (18) sont ≥ 0 .

Donc,

$$|(-1)^n c^n \int_{\Omega^*} \Delta^n f(y)\, G_n(x,y)d\tau(y)| \leq f(x) \quad , \ x \in \Omega^*$$

$$\int_{\Omega^*} |\Delta^n f(y)| G_n(x,y)d\tau(y) \leq C_N f(x) \ , \ x \in \Omega^* \ .$$

D'après (17), on déduit en particulier

$$\int_K |\Delta^n f(y)| d\tau(y) \leq C_N \operatorname*{Max}_K |f(x)| \ \gamma^{-n} [\text{Mes } K]^{-(n-1)} \ .$$

Finalement, sur tout compact $K \subset \Omega$:

$$\lim_{n \to \infty} \left[\frac{\int_K |\Delta^n f(y)| d\tau(y)}{(2n)!} \right]^{\frac{1}{n}} = 0 \ .$$

D'après le théorème 1.2.1, $f \in \mathcal{H}_\infty(\Omega)$.

La méthode utilisée permet d'obtenir un résultat d'Ovčarenko I.E. [8] :

3.1.4. THEOREME. Soit f à valeurs réelles de la classe $C^{2(E[\frac{N}{2}]+1)}(\mathbb{R}^N)$ ($E(x)$ = partie entière de x) où $N \geq 3$. Si

$$(-1)^p \Delta^p f(x) \geq 0 \ , \ p = 0,1,\ldots,E[\tfrac{N}{2}]+1 \ .$$

Alors f = cte . (Le résultat est inexact en général si $N \leq 2$ ou bien si $\Omega \neq \mathbb{R}^N$.) .

Démonstration : Reprenons la représentation (18) avec Ω^* = la boule de centre 0 et de rayon R . Si $x \in B(0,R)$:

$$(19) \qquad f(x) + H_o(x) + \sum_{p=2}^{E[\frac{N}{2}]} (-1)^{p-1} c^{p-1} \int_{B(0,R)} H_{p-1}(y)\, G_{p-1}(x,y)d\tau(y)$$

$$+ (-1)^{E[\frac{N}{2}]+1} c^{[\frac{N}{2}]+1} \int_{B(0,R)} \Delta^{E[\frac{N}{2}]+1} f(y)\, G_{E[\frac{N}{2}]+1} d\tau(y) \; .$$

1.3.11. LEMME. Si $G(x,y) = G^R(x,y)$ est la fonction de Green de la boule $B(0,R)$, on a :

$$\inf_{\substack{\|x\| \le \frac{R}{2} \\ \|y\| \le \frac{R}{2}}} G^R(x,y) \ge \frac{A}{R^{N-2}} \qquad (N \ge 3 \, , \, A = \text{cte}) \; .$$

En effet, $G^R(x,y)$ pour x fixé dans $B(0,\frac{R}{2})$ est surharmonique dans $B(0,R)$, donc, pour x fixé dans $B(0,\frac{R}{2})$,

$$\inf_{\|y\| \le \frac{R}{2}} G^R(x,y) = \inf_{\|y\| = \frac{R}{2}} G^R(x,y) \; .$$

Or,

$$G^R(x,y) = [\|x\|^2 - 2\|x\|\|y\| \cos\theta + \|y\|^2]^{1-\frac{N}{2}}$$

$$- [R^2 - 2\|x\|\|y\| \cos\theta + \frac{\|x\|^2\|y\|^2}{R^2}]^{1-\frac{N}{2}}$$

un calcul élémentaire montre l'existence d'une constante $A > 0$ telle que

$$\inf_{\|x\| \le \frac{R}{2}} [\inf_{\|y\| = \frac{R}{2}} G^R(x,y)] \ge \frac{A}{R^{N-2}} \; .$$

Dans les développements (19), tous les termes sont ≥ 0, quel que soit R donc

$$(20) \quad (-1)^{p-1} c^{p-1} \int_{B(0,R)} H_{p-1}(y)\, G_{p-1}(x,y)d\tau(y) \le f(x) \; , \; p = 2,\dots,E[\tfrac{N}{2}] \; , \; x \in B(0,R) \; .$$

Or, d'après (17) et le lemme 1.3.11 :

$$\inf_{x,y \in B(0,\frac{R}{2})} G_{p-1}(x,y) \ge \left(\frac{A}{R^{N-2}}\right)^{p-1} [\text{Mes } B(0,\tfrac{R}{2})]^{p-2} \ge B\, R^{2p-2-N} \; , \; B = \text{cte}.$$

En particulier,

$$\inf_{x,y \in B(0,\frac{R}{2})} G_{E[\frac{N}{2}]+1}(x,y) \geq B\, R^{2(E[\frac{N}{2}]+1)-N} .$$

D'après (20),

$$c\, R^{2p-2-N} \int_{B(0,\frac{R}{2})} (-1)^{p-1} H_{p-1}(y) d\tau(y) \leq f(x) \ , \ (|x| \leq \frac{R}{2}) .$$

Or, $(-1)^{p-1} H_{p-1}(y)$ est harmonique ≥ 0 et que l'intégrale ci-dessus est à un facteur près sa moyenne spatiale. Il résulte

$$A' R^{2p-2} (-1)^{p-1} H_{p-1}(0) \leq f(x) \ , \ (A' = \text{cte})$$

x fixé sans $B(0,\frac{R}{2})$. Cela est impossible si $H_{p-1}(0) \neq 0$. D'où $H_{p-1}(0) = 0$ donc $H_{p-1} \equiv 0$, $p = 2,\ldots E[\frac{N}{2}]$.

De même,

$$(21) \qquad B\, R^{2(E[\frac{N}{2}]+1)-N} \int_{B(0,\frac{R}{2})} (-1)^{E[\frac{N}{2}]+1} \Delta^{E[\frac{N}{2}]+1} f(y) d\tau(y) \leq f(x) \ , \ \|x\| < R .$$

Comme $2(E[\frac{N}{2}]+1)-N \geq 0$, l'intégrale (21) est nécessairement nulle sinon pour R assez grand, (21) est en défaut. Finalement $f(x) = H_o(x)$; $H_o(x)$ étant harmonique > 0 dans $B(0,R)$ est nécessairement la restriction à $B(0,R)$ d'une fonction harmonique > 0 dans tout $\mathbb{R}^N$ donc est constante.

3.2. DEVELOPPEMENT EN SERIE DE FONCTIONS POLYHARMONIQUES D'ORDRE CROISSANTS.

3.2.1. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$ et Ω^* un domaine borné de Green de Ω . Si $U,V \in C^{2p}(\Omega)$, de la formule de Green

$$\int_{\Omega^*} (U\Delta V - V\Delta U) d\tau = -\int_{\partial\Omega^*} \left(U \frac{\partial}{\partial n_{int}} V - V \frac{\partial}{\partial n_{int}} U\right) d\sigma ,$$

on en déduit

$$\int_{\Omega^*} (U\Delta^2 V - V\Delta^2 U)d\tau = -\int_{\partial\Omega} (U \frac{\partial}{\partial n_{int}}\Delta V - V \frac{\partial}{\partial n_{int}}\Delta U)d\sigma$$

$$-\int_{\partial\Omega} (\Delta U \frac{\partial V}{\partial n_{int}} - \Delta V \frac{\partial U}{\partial n_{int}})d\sigma \ .$$

Par itération, on trouve la formule dite de Gutzmer :

$$(22) \qquad \int_{\Omega^*} (U\Delta^p V - V\Delta^p U)d\tau = -\sum_{k=0}^{p-1} \int_{\partial\Omega} (\Delta^k U . \frac{\partial}{\partial n_{int}}\Delta^{p-k-1} V - \Delta^{p-k-1} V . \frac{\partial \Delta^k U}{\Delta n_{int}})d\sigma \ ,$$

$p = 1,2,\ldots$.

Posons $\alpha_{p-1} = [2^{p-1}(4-N)(6-N)\ldots(2p-N)](p-1)!$

$$V = \frac{1}{\alpha_{p-1}} \|y-x\|^{2p-N} \ , \ r = \|x-y\| \ , \ (x,y \in \mathbb{R}^N) \ ,$$

pour x fixé :

$$\Delta^k \|y-x\|^{2p-N} = \frac{\alpha_{p-1}}{\alpha_{p-k-1}} \|y-x\|^{2p-2k-N} \ .$$

En appliquant (22) à $\Omega^* - B(x,\rho)$ et puis en faisant tendre $\rho \to 0$, on trouve :

$$(23) \qquad (N-2)\,\omega_N(1)\,U(x) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{\alpha_k} \int_{\partial\Omega^*} (\Delta^k U \frac{\partial}{\partial n_{int}} r^{2k+2-N} - r^{2k+2-N} \frac{\partial}{\partial n_{int}} \Delta^k U)d\sigma$$

$$- \frac{1}{\alpha_{p-1}} \int_{\Omega^*} r^{2p-N}\, \Delta^p U \, d\tau \ .$$

3.2.2. Soit $u \in \mathcal{H}_\infty(\Omega)$. Dans (23), le reste

$$R_p(x) = \frac{1}{\alpha_{p-1}} \int_{\Omega^*} r^{2p-N}(x,y)\; \Delta^p u(y)d\tau(y)$$

est majoré d'après (3') de 1.2.1 par

$$\frac{1}{\alpha_{p-1}} \int_{\Omega^*} r^{2p-N}(x,y)\,|\Delta^p u(y)|\,d\tau(y) \le \frac{1}{\alpha_{p-1}} M(\overline{\Omega^*},\varepsilon)\; \varepsilon^{2p}(2p)! \int_{\Omega^*} r^{2p-N}(x,y)d\tau(y)$$

$$\le \frac{1}{\alpha_{p-1}} M(\overline{\Omega^*},\varepsilon)\; \varepsilon^{2p}(2p)!\; \delta^{2p-N} \text{ Mes } \Omega^*$$

(δ = le diamètre de Ω^*). Il en résulte que $R_p(x) \to 0$ si $p \to \infty$ uniformément sur tout compact de Ω^*. On en déduit [1] :

— Une fonction $u \in \mathcal{H}_\infty(\Omega)$ est développable dans tout domaine de Green $\Omega^* \subset \Omega$ en une série de fonctions polyharmoniques :

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x) \ , \ (x \in \Omega^*) \tag{24}$$

avec $\Delta^{k+1} u_k = 0$. La série converge absolument dans Ω^* et uniformément sur tout compact de Ω^*.

Le développement (24) est aussi valable pour une fonction analytique à cette différence près que la série converge uniformément au voisinage de tout point de Ω^*.

On peut énoncer une réciproque de l'énoncé ci-dessus :

3.2.3. THEOREME. <u>Soit dans l'ouvert</u> $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ <u>une suite de distributions</u> $(T_n)_{n \geq 1}$ <u>avec pour tout</u> n, $\Delta^{n+1} T_n = 0$. <u>Alors, si la série</u> $\sum_{n=1}^{\infty} T_n$ <u>converge dans</u> $\mathcal{D}'(\Omega)$ <u>sa somme</u> T <u>est dans</u> $\mathcal{H}_\infty(\Omega)$.

En effet, pour une série convergente de distribution $(T_k)_{k \geq 1}$, on a quel que soit $m \in \mathbb{N}$:

$$< \Delta^m T, \varphi > = \sum_{k=1}^{\infty} < \Delta^m T_k, \varphi > .$$

La série numérique du second membre étant convergente pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $m_o(\varepsilon, \varphi)$ tel que

$$\left| \sum_{k=m}^{\infty} < \Delta^m T_k, \varphi > \right| < \varepsilon \quad \text{si} \quad m \geq m_o(\varepsilon, 0) .$$

L'hypothèse $\Delta^{n+1} T_n = 0$ pour tout n implique :

$$|< \Delta^m T, \varphi >| = \left| \sum_{k=m}^{\infty} < \Delta^m T_k, \varphi > \right| < \varepsilon \ , \ m > m_o(\varepsilon, \varphi)$$

donc, la condition c du théorème 1.2.1 est vérifiée d'où $T \in \mathcal{H}_\infty(\Omega)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ARONSZAJN N. Sur la décomposition des fonctions analytiques uniformes. Acta. Math. t. 65 (1935).

[2] ARONSZAJN N. Colloque International C.N.R.S. sur les équations aux dérivées partielles linéaires. Orsay (1972).

[3] AVANISSIAN V., FERNIQUE X. Sur l'analycité des distributions harmoniques d'ordre infini. Inst. Fourier, t. XVIII, fas. 2 (1969).

[4] CARTAN H. Variété analytique réelle et variété analytique complexe. Bull. Soc. Math. France, t. 85 (1957).

[5] HAYMANN W.K. Power series expansions for harmonic functions. Bull. London Math. Soc. 2 (1970).

[6] LELONG P. Sur les fonctions indéfiniment dérivables de plusieurs variables. Duke Math. J., vol. 14, n° 1 (1947).

[7] NICOLESCU M. Sur les fonctions de n variables, harmoniques d'ordre p. Bull. Soc. Math., t. LX (1932).

[8] OVCARENKO On multiply superharmonic functions. Uspehi. Mat. Nauk. 16, n° 3 (99) (1961).

[9] SCHWARTZ L. Séminaire 2me année 1954/55.

[10] WIDDER D.V. Completely convexe functions and Lidstone series. Trans. Am. Math. Soc., vol. 5 (1942).